DEVOIR 03 : ESPACES NUMÉRIQUES

PSI 1 2025-2026

mardi 16 septembre 2025

QCM

1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

1.1 $\sum_{n \geq 0} u_n$ CV si $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

1.3 $\sum_{n \geq 0} u_n$ CV si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et majorée et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive

1.2 $\sum_{n \geq 0} u_n$ CV si $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

1.4 $\sum_{n \geq 0} u_n$ CV si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et majorée et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée

2 Noyaux et images : soit E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$

2.1 $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$

2.3 $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f \circ g)$

2.2 $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$

2.4 $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im}(g)$

3 Projections et symétries : soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E . On note $F = \text{Im}(p)$ et $G = \text{Ker}(p)$ et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G

3.1 $\text{id}_E - 2p = s$

3.3 $\text{Im}(p) = \text{Im}(q) \implies q \circ p = p$

3.2 $\text{Ker}(\text{id}_E - p) = \text{Im}(p)$

3.4 $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(q) \implies p \circ q = 0$

4 Implications et égalités élémentaires : soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E

4.1 $f \circ g = \text{id}_E \implies (f, g) \in \text{GL}(E)^2$

4.3 $\text{Im}(f + g) = \text{Im } f + \text{Im } g$

4.2 $f^2 = 0 \iff \text{Im } f = \text{Ker } f$

4.4 $\text{Ker}(f + g) = \text{Ker } f \cap \text{Ker } g$

Énoncé

Énoncer le théorème concernant le produit de CAUCHY de deux séries : définition d'un produit de CAUCHY de deux séries, hypothèses impliquant la convergence et relations sur les sommes des séries.

Preuve

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et S un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E .

Montrer que $\tilde{f} : S \rightarrow \text{Im}(f)$ définie par $\forall x \in S, \tilde{f}(x) = f(x)$ (restriction de f) est un isomorphisme.

Exercice 1

Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (admis) contenant les suites réelles convergentes.

On définit $F = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0\}$ l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0 et G le sous-espace (admis) des suites stationnaires (les suites qui sont constantes à partir d'un certain rang : ce rang dépendant de la suite considérée).

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

b. Justifier que $E = F + G$.

c. F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x, 2x - y)$. On admet que f est linéaire.

Calculer $f^2(x, y)$. Qu'en déduire sur f ? Déterminer les sous-espaces caractéristiques de f .

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercise 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1		X	X		
2		X	X		
3		X	X		
4					

1.1 Faux : $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ DV (BERTRAND) **1.2** Vrai : car $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente

1.3 Vrai : $(S_n)_{n \geq 0}$ est croissante (car $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$) et majorée donc CV **1.4** Faux : $u_n = (-1)^n$, alors $(u_n)_{n \geq 0}$ est bornée comme $(S_n)_{n \geq 0}$ mais $S_{2n+1} = 0$ et $S_{2n} = 1$.

2.1 Faux : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ **2.2** Vrai : cours **2.3** Vrai : classique **2.4** Faux : $g(x, y) = (x, 0)$ et $f(x, y) = (0, x)$.

3.1 Faux : si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$, en notant $s = \text{id}_E - 2p$, on a $s(y + z) = (y + z) - 2y = z - y \neq y - z$ en général **3.2** Vrai : cours **3.3** Vrai : $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(q) = \text{Ker}(\text{id}_E - q)$ donc $(\text{id}_E - q) \circ p = 0 \iff q \circ p = p$

3.4 Faux : si $p = q$, on a $p \circ q = p^2 = p \neq 0$ en général.

4.1 Faux : par exemple $E = \mathbb{R}[X]$, $f : P \mapsto P'$ et $g : P \mapsto \int_0^X P$ **4.2** Faux : on a juste $f^2 = 0 \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$

4.3 et **4.4** Faux : par exemple $f = -g = \text{id}_E$; juste $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(f + g) \supset \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$.

Énoncé Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes, on appelle produit de CAUCHY des deux séries

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} v_n \text{ la série } \sum_{n \geq 0} w_n \text{ définie par } \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k = \sum_{p+q=n} u_p v_q. \text{ Si } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} v_n \text{ sont absolument convergentes alors } \sum_{n \geq 0} w_n \text{ l'est aussi et } \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Preuve $\tilde{f}$ est bien définie car $f(S) \subset \text{Im}(f)$, et elle est linéaire car f l'est. On a $E = S \oplus \text{Ker}(f)$.

Si $x \in \text{Ker}(\tilde{f})$, $x \in S$ par définition et $\tilde{f}(x) = f(x) = 0_F$ donc $x \in \text{Ker}(f) \cap S = \{0_E\} \implies x = 0_E$: $\tilde{f}$ est injective.

Si $y \in \text{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Il existe un couple $(a, b) \in S \times \text{Ker}(f)$ tel que $x = a + b$ et $f(x) = f(a + b) = f(a) + f(b) = f(a) = \tilde{f}(a)$ donc $\tilde{f}$ est aussi surjective : au final $\tilde{f}$ est bien un isomorphisme.

Exercice 1 **a.** La suite nulle appartient clairement à F donc $F \neq \emptyset$. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de F et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors par combinaison linéaire de suites convergentes, la suite $\lambda u + v$ est convergente (on est dans l'espace E). Par linéarité de la limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$ donc $\lambda u + v \in F$. On vient d'établir que F est bien un sous-espace vectoriel de E .

b. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente, on note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. On définit les deux suites réelles $v = (u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = (\ell)_{n \in \mathbb{N}}$. La suite v converge vers $0 = \ell - \ell$ en tant que différence de suites convergentes et w est constante donc stationnaire : $v \in F$ et $w \in G$. Comme $u = v + w$, on a $E = F + G$.

c. F et G ne sont pas supplémentaires car la suite $u = (\delta_{0,n})_{n \in \mathbb{N}}$ (symbole de KRONECKER) telle que $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 1, u_n = 0$ est non nulle et à la fois dans F et dans G .

Exercice 2 $\forall (x, y) \in E = \mathbb{R}^2, f^2(x, y) = (x, 2x - (2x - y)) = (x, y)$ donc $f^2 = \text{id}_E$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(x, y) \in \text{Ker}(f - \text{id}_E) \iff (x, y) = (x, 2x - y) \iff x = y$ et $(x, y) \in \text{Ker}(f + \text{id}_E) \iff (x, y) = -(x, 2x - y) \iff x = 0$. Ainsi f est la symétrie par rapport à la droite $\text{Vect}(e_1 + e_2)$ parallèlement à la droite $\text{Vect}(e_2)$.