

DS 01 : INSPIRÉ DE E3A MP 1999-3

PSI1/2 2025/2026

samedi 06 septembre 2025

PARTIE 1 : AUTOUR DE $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$

1.1 Pour $\theta = 0$, la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge d'après le cours et, pour $\theta = \pi$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge

par le critère spécial des séries alternées car $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante et tend vers 0.

1.2 Convergence :

1.2.1 $C_n = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right)$ donc, comme $\theta \in]0; 2\pi[$ et $e^{i\theta} \neq 1$, on a $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=1}^n (e^{i\theta})^k = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}$ donc,

$$\text{avec l'angle moitié, } C_n = e^{i\theta} \frac{e^{\frac{in\theta}{2}} (-2i) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}} (-2i) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

On en déduit donc l'expression

$$C_n = \frac{\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ si } \theta \in]0; 2\pi[.$$

1.2.2 Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, |C_n| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ donc $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée car $\frac{\theta}{2} \in]0; \pi[$ donc $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$.

1.2.3 On en déduit que $\forall n \geq 1, \left| C_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ et comme la suite $\left(\frac{1}{n} \right)$ tend vers 0, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ converge par dualité suite-série donc, par théorème de comparaison,

$\sum_{n \geq 1} \left| C_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right|$ converge, ce qui signifie que $\sum_{n \geq 1} C_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ est absolument convergente.

1.2.4 Cette égalité peut se prouver par récurrence mais, pour $k \geq 1$, $\cos(k\theta) = C_k - C_{k-1}$ donc on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\theta)}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{C_k - C_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{C_{k-1}}{k} \text{ et, en posant } p = k - 1 \text{ dans la seconde somme,}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\theta)}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{k} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{C_p}{p+1}, \text{ donc } \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\theta)}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} C_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{C_n}{n}. \text{ car } C_0 = 0$$

D'après la question précédente, $\sum_{k \geq 1} C_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ converge et, avec $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ bornée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_n}{n} = 0$

donc $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$

1.3 Développement asymptotique classique :

$$\boxed{1.3.1} \quad g_n - g_{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \underset{+}{\sim} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{donc } g_n - g_{n+1} \underset{+}{\sim} \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ puis } \boxed{g_n - g_{n+1} \underset{+}{\sim} \frac{1}{2n^2}}.$$

$$\boxed{1.3.2} \quad g_n - g_{n+1} \underset{+}{\sim} \frac{1}{2n^2} \text{ (termes positifs) et } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge donc, par comparaison, la série } \sum_{n \geq 1} (g_n - g_{n+1})$$

converge, puis $\boxed{\text{la suite } (g_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge}}$ par dualité suite-série.

1.4 Calcul de la somme dans un cas alterné :

$$\boxed{1.4.1} \quad \text{On sépare les termes pairs et impairs dans } \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \text{ qui s'écrit aussi}$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \text{ donc } \boxed{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = H_n - H_{2n}}.$$

$$\boxed{1.4.2} \quad \text{La convergence de la série a été vue en 1.1 donc } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - H_{2n}).$$

Or $H_n - H_{2n} = (g_n + \ln(n)) - (g_{2n} + \ln(2n)) = g_n - g_{2n} - \ln(2)$ et comme $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers γ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (g_n - g_{2n}) = \gamma - \gamma = 0, \text{ ce qui donne } \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)}.$$

1.5 Un autre cas particulier :

$$\boxed{1.5.1} \quad \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = 1 \text{ si } n = 3k \text{ et } \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) = -\frac{1}{2} \text{ si } n = 3k+1 \text{ ou } n = 3k+2.$$

$$\boxed{1.5.2} \quad \text{On sépare cette fois la somme en trois, } \sum_{k=1}^{3n} \frac{\cos(k\theta)}{k} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{3p} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{-1/2}{3p+1} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{-1/2}{3p+2}, \text{ ce qui donne}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{3n} \frac{\cos(k\theta)}{k} = \frac{1}{3}H_n - \frac{1}{2} \left(\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{3p+1} + \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{3p+2} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{3p} \right) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{3p} = \frac{1}{2}(H_n - H_{3n}).}$$

$$\boxed{1.5.3} \quad \text{La convergence de la série a déjà été vue en 1.2.4 donc } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{3n} \frac{\cos(k\theta)}{k} \text{ et, comme}$$

$$\frac{1}{2}(H_n - H_{3n}) \underset{+}{\sim} \frac{\ln(n)}{2} + \frac{\gamma}{2} - \frac{\ln(3n)}{2} - \frac{\gamma}{2} + o(1) \underset{+}{\sim} -\frac{\ln(3)}{2} + o(1) \quad \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = -\frac{1}{2} \ln 3 \text{ pour } \theta = \frac{2\pi}{3}}.$$

1.6 Désordre :

$$\boxed{1.6.1} \quad \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k-2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{4}H_n - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \text{ et } H_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \text{ donc}$$

$$H_{2n} = \frac{1}{2}H_n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \text{ d'où } \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = H_{2n} - \frac{1}{2}H_n \text{ et } \boxed{\sum_{k=1}^n b_k = \frac{1}{2}(H_n - H_{2n})}.$$

$$\boxed{1.6.2} \quad \text{On a déjà vu à la question 1.4 que } \lim_{n \rightarrow +\infty} H_n - H_{2n} = -\ln(2). \text{ Ainsi, } \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = -\frac{\ln(2)}{2}}. \text{ On somme}$$

$$\text{les mêmes termes que dans la série harmonique alternée mais } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = -\frac{\ln(2)}{2} \neq -\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

1.7 Non convergence absolue :

1.7.1 On a $\left| \frac{\cos^2(n\theta)}{n} \right| \leq \frac{|\cos(n\theta)|}{n}$ car $|\cos(n\theta)| \leq 1$ donc, par comparaison des séries à termes positifs, si

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} \text{ est absolument convergente alors } \sum_{n \geq 1} \frac{\cos^2(n\theta)}{n} \text{ est aussi absolument convergente.}$$

1.7.2 On a $\frac{\cos^2(n\theta)}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{\cos(2n\theta)}{n} \right)$ donc $\frac{1}{n} = \frac{2\cos^2(n\theta)}{n} - \frac{2\cos(2n\theta)}{2n}$ donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ serait la somme de deux séries absolument convergente donc serait convergente. En effet, $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{\cos(2n\theta)}{2n} \right|$ serait elle aussi convergente car la somme partielle vérifie $\sum_{k=1}^n \left| \frac{\cos(2k\theta)}{2k} \right| \leq \sum_{k=1}^{2n} \left| \frac{\cos(k\theta)}{k} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos(k\theta)}{k} \right|$ et est donc majorée alors que la série $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{\cos(2n\theta)}{2n} \right|$ est à termes positifs. Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente d'après le cours,

on en déduit que $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ n'est pas absolument convergente.

PARTIE 2 : ÉTUDE DE $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$

2.1 Expression du reste

2.1.1 La suite $\left(\frac{(-1)^p}{p} \right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est alternée, et $\left(\frac{1}{p} \right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0. Ainsi, par le critère

spécial des séries alternées, la série $\sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p}{p}$ est convergente.

2.1.2 Comme $t \neq -1$, on a $\sum_{k=n}^{N-1} (-1)^{k+1} t^k = (-1)^{n+1} t^n \sum_{k=n}^{N-1} (-1)^{k+1-(n+1)} t^{k-n} = (-1)^{n+1} t^n \sum_{h=0}^{N-n-1} (-t)^h$

en posant $h = k - n$ et on a donc $\sum_{k=n}^{N-1} (-1)^{k+1} t^k = (-1)^{n+1} t^n \frac{1 - (-t)^{N-n}}{1 - (-t)} = \frac{(-1)^{n+1} t^n - (-1)^{N+1} t^N}{1 + t}$.

2.1.3 $\int_0^1 t^k dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$ et pour $t \in [0; 1]$, $0 \leq \frac{t^k}{1+t} \leq t^k$ donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^k}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}. \text{ On a } R_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{N-1} (-1)^{k+1} \int_0^1 t^k dt.$$

D'après la question précédente, on a $\sum_{k=n}^{N-1} (-1)^{k+1} \int_0^1 t^k dt = \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^n - (-1)^{N+1} t^N}{1+t} dt$ par linéarité de

l'intégrale et $\sum_{k=n}^{N-1} (-1)^{k+1} \int_0^1 t^k dt = \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^n}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{(-1)^N t^N}{1+t} dt$. De plus, par inégalité triangulaire,

il vient $\left| \int_0^1 \frac{(-1)^N t^N}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^N}{1+t} dt \leq \frac{1}{N+1}$. Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1} = 0$, par encadrement, on obtient

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^n - (-1)^{N+1} t^N}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^n}{1+t} dt \text{ et } R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$$

2.2 Nature d'une série

2.2.1 Les fonctions $t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sont de classe C^1 sur $[0; 1]$ donc, par intégration par parties,

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{1+t} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{-1}{(1+t)^2} dt \text{ et } 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} dt \text{ car}$$

$$\frac{1}{(1+t)^2} \leq 1 \text{ si } t \in [0; 1] \text{ donc } 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{(1+t)^2} dt \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et on en déduit bien,}$$

avec les valeurs $k = \frac{1}{2}$ et $\beta = 1$, que

$$R_{n+\infty} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2.2.2 $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ converge par critère spécial des séries alternées et la série de RIEMANN $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge

donc, par comparaison et somme,

$$\sum_{n \geq 0} R_n \text{ converge.}$$

2.3 Si $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^N R_n = \sum_{n=0}^N (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = - \int_0^1 \frac{1}{1+x} \sum_{n=0}^N (-x)^n dx$ par linéarité de l'intégrale donc

$$\sum_{n=0}^N R_n = - \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{(1+x)^2} dx \text{ et comme } 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{(1+x)^2} dx \leq \int_0^1 x^{N+1} dx = \frac{1}{N+2} \text{ et}$$

que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+2} = 0$, par encadrement, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \int_0^1 \frac{-1}{(1+x)^2} dx = \left[\frac{1}{1+x} \right]_0^1 = -\frac{1}{2}.$$

PARTIE 3 : ÉTUDE DE $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$

3.1 Un équivalent :

3.1.1 On a $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{2\sqrt{n(n+1)} - (2n+1)}{\sqrt{n+1}}$. Puis, par développements limités,

$$\text{on a } 2\sqrt{n(n+1)} - (2n+1) = n \left[2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{1/2} - 2 - \frac{1}{n} \right]_{+\infty} = n \left[2 \left(1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - 2 - \frac{1}{n} \right]_{+\infty} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme $\sqrt{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}$, on a $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$ est absolument

convergente donc convergente par RIEMANN et, par dualité suite-série,

la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

3.1.2 La série $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^{5/2}}$ converge par le critère de RIEMANN car $\frac{5}{2} > 1$ donc son reste $\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p^{5/2}}$ existe.

La fonction $h : t \mapsto t^{-5/2}$ est continue et décroissante sur $[1; +\infty[$ donc, pour $n \geq 2$ et tout $p \geq n$, on a

$$\int_p^{p+1} h(t) dt \leq h(p) \leq \int_{p-1}^p h(t) dt. \text{ Ainsi, } \int_n^{N+1} \frac{dt}{t^{5/2}} \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{p^{5/2}} \leq \int_{n-1}^N \frac{dt}{t^{5/2}} \text{ par CHASLES en sommant}$$

$k \in \llbracket n; N \rrbracket$ si $N \geq n$. Or $\int_n^{N+1} \frac{dt}{t^{5/2}} = \left[-\frac{2}{3t^{3/2}} \right]_n^{N+1}$. On passe à la limite quand N tend vers $+\infty$ dans

l'encadrement précédent et $\frac{2}{3n^{3/2}} \leq \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p^{5/2}} \leq \frac{2}{3(n-1)^{3/2}}$. Par encadrement,

$$\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p^{5/2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3n^{3/2}}.$$

3.2 Un développement asymptotique

3.2.1 Les fonctions $t \mapsto (k+1-t)(t-k)$ et $t \mapsto \frac{-2}{3t^{3/2}}$ sont de classe C^1 sur le segment $[k; k+1]$ donc

$$\int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)(t-k)}{t^{5/2}} dt = \left[\frac{-2(k+1-t)(t-k)}{3t^{3/2}} \right]_k^{k+1} + \frac{2}{3} \int_k^{k+1} \frac{2k+1-2t}{t^{3/2}} dt = \frac{2}{3} \int_k^{k+1} \frac{2k+1-2t}{t^{3/2}} dt$$

par intégration par parties. Les fonctions $t \mapsto 2k+1-2t$ et $t \mapsto -\frac{2}{\sqrt{t}}$ sont C^1 sur $[k; k+1]$ et, comme avant,

$$\int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)(t-k)}{t^{5/2}} dt = \left[\frac{4(2k+1-2t)}{3\sqrt{t}} \right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \frac{8dt}{3\sqrt{t}} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - 4(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \right).$$

3.2.2 $v_{k+1} - v_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - 2\sqrt{k+1} + 2\sqrt{k}$ donc la question précédente nous donne, par inégalité triangulaire,

$$\left| v_{k+1} - v_k - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right| = \left| \frac{3}{8} \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)(t-k)}{t^{5/2}} dt \right| \leq \frac{3}{8k^2\sqrt{k}} \quad (\text{donc } C = \frac{3}{8}) \quad \text{car on majore}$$

$$|(k+1-t)(t-k)| \leq 1 \text{ et } \frac{1}{t^{5/2}} \leq \frac{1}{k^{5/2}} \text{ si } t \in [k; k+1].$$

3.2.3 La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge (vers L) donc, par dualité suite-série, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (v_{n+1} - v_n)$ converge aussi

et, par télescopage, on a $\sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = L - v_n$ en passant à la limite quand N tend vers $+\infty$ dans la relation

$$\sum_{k=n}^N (v_{k+1} - v_k) = v_{N+1} - v_n. \text{ De même, } \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \text{ converge et } \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On a donc $\left| L - v_n + \frac{1}{2\sqrt{n}} \right| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \left(v_{k+1} - v_k - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right) \right|$ donc, par inégalité triangulaire, on

$$\text{obtient } \left| L - v_n + \frac{1}{2\sqrt{n}} \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \left| v_{k+1} - v_k - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right| \leq \frac{3}{8} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^{5/2}} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

$$\text{On en déduit que } u_n = 2\sqrt{n} + L + \frac{1}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \quad (\alpha = 2, \beta = L \text{ et } \delta = \frac{1}{2}).$$

3.3 Nature d'une série

3.3.1 $\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0 donc $\sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ converge par le critère spécial des séries

alternées. Ainsi, $S = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ existe. De plus, S est du signe de son premier terme, donc $S \leq 0$.

3.3.2 $r_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = S - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ en séparant les termes d'indices

pairs et impairs. Ainsi, $r_{2n} = S - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k}} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k}} \right)$ donc $r_{2n} = S - \sqrt{2}u_n + u_{2n}$.

3.3.3 $r_{2n} = S - \sqrt{2} \left(2\sqrt{n} + L + \frac{1}{2\sqrt{n}} \right) + \left(2\sqrt{2n} + L + \frac{1}{2\sqrt{2n}} \right) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ d'après la question **3.2.3** donc

$$\text{on arrive à } r_{2n} = S + (1 - \sqrt{2})L - \frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \quad (\text{donc } a = S + (1 - \sqrt{2})L \text{ et } b = -\frac{1}{2\sqrt{2}}).$$

3.3.4 r_{2n} est le reste d'ordre $2n$ d'une série convergente donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{2n} = 0$, d'où $S = (\sqrt{2} - 1)L$. De

plus, $r_{2n} = -\frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ puis $r_{2n+1} = r_{2n} + \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} = \frac{1}{2\sqrt{2n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ ce qui donne

$r_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ donc, comme $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}}$ converge par le critère spécial des séries alternées

comme ci-dessus et que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge, par comparaison et somme, $\sum_{n \geq 0} r_n$ converge.

PARTIE 4 : ÉTUDE DE $t_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p)$

4.1 On peut prendre $f : t \mapsto e^{-t}$, ou $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ et, plus généralement, $f : t \mapsto \frac{1}{t^x}$ avec $x > 0$.

4.2 La suite $((-1)^p f(p))_{p \in \mathbb{N}}$ est alternée, et $(f(p))_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 par hypothèse. Ainsi, par le

théorème spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n f(n)$ converge, donc son reste t_n d'ordre n existe.

4.3 Pour $n \in \mathbb{N}$, par linéarité, on a $\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p [f(p) - f(p+1)] = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) - \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p+1)$ car les

deux séries sont convergentes. On pose le changement d'indice $k = p + 1$ dans la seconde série de sorte que

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p [f(p) - f(p+1)] = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) - \sum_{k=n+2}^{+\infty} (-1)^{k+1} f(k) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p) + \sum_{p=n+2}^{+\infty} (-1)^p f(p)$$

donc $\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p [f(p) - f(p+1)] = 2t_n - (-1)^{n+1} f(n+1).$

On a donc $t_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} f(n+1) + \frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p [f(p) - f(p+1)]$. On commence par vérifier que la fonction

$g : x \mapsto f(x) - f(x+1)$ est positive (car f décroît), tend vers 0 en $+\infty$ (car f le fait aussi) et décroît, car $g'(x) = f'(x) - f'(x+1)$ donc, par croissance de f' , $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) \leq 0$. Ainsi, $\sum_{n \geq 0} (-1)^n [f(n) - f(n+1)]$

vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées et que son reste d'ordre n vérifie la majoration

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p [f(p) - f(p+1)] \right| \leq [f(n+1) - f(n+2)] \text{ par ce critère.}$$

On a donc $t_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} f(n+1) + O(f(n+1) - f(n+2))$. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{2} f(n+1)$ converge par

le critère spécial des séries alternées et $\sum_{n \geq 0} (f(n+1) - f(n+2))$ est absolument convergente par dualité

suite-série car $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$. Par comparaison et somme, on en déduit que $\sum_{n \geq 0} t_n$ converge.

4.4 Comme $f(n+1) \sim_{+\infty} f(n+2)$, on a $f(n+1) - f(n+2) = o(f(n+1))$. La question précédente donne donc

$$t_n = \frac{(-1)^{n+1} f(n+1)}{2} + o(f(n+1)) \text{ donc } t_n \sim_{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} f(n+1)}{2} \text{ et } t_n \sim_{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} f(n)}{2}.$$

DS 01 : RÉVISIONS

PSI1 2025/2026

samedi 06 septembre 2025

PARTIE 1 : ALGÈBRE GÉNÉRALE

1.1 Calculons : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = \frac{u_1^2}{u_0} = 4$, $u_3 = \frac{u_2^2}{u_1} = 8$. Il semble que $u_n = 2^n$. On a déjà montré que

$\forall n \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, $u_n = 2^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 2^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}$, alors $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n} = \frac{2^{2n+2}}{2^n} = 2^{n+2}$.

Par principe de récurrence (forte ici), on a donc établi que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n.$$

1.2 (E) est polynomiale de degré 2 et son discriminant vaut $\Delta = 25 - 4(7 + i) = -3 - 4i = 1 - 4i - 4 = (1 - 2i)^2$

donc les solutions de (E) sont les deux complexes $z_1 = \frac{5 + 1 - 2i}{2} = 3 - i$ et $z_2 = \frac{5 - 1 + 2i}{2} = 2 + i$.

1.3 Pour $(x, y, z, x', y', z', \lambda) \in \mathbb{R}^7$, en posant $v = (x, y, z)$ et $v' = (x', y', z')$, on a :

$f(v + \lambda v') = f(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') = ((y + \lambda y') - (z + \lambda z'), (z + \lambda z') - (x + \lambda x'), (x + \lambda x') - (y + \lambda y'))$ donc

$f(v + \lambda v') = (y - z, z - x, x - y) + \lambda(y' - z', z' - x', x' - y') = f(v) + \lambda f(v') : f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3.$

$f(x, y, z) = 0 \iff x = y = z \iff v = x(1, 1, 1)$. De plus, d'après le cours, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ or $f(e_3) = -f(e_2) - f(e_2)$ puisque $v_1 \in \text{Ker}(f)$ donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2))$. Par conséquent :

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(v_1) \text{ avec } v_1 = (1, 1, 1) \text{ et } \text{Im}(f) = \text{vect}(v_2, v_3) \text{ avec } v_2 = (0, -1, 1) \text{ et } v_3 = (1, 0, -1).$$

1.4 On a $A = I_3 + 2N$, or $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = 0$ donc, comme I_3 et N commutent, $A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k N^k$

avec le binôme : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = I_3 + 2nN + 2n(n-1)N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $N^3 = 0$, on a

$(I_3 + 2N)(I_3 - 2N + 4N^2) = I_3 + 8N^3 = I_3$ donc $A \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ et

$$A^{-1} = I_3 - 2N + 4N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

PARTIE 2 : ANALYSE

2.1 Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{(k+1) - k}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$. De même $\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$. Or,

clairement, $\sqrt{k+1} + \sqrt{k} > 2\sqrt{k} > \sqrt{k} + \sqrt{k-1}$ donc $\boxed{\forall k \geq 1, \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}.}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{(n+1)^2} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < u_n = \sum_{k=1}^{(n+1)^2} \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{(n+1)^2} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$, on en déduit par télescopage que $\sqrt{(n+1)^2 + 1} - 1 < u_n < n+1$. Or $\sqrt{(n+1)^2 + 1} - 1 > n$ car $(n+1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Par conséquent $n < u_n < n+1$ ce qui prouve que $\boxed{[u_n] = n.}$

2.2 g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux et $\forall y > 0$, $g'(y) = \frac{1}{(1+y)^2} - \frac{1}{1+y} = -\frac{y}{(1+y)^2} < 0$ donc

$\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle } \mathbb{R}_+^*}.$ Comme $\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) = 0$, $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}_+^*, g(y) < 0.}$

On calcule $f'(x) = -e^{-x} \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} = e^{-x} g(e^x)$. Comme $e^x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$

donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.}$ Enfin $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x} + e^{-x} \ln(1+e^x)) = 0$ par croissances comparées.

D'après le théorème du même nom, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]0; 1[.}$

2.3 La fonction $\tan$ est strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et $\tan(0) = 0$ alors que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ donc $\tan$

réalise une bijection de $]0; \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}_+^*$ d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists ! \theta \in]0; \frac{\pi}{2}[, x = \tan(\theta)}$ et $\theta = \text{Arctan}(x)$.

Si $x > 0$, il vient $f(x) = f(\tan \theta) = \text{Arctan} \left(\frac{\sqrt{1 + (\tan \theta)^2} - 1}{\tan \theta} \right) = \text{Arctan} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)$ car $\cos \theta > 0$ et

$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$. Or $1 - \cos \theta = 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$ et $\sin \theta = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$ donc $f(x) = \text{Arctan} \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) = \frac{\theta}{2}$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{\text{Arctan}(x)}{2}.}$ Comme f et Arctan sont impaires : $\boxed{\forall x < 0, f(x) = \frac{\text{Arctan}(x)}{2}.}$

2.4 Soit $u : x \mapsto \ln(1+x)$ et $v : x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ de classe C^1 sur le segment $[0; 1]$; on peut intégrer par parties :

$$\boxed{\int_0^1 x \ln(1+x) dx = \int_0^1 u(x)v'(x) dx = \left[\frac{1}{2}(x^2 - 1) \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{2(1+x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{4}.}$$