TD 03 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2025-2026 **vendredi 19 septembre 2025**

3.1 Soit $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k f_k+\beta_k g_k)=0$.

Comme $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k f_k=-\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k g_k$ est une fonction à la fois paire et impaire, on a $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k f_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k g_k=0$ (1). En effet, si f est à la fois paire et impaire, $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=f(-x)=-f(x)$ donc $2f(x)=0$ d'où $f(x)=0$.

On va montrer que $(f_1,\cdots,f_n)$ est libre par une des méthodes qui suit. Ensuite, $\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k g_k=0$ se dérive en $\sum\limits_{k=1}^{n}k\beta_k f_k=0$ et on en déduira que $\beta_1=2\beta_2=\cdots=n\beta_n=0$ donc que $\beta_1=\cdots=\beta_n=0$. Comme $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$ par liberté de $(f_1,\cdots,f_n)$, on aura la liberté de la famille $(f_1,\cdots,f_n,g_1,\cdots,g_n)$.

<u>Méthode 1</u> : Les polynômes T_k de TCHEBYCHEV vérifient $\forall t\in\mathbb{R},\ T_k(\cos\theta)=\cos(k\theta)$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k f_k=0$ s'écrit aussi $\forall t\in\mathbb{R},\ \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k T_k(\cos t)=0$. Ainsi, $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k T_k$ est nul car ce polynôme possède une infinité de racines (car $\cos$ est surjectif de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$). Comme les polynômes de TCHEBYCHEV sont de degrés échelonnés, ils forment une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$ et on a la liberté de $(f_1,\cdots,f_n)$.

<u>Méthode 2</u> : Pour l'endomorphisme $D\in\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ défini par $D(f)=f''$, les fonctions f_k sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $-k^2$ car $D(f_k)=-k^2f_k$ et $f_k\neq 0$. Comme ces valeurs propres sont distinctes deux à deux, on saura bientôt que la famille $(f_1,\cdots,f_n)$ des vecteurs propres est libre.

<u>Méthode 3</u> : Pour le produit scalaire $(f|g)=\int_0^{2\pi}f(t)g(t)dt$ sur l'espace $C^0([0;2\pi],\mathbb{R})$, $(f_1,\cdots,f_n)$ est directement une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul : elle est donc libre ! On le prouve avec la formule de trigonométrie $2\cos(b)\cos(a)=\cos(a-b)+\cos(a+b)$. En effet, si $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$ tel que $i\neq j$, on a $(f_i|f_j)=\int_0^{2\pi}\cos(it)\cos(jt)dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos((i-j)t)+\cos((i+j)t))dt=0$.

<u>Méthode 4</u> : On dérive $2(n-1)$ fois la relation (1) (en ne gardant que les dérivées d'ordre pair) et on a $\forall p\in[\![0;n-1]\!],\ \forall t\in\mathbb{R},\ \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^pk^{2p}\alpha_k\cos(kt)=0$. En évaluant en $t=0$, $\forall p\in[\![0;n-1]\!],\ \sum\limits_{k=1}^{n}k^{2p}\alpha_k=0$. Ce système est de CRAMER car la matrice $A=(j^{2(i-1)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de ce système est une matrice de VANDERMONDE inversible puisque les scalaires $1,4,\cdots,n^2$ sont distincts. Ainsi, $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$ et $(f_1,\cdots,f_n)$ est libre.

<u>Méthode 5</u> : (f_1) est libre car $f_1\neq 0$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $(f_1,\cdots,f_n)$ est libre. Soit $(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n+1}\alpha_k f_k=0$ (A). On dérive deux fois et on a $\sum\limits_{k=1}^{n+1}k^2\alpha_k f_k=0$ (B). En effectuant $(B)-(n+1)^2(A)$, $\sum\limits_{k=1}^{n}((n+1)^2-k^2)\alpha_k f_k=0$ donc $\forall k\in[\![1;n]\!],\ ((n+1)^2-k^2)\alpha_k=0$ par hypothèse de récurrence donc $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$ d'où $\alpha_{n+1}=0$ car $f_{n+1}\neq 0$. Par principe de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (f_1,\cdots,f_n)$ est libre.

$\boxed{3.2}$ ($\Longleftarrow$) Si p et q sont deux projecteurs de même image et $u = p - q$, alors $u^2 = p + q - p \circ q - q \circ p$

Or si $x \in E$, $p(x) \in \mathrm{Im}\,(p)$ donc $p(x) \in \mathrm{Im}\,(q)$ et $q(p(x)) = p(x)$ car $\mathrm{Im}\,(q) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - q)$ ce qui prouve que $q \circ p = p$. De même $p \circ q = q$ et on a bien $u^2 = p + q - p - q = 0$.

($\Longrightarrow$) Si $u^2 = 0$, on a $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ d'après le cours. Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E, u induit un isomorphisme v entre S et $\mathrm{Im}\,(u)$ par le théorème du rang. Notons $r = \mathrm{rang}\,(u)$. Prenons donc une base $(e_1, \cdots, e_r)$ de S, alors en posant $\forall k \in [\![1;r]\!]$, $e_{n-r+k} = f(e_k) \in \mathrm{Im}\,(u)$, la famille $(e_{n-r+1}, \cdots, e_n)$ est une base de $\mathrm{Im}\,(u)$ (image d'une base par l'isomorphisme v). On complète cette famille libre $(e_{n-r+1}, \cdots, e_n)$ de vecteurs de $\mathrm{Ker}(u)$ en une base $(e_{r+1}, \cdots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \cdots, e_n)$ de $\mathrm{Ker}(u)$ par le théorème de la base incomplète. Enfin, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E adaptée à la décomposition $E = S \oplus \mathrm{Ker}(u)$.

La matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ s'écrit par blocs $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I_r & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car les vecteurs $e_{r+1}, \cdots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \cdots, e_n$ sont dans $\mathrm{Ker}(u)$ et $\forall k \in [\![1;r]\!]$, $e_{n-r+k} = f(e_k)$. Par exemple, en posant les matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I_r & 0 & I_r \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{pmatrix}$, $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ et $A = P - Q$ donc, en passant aux endomorphismes canoniquement associés, $u = p - q$ avec p et q deux projecteurs tels que $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Im}\,(q) = \mathrm{Im}\,(u)$.

Cela revient à définir p et q par les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$: $\forall k \in [\![1;r]\!]$, $p(e_k) = e_{n-r+k}$ et $q(e_k) = 0$, $\forall k \in [\![r+1;n-r]\!]$, $p(e_k) = 0$ et $q(e_k) = 0$ et $\forall k \in [\![n-r+1;n]\!]$, $p(e_k) = e_k$ et $q(e_k) = e_k$ et on vérifie bien sur les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ que $p \circ p = p$, $q \circ q = q$, $u = p - q$ et $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Im}\,(q) = \mathrm{Im}\,(u)$.

$\boxed{3.3}$ On peut très bien généraliser l'énoncé en supposant $(p, q) \in \mathcal{L}(E)^2$ et en montrant l'équivalence entre (p et q sont des projecteurs de même noyau) et ($p = p \circ q$ et $q = q \circ p$).

($\Longleftarrow$) Si ($p = p \circ q$ et $q = q \circ p$) alors $p^2 = p \circ p = (p \circ q) \circ p = p \circ (q \circ p) = p \circ q = p$ donc p est un projecteur. De même, q est un projecteur. De plus $p = p \circ q \Longrightarrow \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}\, p$ et, de même, on obtient $q = q \circ p \Longrightarrow \mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}(q \circ p) = \mathrm{Ker}\, q$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}\, q$ par double inclusion.

($\Longrightarrow$) Si p et q sont des projecteurs de même noyau, soit $x \in E$, comme $p^2 = p$, il vient $x - p(x) \in \mathrm{Ker}\, p$ donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}\, q$ ce qui donne $q(x) - q(p(x)) = 0_E$ d'où $q = q \circ p$. De même $p = p \circ q$.

On aurait aussi pu dire que $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\,(\mathrm{id}_E - p)$ car p est un projecteur et $\mathrm{Im}\,(\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{Ker}\, q$ implique $\mathrm{Im}\,(\mathrm{id}_E - p) \subset \mathrm{Ker}\, q \Longleftrightarrow q \circ (\mathrm{id}_E - p) = 0 \Longleftrightarrow q = q \circ p$. Même chose pour $p \circ (\mathrm{id}_E - q) = 0 \Longleftrightarrow p = p \circ q$.

3.4 Méthode 1 : il suffit d'écrire $k^3 = k(k-1)(k-2)+3k^2-2k = 6\binom{k}{3}+3k(k-1)+k = 6\binom{k}{3}+6\binom{k}{2}+\binom{k}{1}$.

Ensuite, pour un entier p, on a $\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \dfrac{n!}{(n-k)!(k-p)!p!} = \dfrac{n!(n-p)!}{(n-p)!p!(n-k)!(k-p)!} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$.

Ainsi, $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^3 = 6\sum\limits_{k=3}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{3} + 6\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{1}$ qu'on transforme avec les égalités précédentes : $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^3 = 6\binom{n}{3}\sum\limits_{k=3}^{n}\binom{n-3}{k-3}+6\binom{n}{2}\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}+\binom{n}{1}\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$. Or, avec le binôme de Newton, on a $\sum\limits_{k=3}^{n}\binom{n-3}{k-3} = 2^{n-3}$, $\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} = 2^{n-2}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$.

On obtient donc $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^3 = 6\binom{n}{3}2^{n-3}+6\binom{n}{2}2^{n-2}+\binom{n}{1}2^{n-1} = n^2(n+3)2^{n-3}$.

Méthode 2 : on a $(1+X)^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k$, on dérive et on multiplie par X et $nX(1+X)^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}X^k$. On recommence : $nX(nX+1)(1+X)^{n-2} = (n(1+X)^{n-1}+n(n-1)X(1+X)^{n-2})X = \sum\limits_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}X^k$. On continue $n((nX+1)(1+X)^{n-2}+nX(1+X)^{n-2}+(n-2)X(nX+1)(1+X)^{n-3})X = \sum\limits_{k=0}^{n}k^3\binom{n}{k}X^k$ et on évalue en 1 pour avoir à nouveau $\sum\limits_{k=0}^{n}k^3\binom{n}{k} = n((n+1)2^{n-2}+n2^{n-2}+(n-2)(n+1)2^{n-3}) = n^2(n+3)2^{n-3}$.

3.5 **a.** Procédons par récurrence sur n. Si $n=1$, $P = X-a_0$ admet exactement une seule racine réelle positive, à savoir a_0. Ainsi P admet au plus une racine sur $\mathbb{R}_+^*$: une exactement si $a_0>0$ et aucune si $a_0=0$.

Soit $n \geqslant 2$, supposons donc que tout $Q = X^{n-1}-b_{n-2}X^{n-2}-\cdots-b_0$ avec des réels positifs $b_0,\cdots,b_{n-2}$ admet au plus une racine sur $\mathbb{R}_+^*$, plus précisément exactement une racine simple réelle strictement positive si $(b_0,\cdots,b_{n-2}) \neq (0,\cdots,0)$ et aucune racine strictement positive si $(b_0,\cdots,b_{n-2}) = (0,\cdots,0)$. Soit $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1}-\cdots-a_0$ avec $a_0,\cdots,a_{n-1}$ positifs. Alors $P' = n\Big(X^{n-1}-\dfrac{(n-1)a_{n-1}}{n}X^{n-2}-\cdots-\dfrac{a_1}{n}\Big)$. Traitons deux cas :

- Si $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$, alors P' ne s'annule qu'en 0 sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse de récurrence donc y reste positif par le théorème des valeurs intermédiaires car $\lim\limits_{t\to+\infty}P'(t) = +\infty$. Ainsi, P est strictement croissante (car P' ne s'annule qu'en 0) sur $\mathbb{R}_+$ donc injective. Par continuité de P, la fonction P réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[-a_0;+\infty[$. Ainsi, P s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en une racine simple r si $a_0>0$ (auquel cas $(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}) \neq (0,\cdots,0)$ et aucune fois (ne s'annulant qu'en 0 sur $\mathbb{R}_+$) si $a_0=0$ donc si $(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}) = (0,0,\cdots,0)$.
- Si $(a_1,\cdots,a_{n-1}) \neq (0,\cdots,0)$, alors P' s'annule exactement une fois en une racine simple $s>0$ de P' sur $\mathbb{R}_+^*$ par hypothèse de récurrence. On a forcément P' négative sur $[0;s]$ et positive sur $[s;+\infty[$ (sinon on aurait au moins deux racines de P' sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}P'(x) = +\infty$) de sorte qu'on voit avec le tableau de variations de P que P s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en un réel $r>s$ qui est une racine simple de P.

Par principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout polynôme $P = X^n-a_{n-1}X^{n-1}-\cdots-a_0$ tel que $a_0,\cdots,a_{n-1}$ sont des réels positifs, alors P ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ si $(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}) = (0,0,\cdots,0)$ et s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$ si $(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}) \neq (0,\cdots,0)$.

b. Soit α une racine complexe de Q, $|\alpha^n| = |a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0| \leqslant |a_{n-1}||\alpha|^{n-1} + \cdots + |a_0|$ par inégalité triangulaire. Ainsi $P(|\alpha|) = |\alpha|^n - |a_{n-1}||\alpha|^{n-1} - \cdots - |a_0| \leqslant 0$. Comme $|a_0| > 0$, on est dans le cas où P s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en $\rho > 0$. L'inégalité $P(|\alpha|) \leqslant 0$ conduit alors à $|\alpha| \in [0;\rho]$ donc $|\alpha| \leqslant \rho$.

3.6 **a.** Existence : on trouve $X^1 + \dfrac{1}{X^1} = P_1\left(X + \dfrac{1}{X}\right)$ avec $P_1 = X$ qui est unitaire de degré 1.

On a aussi $X^2 + \dfrac{1}{X^2} = \left(X + \dfrac{1}{X}\right)^2 - 2 = P_2\left(X + \dfrac{1}{X}\right)$ avec $P_2 = X^2 - 2$ qui est unitaire de degré 2.

On a de plus $X^3 + \dfrac{1}{X^3} = \left(X + \dfrac{1}{X}\right)^3 - 3\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = P_3\left(X + \dfrac{1}{X}\right)$ avec $P_3 = X^3 - 3X$ qui est unitaire de degré 3.

Soit $n \geqslant 2$, supposons qu'il existe deux polynômes unitaires P_n de degré n et P_{n-1} de degré $n-1$ tels que $P_n\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = X^n + \dfrac{1}{X^n}$ et $P_{n-1}\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = X^{n-1} + \dfrac{1}{X^{n-1}}$. En posant $P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$, comme on a $X^{n+1} + \dfrac{1}{X^{n+1}} = \left(X^n + \dfrac{1}{X^n}\right)\left(X + \dfrac{1}{X}\right) - \left(X^{n-1} + \dfrac{1}{X^{n-1}}\right)$ (R) on a trouvé un polynôme unitaire P_{n+1} de degré $n+1$ (assez clair) tel que $P_{n+1}\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = X^{n+1} + \dfrac{1}{X^{n+1}}$. On conclut par principe de récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n de degré $n \geqslant 1$ et unitaire tel que $P_n\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = X^n + \dfrac{1}{X^n}$.

Unicité : soit $n \geqslant 1$ et supposons qu'il existe Q_n unitaire de degré n qui vérifie aussi $Q_n\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = X^n + \dfrac{1}{X^n}$. Par exemple, pour $x > 0$, on a $P_n\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = Q_n\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$. Comme l'application $f : t \mapsto t + \dfrac{1}{t}$ est surjective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $[2;+\infty[$ par une petite étude de fonctions, les deux polynômes P_n et Q_n coïncident sur l'intervalle $[2;+\infty[$ donc en une infinité de réels et sont donc formellement égaux : $P_n = Q_n$.

Au final, $\forall n \geqslant 1,\ \exists! P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que P_n est unitaire et de degré n et tel que $P_n\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = X^n + \dfrac{1}{X^n}$.

b. D'après la question précédente, on a $\forall n \geqslant 2,\ P_{n+1} = XP_n - P_{n-1}$. On reconnaît une relation de récurrence type Tchebychev. On remplace X par $e^{i\theta}$ dans la formule (R) pour avoir la relation suivante : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall n \geqslant 2,\ P_{n+1}(2\cos(\theta)) = 2\cos(\theta).P_n(2\cos(\theta)) - P_{n-1}(2\cos(\theta))$. Une récurrence double permet de montrer, par la formule de trigonométrie $\cos((n+1)\theta) = 2\cos\theta\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$, que l'on a bien $\forall n \geqslant 2,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$. Comme $\cos(n\theta) = 0 \iff \theta \equiv \dfrac{\pi}{2n}\ \left[\dfrac{\pi}{n}\right]$, les réels $2\cos(\theta_k)$ sont des racines de P_n si $\theta_k = \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n} = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k \in [\![0;n-1]\!]$. Comme la fonction $\cos$ est injective sur $[0;\pi]$, les réels $(2\cos(\theta_k))_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ sont distincts deux à deux car $0 < \theta_0 < \cdots < \theta_{n-1} < \pi$. Comme P_n est unitaire de degré n, on a donc $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(X - 2\cos(\theta_k))$.

On sait qu'il existe alors des constantes réelles $a_0, \cdots, a_{n-1}$ telles que $F_n = \dfrac{1}{P_n} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{a_k}{X - 2\cos(\theta_k)}$ car F_n est une fraction rationnelle irréductible de degré strictement négatif. La théorie (vue seulement en MPSI) nous annonce que $\forall k \in [\![0;n-1]\!],\ a_k = \dfrac{1}{P_n'(2\cos(\theta_k))}$. Or $-2\sin\theta P_n'(\cos(\theta)) = -2n\sin(n\theta)$ donc $P_n'(2\cos(\theta_k)) = \dfrac{n\sin(n\theta_k)}{\sin(\theta_k)} = \dfrac{(-1)^k n}{\sin(\theta_k)}$. Par conséquent : $\dfrac{1}{P_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^k\sin(\theta_k)}{X - 2\cos(\theta_k)}$.

3.7 **a.** Soit $y \in \mathrm{Im}\,(f)$, alors $f(y) \in \mathrm{Im}\,(f)$ par définition donc $\mathrm{Im}\,(f)$ est stable par f. Considérons l'application $g : \mathrm{Im}\,(f) \to \mathrm{Im}\,(f)$ telle que $\forall x \in \mathrm{Im}\,(f),\ g(x) = f(x)$ (l'application induite par f dans $\mathrm{Im}\,(f)$ qui existe par stabilité de $\mathrm{Im}\,(f)$ par f). Si $x \in \mathrm{Im}\,(f)$, alors $g(x) = f(x) \in \mathrm{Im}\,(f^2)$. Réciproquement, si $y \in \mathrm{Im}\,(f^2)$, alors $\exists x \in E,\ y = f^2(x) = f(f(x)) = g(f(x)) \in \mathrm{Im}\,(g)$ car $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$. On vient de montrer que $\mathrm{Im}\,(g) = \mathrm{Im}\,(f^2)$.

Soit $x \in E$, $x \in \mathsf{Ker}(g) \iff (x \in \mathrm{Im}\,(f)$ et $g(x) = f(x) = 0_E) \iff (x \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathsf{Ker}(f))$.

Par conséquent, $\mathsf{Ker}(g) = \mathsf{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}\,(f)$.

On applique maintenant la formule du rang à g. Cela donne $\mathrm{rang}\,(f) = \mathrm{rang}\,(g) + \dim(\mathsf{Ker}(g))$ qui équivaut à $\dim(E) - \dim(\mathsf{Ker}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathsf{Ker}(f^2)) + \dim(\mathsf{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}\,(f))$ en appliquant aussi la formule du rang à f et f^2. On en déduit que $\dim(\mathsf{Ker}(f^2)) = \dim(\mathsf{Ker}(f)) + \dim(\mathsf{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}\,(f))$. Mais $\mathsf{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) \subset \mathsf{Ker}(f)$ donc $\dim(\mathsf{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}\,(f)) \leqslant \dim(\mathsf{Ker}(f))$ et on trouve bien $\dim(\mathsf{Ker}(f^2)) \leqslant 2\dim(\mathsf{Ker}(f))$.

b. Puisque $\dim(\mathsf{Ker}(f)) = 3n - 2n = n$ d'après la formule du rang, $\dim(\mathsf{Ker}(f^2)) \leqslant 2n$ d'après **a.**. Or comme $f^3 = f^2 \circ f = 0$, on sait qu'alors $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathsf{Ker}(f^2)$. Mais $\mathrm{rang}\,(f) = 2n$ par hypothèse donc $\dim(\mathsf{Ker}(f^2)) \geqslant 2n$. On en déduit bien que $\dim(\mathsf{Ker}(f^2)) = 2n$ puis $\mathrm{rang}\,(f^2) = n$ avec la formule du rang.

c. Avec les inclusions $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathsf{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}\,(f^2) \subset \mathsf{Ker}(f)$ et l'égalité des dimensions, on a $\mathrm{Im}\,(f) = \mathsf{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}\,(f^2) = \mathsf{Ker}(f)$. On prend une base $(e_{2n+1}, \cdots, e_{3n})$ de $\mathsf{Ker}(f) = \mathrm{Im}\,(f^2)$. On y est incité par la forme de la matrice puisque les n derniers vecteurs de $\mathcal{B}$ doivent être dans le noyau. Par définition, il existe une famille $(e_1, \cdots, e_n)$ de vecteurs de E tels que $\forall k \in [\![1;n]\!],\ f^2(e_k) = e_{2n+k}$.

On pose $\forall k \in [\![1;n]\!],\ e_{n+k} = f(e_k)$ et enfin $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{2n}, e_{2n+1}, \cdots, e_{3n})$.

Vérifions que $\mathcal{B}$ est libre, soit donc $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant 3n} \in \mathbb{K}^{3n}$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{3n} \lambda_k e_k = 0_E$ (1). On applique f^2 à cette relation (1) et il ne reste que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_{2n+k} = 0_E$ car $f^3 = 0$. Mais comme $(e_{2n+1}, \cdots, e_{3n})$ est libre, on en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. On recommence en appliquant u à la relation (1), et on a $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \lambda_k e_{n+k} = 0_E$ car $f^3 = 0$. À nouveau $(e_{2n+1}, \cdots, e_{3n})$ est libre donc $\lambda_{n+1} = \cdots = \lambda_{2n} = 0$. Il ne reste donc dans (1) que $\sum\limits_{k=2n+1}^{3n} \lambda_k e_k = 0_E$ qui donne encore $\lambda_{2n+1} = \cdots = \lambda_{3n} = 0$. Par conséquent, $\mathcal{B}$ est une famille libre de E.

$\mathcal{B}$ est une base de E car $\dim(E) = 3n = \mathrm{card}\,(\mathcal{B})$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{pmatrix}$ par construction de $\mathcal{B}$.

3.8 **a.** E est classiquement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, lui-même sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. F est une partie non vide de E car la fonction nulle 0 appartient bien à F. De plus, si $(f, g) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $h = \lambda f + \mu g$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle vérifie bien $h(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0$ et $h'(0) = \lambda f'(0) + \mu g'(0) = 0$ par linéarité de la dérivation. Ainsi, $\lambda f + \mu g \in F$ et F est un sous-espace vectoriel de E.

b. L'appartenance de f à F impose deux conditions à la fonction f donc on pense à un supplémentaire de F qui est un plan. Il vient naturellement à l'esprit le plan $G = \mathbb{R}_1[x] = \{f : x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ des fonctions affines. Il est classique que G est un sous-espace de E : la fonction nulle $x \mapsto 0.x + 0 = 0$ est affine et toute combinaison $\lambda f + \mu g$ de fonctions affines $f : x \mapsto ax + b$ et $g : x \mapsto a'x + b'$ est elle-même affine car $\lambda f + \mu g : x \mapsto (\lambda a + \mu a')x + (\lambda b + \mu b')$.

De plus, si $f \in F \cap G$, alors il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax+b$ et $f(0) = b = f'(0) = a = 0$ donc f est la fonction nulle : on a déjà $F \cap G = \{0_E\}$ donc F et G sont en somme directe.

Soit $h \in E$, en posant $g(x) = h(0) + xh'(0)$ et $f(x) = h(x) - h(0) - xh'(0)$ (expression qu'on peut trouver par analyse-synthèse) et on a $h = f + g$, g est affine et $f \in F$ car $f(0) = f'(0) = 0$. Par conséquent, $E = F + G$.

Comme $F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F + G$, on a $E = F \oplus G$ qui se traduit par "F et G sont supplémentaires dans E".

c. Par construction, l'expression de la projection $p : E \to E$ sur G parallèlement à F est $p(h) = g$ avec $g : x \mapsto h(0) + xh'(0)$ (on ne garde que la composante selon G dans l'écriture de la fonction h sous forme d'une somme de fonction de F et de G).

3.9 Les relations $A \times A = B \times B = 0$ se traduisent par $\mathrm{Im}\,(A) \subset \mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}\,(B) \subset \mathrm{Ker}(B)$. On en déduit que $\mathrm{rang}\,(A) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2n - \mathrm{rang}\,(A)$ par la formule du rang donc que $2\,\mathrm{rang}\,(A) \leqslant 2n$. Comme on a $\mathrm{rang}\,(A) \geqslant n$ par hypothèse, on en déduit que $\mathrm{rang}\,(A) = n$. Par symétrie, $\mathrm{rang}\,(B) = n$.

Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(A)$ dans $\mathbb{C}^{2n}$, on a donc $\dim(S) = 2n - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2n - n = n$. Prenons $\mathcal{B}_1 = (v_1, \cdots, v_n)$ une base de S. On sait d'après le théorème du rang que A induit un isomorphisme entre S et $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Ker}(A)$ de sorte que $\mathcal{B}_2 = (Av_1, \cdots, Av_n)$ est une base de $\mathrm{Im}\,(A)$. Comme $C^{2n} = S \oplus \mathrm{Im}\,(A)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{C}^{2n}$. Par construction, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à A, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Et on a $A = PNP^{-1}$ par formule de changement de base avec P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$ à la base $\mathcal{B}$. Par symétrie, on a aussi l'existence d'une matrice $Q \in GL_{2n}(\mathbb{C})$ telle que $B = QNQ^{-1}$. Comme les matrices A et B sont semblables à la même matrice N, A et B sont semblables. En effet, $A = P(Q^{-1}BQ)P^{-1} = UBU^{-1}$ en posant $U = PQ^{-1} \in GL_n(\mathbb{C})$.

3.10 **a.** Comme $\deg(P_n) = n \geqslant 1$, on a $\deg(P'_n) = n-1$. De plus, comme la fonction polynomiale P_n est de classe C^1 et que $\forall k \in [\![0;n-1]\!],\ P(k) = P(k+1) = 0$, d'après le théorème de ROLLE, il existe $s_k \in]k;k+1[$ tel que $P'(s_k) = 0$. On a donc $n-1$ racines distinctes $s_0, \cdots, s_{n-1}$ de P'_n qui est de degré $n-1$, ce sont donc les seules. En particulier, $r_n = s_0$ est l'unique réel de $]0;1[$ tel que $P'(r_n) = 0$.

b. Pour des fonctions dérivables, comme pour des polynômes formels, on a $\Big(\prod\limits_{k=1}^{n} f_k\Big)' = \sum\limits_{k=1}^{n} f'_k \Big(\prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} f_i\Big)$. Si on applique ceci avec $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n} f_k$ avec $f_k = X-k$, on a donc $P'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} (X-i)$ car $f'_k = (X-k)' = 1$. Si $x \in \mathbb{R} \setminus [\![0;n]\!]$, on a $P_n(x) \neq 0$, d'où $\dfrac{P'_n(x)}{P_n(x)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \Big(\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n} (x-i)\Big) \times \Big(\prod\limits_{i=0}^{n} (x-i)\Big)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x-k}$.

c. Puisque $P'_n(r_n) = 0$ et $r_n \notin [\![0;n]\!]$, d'après **b.**, $\dfrac{1}{r_n} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{r_n - k}$ donc $\dfrac{1}{r_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k-r_n} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ car $\forall k \in [\![1;n]\!],\ 0 < k - r_n \leqslant k$. Comme la série harmonique diverge par RIEMANN, la suite $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = H_n\Big)_{n\geqslant 1}$ de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{r_n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$.

d. Mieux que ci-dessus, on a $\forall k \in [\![2;n]\!],\ k-1 \leqslant k - r_n \leqslant k$ donc $\dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{k-r_n} \leqslant \dfrac{1}{k-1}$ donc, en sommant, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{r_n} \leqslant \dfrac{1}{1-r_n} + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k-1}$. Mais comme $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ et $H_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n-1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ car $\ln(n-1) = \ln(n) + \ln\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1-r_n} = 1$, par encadrement, on a $\dfrac{1}{r_n} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc $r_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(n)}$.

e. Posons $u_n = H_n - \ln(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Pour $n \geqslant 2$, $u_n - u_{n-1} = H_n - H_{n-1} - \ln(n) + \ln(n-1)$ donc $u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{n} + \ln\Big(\dfrac{n-1}{n}\Big) = \dfrac{1}{n} + \ln\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} + O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 2} (u_n - u_{n-1})$ converge ce qui, par dualité suite-série, prouve la convergence (vers $\gamma \sim 0,577$) de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. Ainsi, $u_n \underset{+\infty}{=} \gamma + o(1)$ d'où $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = u_n + \ln(n) \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

3.11 **a.** Tout d'abord, comme le degré de P' est inférieur à celui de P, u va bien de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, la linéarité de la dérivation montrant bien que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Comme $\forall k \in [\![1;n]\!],\ u\Big(\dfrac{X^k}{k!}\Big) = \dfrac{X^{k-1}}{(k-1)!}$, si on prend la famille $\mathcal{B} = \Big(\dfrac{X^k}{k!}\Big)_{0\leqslant k\leqslant n}$, $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}_n[X]$ car elle contient $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ polynômes et qu'elle est libre puisque constituée de polynômes de degrés échelonnés. Par construction, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ vaut $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = (a_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $a_{i,j} = 1$ si $j = i+1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. A ne contient bien que des 0 et des 1.

b. Considérons l'endomorphisme $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} - u$ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P - P'$. D'après la question **a.**, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_{n+1} - A$ est une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale donc $\det(\varphi) = 1 \neq 0$ ce qui prouve que $\varphi \in GL(\mathbb{R}_n[X])$. Comme φ est bijective, $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \exists! P \in \mathbb{R}_n[X],\ P - P' = Q$.

On peut même facilement trouver φ^{-1}. Si $Q = \varphi(P) = P - P'$, en dérivant successivement, on a aussi les relations $P' - P'' = Q', \cdots, P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$. Or $P^{(n+1)} = 0$ car $\deg(P) \leqslant n$ donc on trouve $P = \varphi^{-1}(Q) = Q + Q' + \cdots + Q^{(n)}$ par télescopage.

c. <u>Méthode 1</u> : Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) \geqslant 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = P(x)e^{-x}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (P'(x) - P(x))e^{-x} = -Q(x)e^{-x} \leqslant 0$ donc f est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées, f est donc positive sur $\mathbb{R}$ d'où $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$.

Méthode 2 : on constate d'abord que P et Q ont même degré et même coefficient dominant. Si $Q = \lambda \geqslant 0$, alors $P = \lambda$ aussi et le résultat est vérifié. Sinon, $\deg(Q) \geqslant 1$ donc, comme Q reste positif sur $\mathbb{R}$, Q est de degré pair et $\lim_{x\to\pm\infty} Q(x) = +\infty$. Par conséquent, on a aussi $\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = +\infty$. S'il existait un réel x_0 tel que $P(x_0) < 0$, alors P admettrait un minimum sur $\mathbb{R}$ (classique). On pourrait donc définir $m = \underset{\mathbb{R}}{\mathrm{Min}}(P) = P(\alpha)$. Comme P est de classe C^∞, on aurait $P'(\alpha) = 0$. Ainsi $Q(\alpha) = P(\alpha) - P'(\alpha) = P(\alpha) \leqslant P(x_0) < 0$: NON !!! On en déduit encore que P reste positif sur $\mathbb{R}$.

Méthode 3 : La fonction P est solution sur $\mathbb{R}$ de $(E)\ :\ y - y' = Q$. Les solutions de l'équation homogène associée $(E_0)\ :\ y - y' = 0$ sont les $y : x \mapsto \lambda e^x$. Par variation de la constante, on trouve qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \alpha e^x - e^x \int_0^x Q(t)e^{-t}dt$ qui s'écrit aussi $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)e^{-x} = \alpha - \int_0^x Q(t)e^{-t}dt$. On a $\lim_{x\to+\infty} P(x)e^{-x} = 0$ par croissances comparées et $\int_0^{+\infty} Q(t)e^{-t}dt$ converge car $t \mapsto Q(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $Q(t)e^{-t} \underset{+\infty}{=} o(e^{-t/2})$ par exemple. Ainsi, en passant à la limite, $\alpha = \int_0^{+\infty} Q(t)e^{-t}dt$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = e^x \int_0^{+\infty} Q(t)e^{-t}dt - e^x \int_0^x Q(t)e^{-t}dt = e^x \int_x^{+\infty} Q(t)e^{-t}dt \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

d. Soit $d = \deg(P) \leqslant n$ et $\alpha_1 < \cdots < \alpha_d$ les $d \leqslant n$ racines réelles distinctes de P qu'on suppose scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Les valeurs $P'(\alpha_1), \cdots, P'(\alpha_d)$ sont non nulles car les α_k sont des racines simples de P. Les valeurs $P'(\alpha_1), \cdots, P'(\alpha_d)$ ont des signes alternés car P change de signe au passage de chaque α_k, il suffit de faire un dessin ! Comme $P - P' = Q$, on a $\forall k \in [\![1; d]\!],\ Q(\alpha_k) = -P'(\alpha_k)$ donc les valeurs $Q(\alpha_1), \cdots, Q(\alpha_d)$ sont de signes stricts alternés donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe des valeurs $\beta_1, \cdots, \beta_{d-1}$ telles que $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{d-1} < \beta_{d-1} < \alpha_d$ et $Q(\beta_1) = \cdots = Q(\beta_{d-1}) = 0$. Comme $Q = P - P'$, on a $\deg(Q) = \deg(P - P') = \deg(P)$ et P et Q ont les mêmes coefficients dominants. Traitons deux cas :

- Si $P'(\alpha_d) > 0$, P est positive localement à droite de α_d mais comme il n'y a pas de racine de P à droite de α_d, on a $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} Q(x) = +\infty$ aussi et, comme $Q(\alpha_d) < 0$, il existe encore par le théorème des valeurs intermédiaires un réel $\beta_d > \alpha_d$ tel que $Q(\beta_d) = 0$ ce qui fait bien d racines distinctes de Q et Q est aussi scindé à racines simples.

- Si $P'(\alpha_d) < 0$, P est négative localement à droite de α_d mais comme il n'y a pas de racine de P à droite de α_d, on a $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} Q(x) = -\infty$ aussi et, comme $Q(\alpha_d) > 0$, il existe encore par le théorème des valeurs intermédiaires un réel $\beta_d > \alpha_d$ tel que $Q(\beta_d) = 0$ ce qui fait bien d racines distinctes de Q et Q est aussi scindé à racines simples.

Dans les deux cas, si P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, alors Q l'est aussi.

3.12 **a.** Méthode 1 : supposons que la famille $(f_1,\cdots,f_n)$ est liée. Alors il existe $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\neq(0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f_i=0$. En notant L_i la ligne i de A_x, on a donc par construction $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i L_i=0$ ce qui rend les lignes de A_x liée, donc $\det(A_x)=0$. Par contraposée, si $\det(A_x)\neq 0$, alors $(f_1,\cdots,f_n)$ est libre dans E.

Méthode 2 : supposons $\det(A_x)\neq 0$ et soit $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f_i=0$. En évaluant en les $x_1,\cdots,x_n$, $\forall j\in[\![1;n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(x_j)=0$, ce qui se traduit par $A_x^T\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$. Or A_x est inversible par hypothèse, A_x^T l'est aussi, donc $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$. Ceci assure directement la liberté de $(f_1,\cdots,f_n)$ dans E.

b. Initialisation : si $n=1$, $f_1\in E$ telle que (f_1) est libre, alors $f_1\neq 0$ ce qui prouve l'existence d'un réel x_1 tel que $f_1(x_1)\neq 0$. Ainsi, en prenant $x=(x_1)\in\mathbb{R}$ et $A_x=(f_1(x_1))\in\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, on a bien $\det(A_x)=f_1(x_1)\neq 0$.

Hérédité : soit $n\geqslant 2$ tel que pour toute famille libre $(f_1,\cdots,f_{n-1})\in E^{n-1}$, il existe une famille de réels $x=(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$ telle que $\det(A'_x)\neq 0$ en notant $A'_x=\big(f_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}\in\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Soit maintenant $(f_1,\cdots,f_n)$ une famille libre de E, alors sa sous-famille $(f_1,\cdots,f_{n-1})$ est libre donc, par hypothèse de récurrence, il existe $x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^n$ tel qu'en notant $A'_{x'}=\big(f_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}\in\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, on ait $\det(A'_{x'})\neq 0$. Pour $x_n\in\mathbb{R}$ et $x=(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)$, on pose $A_x=\big(f_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'on développe par rapport à la dernière colonne pour avoir $\det(A_x)=\alpha_1 f_1(x_n)+\cdots+\alpha_n f_n(x_n)$ avec $\alpha_n=\det(A'_{x'})\neq 0$. Or la fonction $\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_n f_n$ est non nulle car $(f_1,\cdots,f_n)$ est libre et $\alpha_n\neq 0$ donc il existe une valeur $x_n\in\mathbb{R}$ telle que $\alpha_1 f_1(x_n)+\cdots+\alpha_n f_n(x_n)=\det(A_x)\neq 0$ ce qui clôt les débats.

Par principe de récurrence, si $n\in\mathbb{N}^*$ et $(f_1,\cdots,f_n)$ est une famille libre de fonctions de E, il existe un n-uplet de réels $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\det(A_x)\neq 0$ où $A_x=\big(f_i(x_j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3.13 **a.** Comme f est un endomorphisme de E, f^n en est aussi un pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, ainsi $\mathrm{Ker}(f^n)$ et $\mathrm{Im}\,(f^n)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

- En tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels, I (le cœur de f) est un sous-espace vectoriel de E.
- K est non vide car $K_0=\mathrm{Ker}(f^0)=\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E)=\{0_E\}$ est inclus dans K. Soit $(x,y)\in K^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. Par définition d'une réunion, il existe deux entiers m et n tels que $x\in K_m$ et $y\in K_n$. Sans perte de généralité, supposons que $m\leqslant n$. Alors $f^n(x)=f^{n-m}\circ f^m(x)=f^{n-m}((f^m(x))=f^{n-m}(0_E)=0_E$ donc $x\in K_n$. Comme K_n est un sous-espace vectoriel de E, on a $\lambda x+\mu y\in K_n\subset K$. Ainsi, K est stable par combinaison linéaire et non vide donc K est un sous-espace vectoriel de E.

b. Si $k\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathrm{Ker}(f^k)$, $f^k(x)=0_E$ donc $f^{k+1}(x)=f(f^k(x))=0_E$ d'où $x\in\mathrm{Ker}(f^{k+1})$. Si $y\in\mathrm{Im}\,(f^{k+1})$, il existe $x\in E$ tel que $y=f^{k+1}(x)=f^k(f(x))\in\mathrm{Im}\,(f^k)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f^k)\subset\mathrm{Ker}(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}\,(f^{k+1})\subset\mathrm{Im}\,(f^k)$. Ainsi, la suite $\big(\dim(\mathrm{Ker}(f^k))\big)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$ est croissante et majorée par $n=\dim(E)$ donc il existe forcément un entier $N\leqslant n$ tel que $\dim(\mathrm{Ker}(f^N))=\dim(\mathrm{Ker}(f^{N+1}))$ ce qui montre que $\mathrm{Ker}(f^N)=\mathrm{Ker}(f^{N+1})$ (inclusion et égalité des dimensions). En effet, si $\forall k\in[\![0;n]\!]$, $\dim(\mathrm{Ker}(f^{k+1}))>\dim(\mathrm{Ker}(f^k))$, on aurait facilement par récurrence $\forall k\in[\![0;n+1]\!]$, $\dim(\mathrm{Ker}(f^k))\geqslant k$ ce qui est impossible car $\dim(\mathrm{Ker}(f^n))\leqslant n$ car $\mathrm{Ker}(f^n)\subset E$.

S'il existe $k \geqslant 1$ tel que $\mathrm{Ker}(f^{N+k}) = \mathrm{Ker}(f^N)$, on a déjà $\mathrm{Ker}(f^{N+k}) \subset \mathrm{Ker}(f^{N+k+1})$ et si $x \in \mathrm{Ker}(f^{N+k+1})$, il vient $f^{N+k}(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f^{N+k}) = \mathrm{Ker}(f^N)$ donc $f^{N+1}(x) = 0_E$ et $x \in \mathrm{Ker}(f^{N+1}) = \mathrm{Ker}(f^N)$. Par double inclusion, on a donc $\mathrm{Ker}(f^{N+k}) = \mathrm{Ker}(f^N)$. Par principe de récurrence, $\forall k \geqslant 0,\ K_{N+k} = K_N$.

Montrons par double inclusion que $K = K_N$. Par définition d'une réunion, on a $\mathrm{Ker}(f^N) = K_N \subset K$.

Soit $x \in K$, par définition il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $x \in K_i$.

- Soit $i \leqslant N$ et alors $x \in K_i \subset K_N$ d'après la croissance des noyaux itérés et on a $x \in K_N$.
- Soit $i > N$ et alors $i = N + k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in K_{N+k} = K_N$ d'après ce qui précède.

On a bien établi que $K = K_N$.

c. Comme avant, et puisqu'avec la formule du rang on a $\mathrm{rang}\,(f^{N+k}) = \mathrm{rang}\,(f^N)$ pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{Im}\,(f^{N+k}) = \mathrm{Im}\,(f^N)$ par inclusion te égalité des dimensions. Comme en **b.**, on en déduit que $I = I_N$.

- Si $x \in K = K^N$, on a $f^N(x) = 0_E$ donc $f^{N+1}(x) = f^N(f(x)) = f^(f^N(x)) = f(0_E) = 0_E$ donc $f(x) \in K_N = K$ ce qui montre que K est stable par l'endomorphisme f.
- Si $y \in I = I_N$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^N(x)$ donc $f(y) = f^{N+1}(x) \in I_{N+1} = I_N = I$ donc I est aussi stable par l'endomorphisme f.

Soit $x \in I \cap K$, alors $f^N(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f^N(y)$ car $I = I_N$ et $K = K_N$. Ainsi, $f^N(x) = f^N(f^N(y)) = f^{2N}(y) = 0_E$ donc $y \in K_{2N} = K_N$ donc $x = f^N(y) = 0_E$. Ainsi, I et K sont en somme directe et, comme $\dim(I) + \dim(K) = \dim(\mathrm{Ker}(f^N)) + \mathrm{rang}\,(f^N) = n = \dim(E)$ par la formule du rang, on en déduit que $E = I \oplus K$: I et K sont supplémentaires dans E.

d. Comme I et K sont stables par f, on peut définir les deux endomorphismes induits f_I et f_K induits respectivement par f dans I et dans K.

<u>Pour f_I</u> : on a l'équivalence $x \in \mathrm{Ker}(f_I) \iff (x \in I \text{ et } f(x) = 0_E) \iff x \in I \cap \mathrm{Ker}(f)$ qui justifie l'égalité $\mathrm{Ker}(f_I) = I \cap \mathrm{Ker}(f)$. Or $\mathrm{Ker}(f) \subset K$ donc $\mathrm{Ker}(f_I) \subset I \cap K = \{0_E\}$ ce qui montre que $\mathrm{Ker}(f_I) = \{0_E\}$ et donc que f_I est injective. Soit $y \in I = I_N = I_{N+1}$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f^{N+1}(x) = f(f^N(x)) = f(z)$ avec $z = f^N(x) = I_N = I$. Ainsi, $y = f_I(z)$ et f_I est surjective. Par conséquent, f_I est un automorphisme de I.

<u>Pour f_N</u> : soit $x \in K$, comme $K = K_N = \mathrm{Ker}(f^N)$, on a $f_K^N(x) = f^N(x) = 0_E$ donc $f_K^N = 0$ et f_K est un endomorphisme de K qui est nilpotent d'indice inférieur ou égal à N.

3.14 **a.** Comme $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$, on peut écrire $P = a_1X + \cdots + a_pX^p$ de degré $p \geqslant 1$ tel que $a_1 = P'(0) \neq 0$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}\,(f)$, on a donc $f(x) = 0_E$ et $\exists y \in E,\ x = f(y)$. Ainsi $f^2(y) = 0_E$. Par hypothèse, $P(f) = a_1 f + \cdots + a_p f^p = 0$ qu'on applique en y pour avoir $0_E = a_1 f(y)$ puisque $\forall k \geqslant 2,\ f^k(y) = 0_E$. Ainsi, comme $a_1 \neq 0$, on a $f(y) = x = 0_E$. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont donc en somme directe. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \dim(E)$ par la formule du rang (voilà l'apport de la dimension finie), on conclut que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires dans E si E est de dimension finie.

b. Avec les mêmes notations et le même raisonnement, on sait déjà que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont en somme directe. Soit $x \in E$, alors $P(f)(x) = 0_E$ donc $a_1 f(x) + \cdots + a_p f^p(x) = f(a_1 x + a_2 f(x) + \cdots + a_p f^{p-1}(x)) = 0_E$ ce qui prouve que $a_1 x + a_2 f(x) + \cdots + a_p f^{p-1}(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme $a_1 \neq 0$, $y = x + \frac{a_2}{a_1} f(x) + \cdots + \frac{a_p}{a_1} f^{p-1}(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.

Mais $z = -\frac{a_2}{a_1}f(x) - \cdots - \frac{a_p}{a_1}f^{p-1}(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$ car $z = f\Big(-\frac{a_2}{a_1}x - \cdots - \frac{a_p}{a_1}f^{p-2}(x)\Big)$ et on a $x = y + z$. On vient d'établir que $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}\,(f)$.

Même en dimension infinie, avec les conditions de l'énoncé, $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires dans E.

3.15 **a.** Il est classique qu'une application lipschitzienne est continue (même uniformément pour les ex-MP2SI). Pour le prouver ici, soit $f \in E$ et $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant |f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0|$ et $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0| = 0$ donc, par encadrement $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ce qui montre la continuité de f en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. f est donc continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $E \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

De plus, $E \neq \emptyset$ car la fonction nulle est bien continue et 0-lipschitzienne donc $0 \in E$.

Soit $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors il existe $(k,k') \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$ et $|g(x) - g(y)| \leqslant k'|x - y|$. La fonction $\lambda f + g$ est d'abord continue sur $\mathbb{R}$ par linéarité de la continuité et, par inégalité triangulaire, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |(\lambda f+g)(x)-(\lambda f+g)(y)| = |\lambda f(x)-\lambda f(y)+g(x)-g(y)| \leqslant |\lambda|k|x-y|+k'|x-y|$ donc $\lambda f+g$ est aussi lipschitzienne associée à la constante $|\lambda|k+k'$. E est donc stable par combinaison linéaire. Tout ce qui précède fait de E un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc E est lui-même un espace vectoriel.

b. Définissons $\varphi : E \to \mathbb{R}$ par $\varphi(f) = f(0)$. Il est clair que φ est une forme linéaire sur E, et comme $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$ par définition, F est un sous-espace vectoriel de E, donc un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et enfin F est lui-même un espace vectoriel. On pouvait le faire de manière plus classique.

Comme φ est non nulle car $\cos \in E$ et $\varphi(\cos) = 1$ par exemple, F est un hyperplan de E donc on attend une droite comme supplémentaire de F. Posons $G = \mathrm{Vect}(1)$ le sous-espace vectoriel des fonctions constantes. Si $f \in F \cap G$, alors f est constante et nulle en 0 donc nulle sur $\mathbb{R}$ et $F \cap G = \{0\}$ donc F et G sont déjà en somme directe. De plus, pour $f \in E$, on peut écrire $f = f - f(0) + f(0)$ ($f(0)$ signifie ici la fonction constante valant toujours $f(0)$) et la fonction $g = f - f(0) \in F$ est toujours lipschitzienne (même constante que celle de f) et elle s'annule en 0 et $h = f(0) \in G$ de sorte que $E = F + G$. Ainsi, G est un supplémentaire de F.

c. Soit $f \in F$ et $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$. L'application g de l'énoncé est bien définie sur $\mathbb{R}$ en fonction de f et la linéarité de φ_t est claire. De plus, g est kt-lipschitzienne car $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |g(x) - g(y)| = |f(x) - f(y) - f(tx) + f(ty)| \leqslant |f(x) - f(y)| + |f(tx) - f(ty)| \leqslant k|x - y| + k|tx - ty|$ donc $|g(x) - g(y)| \leqslant (1+t)k|x - y|$. Comme $g(0) = f(0) - f(0) = 0$, il vient $g = \varphi_t(f) \in F$ donc φ_t est bien un endomorphisme de F.

Si $f \in \mathrm{Ker}(\varphi_t)$, on a $\varphi_t(f) = 0$ donc, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $\varphi_t(f)(x) = 0$ d'où $f(x) = f(tx) = f(t^2x) = \cdots$ ce qui donne par une récurrence simple : $\forall k \in \mathbb{N},\ f(t^kx) = f(x)$. Or $\lim\limits_{k \to +\infty} t^kx = 0$ et f est continue en 0 donc $\lim\limits_{k \to +\infty} f(t^kx) = f(0) = 0 = f(x)$ (suite constante). Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi_t) = \{0\}$ et φ_t est injective de F dans F.

d. Par télescopage, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} g(t^kx) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \big(f(t^kx) - f(t^{k+1}x)\big) = f(x) - f(t^nx)$. À nouveau, en faisant tendre n vers $+\infty$, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} f(t^nx) = f(0) = 0$, on obtient $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} g(t^kx)$.

Réciproquement, soit $g \in F$ et $k \in \mathbb{R}_+$ tel que g est k-lipschitzienne, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} g(t^nx)$ est absolument convergente car $|g(t^nx)| \leqslant kt^n|x|$ et que la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 0} kt^nx$ converge car $0 < t < 1$. Ainsi,

la fonction $f : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} g(t^n x)$ est bien définie, elle vérifie clairement $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - f(tx)$ par télescopage et car $\lim_{n\to+\infty} g(t^n x) = g(0) = 0$. De plus, on a $f(0) = 0$ car $g(0) = 0$ et, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il vient $|f(x) - f(y)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} g(t^n x) - \sum_{n=0}^{+\infty} g(t^n y) \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |g(t^n x) - g(t^n y)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} k t^n |x - y| = \frac{k}{1-t}|x - y|$ donc $f \in F$ car f est $\frac{k}{1-t}$-lipschitzienne et $g = \varphi_t(f)$. On en déduit que φ_t est aussi surjective de F dans F.
Par conséquent, φ_t est un automorphisme de F.
e. Si $f \in F$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_t^2(f)(x) = \varphi_t(x) - \varphi_t(tx) = f(x) - f(tx) - (f(tx) - f(t(tx))) = f(x) - 2f(tx) + f(t^2x)$ donc l'équation de l'énoncé se traduit par $\varphi_t^2(f) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = h$. Or $h \in F$ et, d'après la question **d.** et pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_t^{-1}(h)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(t^n x) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n x = \frac{x}{1-t}$ donc $\varphi_t^{-1}(h) = \frac{1}{1-t}h$. Comme φ_t est bijective, on a l'équivalence $\varphi_t^2(f) = h \iff f = \varphi^{-2}(h) = \varphi^{-1}(\varphi^{-1}(h)) = \frac{h}{(1-t)^2}$. Il existe une unique fonction dans F qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x$ et c'est la fonction $f = \frac{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}{(1-t)^2} : x \mapsto \frac{x}{(1-t)^2}$.