PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 02

PSI 1 2025-2026 **du lundi 22/09 au vendredi 26/09**

1 Séries numériques, propriétés : voir programme précédent

2 Séries à termes positifs : voir programme précédent

3 Séries à termes réels ou complexes : voir programme précédent

4 Révisions d'algèbre linéaire :

- espaces et sous-espaces vectoriels, sous-espaces engendrés ;
- somme de deux sous-espaces, somme directe, sous-espaces supplémentaires ;
- applications linéaires, noyau et image, caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité ;
- projecteurs et symétries : passage de l'algébrique au géométrique ;
- famille libre, génératrice, base, propriétés de ces familles ;
- sous-espace stables par un endomorphismes et endomorphismes induits ;
- théorème du rang (isomorphisme entre un supplémentaire du noyau et l'image) ;
- application donnée par ses restrictions à des sous-espaces en somme directe ;
- familles libres, génératrices, liées, bases éventuellement infinies (hors programme néanmoins) ;
- définition des hyperplans (prog. en dimension finie) : supplémentaire droite ou dimension $\mathrm{dim}(E)-1$;
- les hyperplans sont les noyaux des formes linéaires non nulles ;
- les hyperplans n'ont qu'une seule équation à un coefficient multiplicatif près ;
- calcul matriciel : somme, produit, espace vectoriel, anneau, matrices élémentaires, dimension ;
- transposée, matrices symétriques, antisymétriques, diagonales, triangulaires, trace ;
- inverses de matrices, calcul de puissances, matrices de GAUSS ;
- représentations matricielles : famille, matrice d'application linéaire, d'endomorphisme ;
- isomorphisme matrice-applications linéaires, relation avec le produit, l'inverse ;

QUESTIONS DE COURS :

1. énoncer le théorème de comparaison version séries à termes quelconques (th. 1.12)
2. énoncer les résultats sur le développement asymptotique de H_n et l'équivalent de STIRLING (rem. 1.23 et th. 1.16)
3. énoncer le critère spécial des séries alternées (th 1.18)
4. énoncer le théorème sur la relation entre les produits de CAUCHY et les séries (th. 1.20)
5. énoncer le théorème du rang (th. 2.13)
6. énoncer les propriétés d'une projection p sur F parallèlement à G (th. 2.15)
7. énoncer la caractérisation géométrique d'un projecteur (th. 2.16)
8. prouver que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f+g)$ et $\mathrm{Im}\,(f+g) \subset \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g)$ (rem. 2.20)
9. prouver que $\mathrm{rang}\,(g \circ f) \leqslant \mathrm{Min}(\mathrm{rang}\,(f), \mathrm{rang}\,(g))$ (prop. 2.35)
10. prouver que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et donner les dimensions et bases de chaque sev (prop. 2.39)

Prévision pour la prochaine semaine : algèbre linéaire