

DS 01 : INSPIRÉ DE E3A MP 1999-3

PSI1/2 2025/2026

samedi 06 septembre 2025

L'usage des calculatrices est interdit.

Le sujet se compose d'un problème sur les séries dont les différentes parties sont indépendantes entre elles.

PARTIE 1 : AUTOUR DE $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$

Dans cette partie, θ désigne un réel fixé de $]0; 2\pi[$.

1.1 Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$?

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, le réel $C_n = \sum_{k=1}^n \cos(k\theta)$ (avec pour convention $C_0 = 0$).

1.2 Convergence : dans cette question, on suppose que $\theta \in]0; 2\pi[$.

1.2.1 Déterminer, pour $n \geq 1$, une expression de C_n n'utilisant pas le symbole $\sum$.

1.2.2 En déduire que la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

1.2.3 Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} C_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ est absolument convergente.

1.2.4 Prouver, pour $n \geq 1$, l'égalité $\sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\theta)}{k} = \frac{C_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} C_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ et en déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ pour $\theta \in]0; 2\pi[$.

1.3 Développement asymptotique classique : pour tout $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $g_n = H_n - \ln(n)$.

1.3.1 Déterminer un équivalent de $g_n - g_{n+1}$.

1.3.2 En déduire que la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel γ (que vous ne cherchiez pas à déterminer).

On a donc $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

1.4 Calcul de la somme dans un cas alterné : dans cette question, on suppose que $\theta = \pi$

1.4.1 Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$ en fonction de H_n et H_{2n} .

1.4.2 En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

1.5 Un autre cas particulier : dans cette question, on suppose que $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

1.5.1 Préciser la valeur de $\cos(n\theta)$ dans les trois cas $n = 3k$, $n = 3k + 1$ et $n = 3k + 2$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1.5.2 En déduire une expression de $\sum_{k=1}^{3n} \frac{\cos(k\theta)}{k}$ en fonction de certains termes de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$.

1.5.3 Déterminer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$.

1.6 Désordre : dans cette question, on souhaite sommer les termes de la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \geq 1}$ dans un autre ordre. Pour cela, on pose, pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $b_n = a_{4n} + a_{4n-2} + a_{2n-1}$.

1.6.1 Montrer que $\sum_{k=1}^n b_k = \frac{H_n - H_{2n}}{2}$.

1.6.2 En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ et comparer cette valeur à celle obtenue à la question **1.4.2**.

1.7 Non convergence absolue : on souhaite démontrer par l'absurde que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ n'est pas absolument convergente. On fixe $\theta \in [0; 2\pi[$ et on suppose que $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ converge absolument.

1.7.1 Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos^2(n\theta)}{n}$ est elle aussi absolument convergente.

1.7.2 Conclure en linéarisant $\cos^2(x)$.

PARTIE 2 : ÉTUDE DE $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$

2.1 Expression du reste

2.1.1 Justifier que la série $\sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p}{p}$ est convergente.

2.1.2 Soient $n \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq n+1$ et $t \in [0; 1]$, calculer $\sum_{k=n}^{N-1} (-1)^{k+1} t^k$.

2.1.3 Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^1 t^k dt$ et justifier que $0 \leq \int_0^1 \frac{t^k}{1+t} dt \leq \frac{1}{k+1}$, puis en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

2.2 Nature d'une série

2.2.1 Par intégration par parties, montrer que : $\exists \beta \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{R}^*, R_n \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1} k}{n^\beta} + O\left(\frac{1}{n^{\beta+1}}\right)$.

2.2.2 En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} R_n$.

2.3 Exprimer $\sum_{n=0}^N R_n$ à l'aide d'une intégrale et déterminer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

PARTIE 3 : ÉTUDE DE $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$

3.1 Un équivalent : on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}}$ et $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$.

3.1.1 En s'intéressant à une série, montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Dans la suite, on notera L le réel défini par $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

3.1.2 Justifier l'existence de $\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p^{5/2}}$ et démontrer que $\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p^{5/2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3n^{3/2}}$.

3.2 Un développement asymptotique

3.2.1 À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)(t-k)}{t^{5/2}} dt = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) - \frac{8}{3} (2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}).$$

3.2.2 En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $k \geq 1$, on ait

$$\left| v_{k+1} - v_k - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right| \leq \frac{C}{k^{5/2}}.$$

3.2.3 En considérant $\sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k)$, dont vous justifierez l'existence, montrer qu'il existe

$$\exists(\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}^3, u_n \underset{+\infty}{=} \alpha\sqrt{n} + \beta + \frac{\delta}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

3.3 Nature d'une série

3.3.1 Montrer qu'il existe un réel S tel que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} = S$.

3.3.2 Exprimer r_{2n} en fonction de S et des sommes partielles u_n et u_{2n} .

3.3.3 En déduire qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera, tels que

$$r_{2n} \underset{+\infty}{=} a + \frac{b}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

3.3.4 Exprimer S en fonction de L et déterminer la nature de la série de terme général r_n .

PARTIE 4 : ÉTUDE DE $t_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p)$

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, décroissante, tendant vers 0 en $+\infty$ et telle que f' soit croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p)$.

4.1 Donner un exemple d'une telle fonction f .

4.2 Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, t_n existe.

4.3 Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2t_n - (-1)^{n+1} f(n+1) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p [f(p) - f(p+1)],$$

et en déduire que la série $\sum_{n \geq 0} t_n$ est convergente.

4.4 On suppose dans cette question que $f(p)$ et $f(p+1)$ sont équivalents quand p tend vers $+\infty$. Déterminer un équivalent de t_n quand n tend vers $+\infty$.

DS 01 : RÉVISIONS

PSI1 2025/2026

samedi 06 septembre 2025

PARTIE 1 : ALGÈBRE GÉNÉRALE ET LINÉAIRE

- 1.1** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n}$ pour tout entier naturel n . Calculer les valeurs de u_2 , u_3 , u_4 . Conjecturer sur l'expression de u_n en fonction de n . Montrer cette conjecture.
- 1.2** Résoudre l'équation suivante à inconnue complexe (E) : $z^2 - 5z + 7 + i = 0$.
- 1.3** Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Trouver trois vecteurs v_1 , v_2 et v_3 tels que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(v_1)$ et $\text{Im}(f) = \text{Vect}(v_2, v_3)$.
- 1.4** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer N^2 , N^3 . Trouver un lien entre A et N et en déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Déterminer aussi l'inverse de A . Indication : on peut utiliser N .

PARTIE 2 : ANALYSE

- 2.1** Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déduire de ce qui précède un encadrement de $u_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Déterminer alors $\lfloor u_n \rfloor$.
- 2.2** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$.
Montrer que $g : y \mapsto \frac{y}{1+y} - \ln(1+y)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Quel est son signe ?
 f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. En déduire la monotonie de f .
Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.
- 2.3** On définit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \text{Arctan} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \right)$. Justifier que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel que $x = \tan(\theta)$. En déduire alors (sans dériver) que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{\text{Arctan}(x)}{2}$.
Que vaut donc $f(x)$ en fonction de $\text{Arctan}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_-^*$?
- 2.4** Calculer $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$ en utilisant une intégration par parties (on aura intérêt à prendre pour primitive de $x \mapsto x$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + a)$ pour une constante a bien choisie).