

TD 05 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2025-2026

vendredi 03 octobre 2025

5.1 Centrale Maths1 PSI 2016 Thomas Corbères

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Déterminer la dimension de $\text{Ker}(\varphi)$.

b. Montrer qu'il existe une unique matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \text{Tr}(N^T M)$.

c. Montrer que si A et B sont semblables, alors $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.

d. Supposons que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \varphi(PAP^{-1}) = \varphi(A)$. Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \varphi = \lambda \text{Tr}$.

Indication : on admet que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec toutes les matrices de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $M = \lambda I_n$.

f. Montrer le résultat qu'on vient d'admettre.

5.2 Mines PSI 2016 Sam Pérochon I

Soit E, E' deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et F, F' deux sous-espaces de E et E' respectivement.

On pose $A = \{u \in \mathcal{L}(E, E') \mid F \subset \text{Ker}(u) \text{ et } \text{Im}(u) \subset F'\}$.

a. Montrer que A est un espace vectoriel.

b. Montrer que A est de dimension finie si E et E' le sont. Quelle est alors la dimension de A ?

5.3 Mines PSI 2017 Corentin Gatellier I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $x_1, \dots, x_n$ distincts deux à deux et $y_1 < \dots < y_n$.

Montrer que $A = (e^{x_i y_j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible.

5.4 Mines PSI 2017 Claire Raulin II

Soit deux entiers p et q dans $\mathbb{N}^*$ et deux matrices $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Montrer que $\det(I_q - AB) = \det(I_p - BA)$.

5.5 Centrale Maths1 PSI 2018 Martin Monsel

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit P une partie de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ de cardinal m et stable par produit.

a. Soit $A \in P$, montrer que $\sum_{B \in P} AB = \sum_{B \in P} B$.

b. Montrer que $\sum_{B \in P} \text{Tr}(B)$ est un multiple de m .

c. Montrer que si $\sum_{B \in P} \text{Tr}(B) = 0$ alors $\sum_{B \in P} B = 0$.

5.6 Mines PSI 2022 Colin Herviou-Laborde II

Soit un entier $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que si toute matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ semblable à A vérifie $b_{2,1} = 0$, alors pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la famille (AX, X) est liée. En déduire ce que vaut A .

b. Que dire de A si toute matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à A est telle que $b_{1,1} = 0$?

5.7 Mines PSI 2022 Baptiste Savarit II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = AMA$.

Calculer $\det(\varphi)$. Indication : on pourra s'intéresser à $f : M \mapsto MA$ et $g : M \mapsto AM$.

5.8 X PSI 2024 Guilhem Thébaud I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un ensemble non vide et une famille $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I} \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^I$ telle que $\forall i \in I, A_i^2 = I_n$ et $\forall (i, j) \in I^2, A_i A_j = A_j A_i$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille finie et donner une majoration de son cardinal.

5.9 Centrale Maths1 PSI 2024 Adrien Sagnac

Soit $E = \mathbb{K}[X]$, $u : P \in E \rightarrow P(X+1)$ et $v = u - \text{id}_E$.

a. Montrer que v est un endomorphisme de E et que $\forall P \in E, \forall n \in \mathbb{N}, v^n(P) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k)$.

b. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p+1, \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0$.

c. Que vaut $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n$ pour $n \in \mathbb{N}$?

d. Déterminer $\text{Ker}(v)$. Est-ce que v est injective ?

e. Est-ce que v est surjective ?

5.10 Mines-Télécom PSI 2024 Mathéo Demongeot-Marais II

Soit E un espace de dimension n et p un projecteur de E . On pose $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ p = -p \circ f\}$.

a. Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.

b. Soit $f \in \mathcal{F}$, montrer que $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont stables par f .

c. Soit $f \in \mathcal{F}$, montrer que l'application induite par f sur $\text{Im}(p)$ est l'application nulle.

d. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.

5.11 OdIT 2013/2014 Centrale PSI planche 117I

Montrer que si p est un projecteur d'un espace E de dimension finie alors $\text{rang}(p) = \text{Tr}(p)$.

Soit $P = \sum_{i=1}^r p_i$ où les p_i sont des projecteurs de E .

Montrer que P est un projecteur de E si et seulement si $\forall (i, j) \in \llbracket 1; r \rrbracket^2, i \neq j \implies p_i \circ p_j = 0$.

5.12 OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 127I

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n et de coefficients a_k , montrer que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, |a_k| \leq \sup_{|z|=1} |P(z)|$.

5.13 OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 128II

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts ; montrer que $(P(X+a_i))_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5.14 Compléments OdIT 2018/2019 ENTPE PSI planche 427I

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = M^4$.

a. Calculer $(I_n + M)(M^2 - M^3)$ et en déduire que si $I_n + M$ est inversible, alors $M^2 = M^3$.

b. Effectuer la division euclidienne de $-X^3 + X^2$ par $X+1$ puis montrer qu'il existe deux polynômes réels U et V "simples" tels que $(-X^3 + X^2)U + (X+1)V = 1$.

c. Montrer que si $M^2 = M^3$, $I_n + M$ est inversible et trouver son inverse sous la forme d'un polynôme en M .