

DEVOIR 04 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2025-2026

mardi 23 septembre 2025

QCM

1 Trigonométrie des rotations et symétries : soit $x \in \mathbb{R}$

1.1 $x \neq 0 \left[\frac{\pi}{2} \right] \implies \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{\tan x}$ **1.3** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

1.2 $\sin(\pi + x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ **1.4** $\cos(\pi + x) = \cos x$

2 Existence et unicité d'endomorphisme : soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$

2.1 $\exists f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3), f(e_1) = e_2, f(e_3) = -2e_3$ **2.3** $\exists f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3), f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3 - e_2, f(e_1 + e_2) = 2e_3$

2.2 $\exists! f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3), f(e_1) = e_2, f(e_3) = -2e_3$ **2.4** $\exists! f \in \text{GL}(\mathbb{R}^3), f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3, f(e_3) = e_1$

3 Rang : soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives n et p et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

3.1 $(f \text{ injective}) \iff (f \text{ isomorphisme})$ **3.3** $(f \text{ surjective}) \iff (\text{rg}(f) = p)$

3.2 $n > p \implies (f \text{ non surjective})$ **3.4** $(f \text{ injective}) \implies p > n$

4 Rang : soit E un espace de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$

4.1 $\text{rg}(u + v) \leq \text{Max}(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$ **4.3** $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg}(u)$ et $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u) \iff v \in \text{GL}(E)$

4.2 $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$ **4.4** $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg}(v)$ et $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v) \iff u \in \text{GL}(E)$

Énoncé

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension finie. Caractériser (on veut une condition nécessaire et suffisante) les hyperplans de E avec les formes linéaires sur E . Dans cette caractérisation, y-a-t-il unicité (préciser) ?

Preuve

Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \rightarrow F$ linéaire et $g : F \rightarrow G$ linéaire.

a. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$.

b. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 et A^3 . Trouver des réels α et β tels que $A^3 = \alpha A + \beta A^2$.

b. Montrer que $\forall n \geq 1, A^n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{6} A^2 + \frac{2^n - 4(-1)^n}{6} A$.

Exercice 2

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + I_2 = 0$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à

M . Soit $x \in \mathbb{R}^2$ non nul, montrer que $(x, u(x))$ est libre. En déduire que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1		X	X		
2	X			X	
3			X		
4		X		X	

1.1 Faux : c'est $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x}$ **1.2** Vrai : $\sin(\pi + x) = -\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ **1.3** Vrai : faire un

dessin **1.4** Faux : $\cos(\pi + x) = -\cos x$.

2.1 Vrai : il suffit de prendre l'unique $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ qui vérifie ces conditions et en plus $f(e_2) = e_1$ **2.2**

Faux : l'image de $f(e_2)$ peut être quelconque **2.3** Faux : si f existait, pas linéarité, on aurait la relation $f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = e_2 + (e_3 - e_2) = e_3 \neq 2e_3$ **2.4** Vrai : car (e_1, e_2, e_3) et (e_2, e_3, e_1) bases de $\mathbb{R}^3$.

3.1 Faux : si $n \neq p$ on ne peut rien dire **3.2** Faux : $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x, y)$ est surjective

3.3 Vrai : f surjective donc $\text{Im}(f) = F$ et $\text{rg}(f) = p$ **3.4** Faux : on peut avoir $n = p$ si f est bijective.

4.1 Faux : si p projecteur de rang 2 dans $\mathbb{R}^3$, $q = \text{id} - p$ est de rang 1 et $p + q$ est de rang 3 **4.2** Vrai : car $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$ et $\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G)$ avec GRASSMANN **4.3** Faux : l'inégalité

est vraie mais pas l'équivalence : $u = v = p$ projecteur différent de id_E **4.4** Vrai : l'inégalité est vraie car $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im}(v)$ et composer par des isomorphismes (ici auto.) ne modifie pas le rang.

Énoncé Soit E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension finie et H un sous-espace de E :

(H est un hyperplan de E) $\iff (\exists \varphi \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle, $H = \text{Ker}(\varphi)$).

Si H est un hyperplan et φ, ψ deux formes linéaires sur E telles que $H = \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$, alors φ et ψ sont proportionnelles ($\exists \alpha \neq 0$, $\varphi = \alpha\psi$) mais pas forcément égales (si $\alpha \neq 1$). Il n'y a donc pas unicité.

Preuve **a.** Soit $z \in \text{Im}(g \circ f)$, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$ donc $z \in \text{Im}(g)$ car $y = f(x) \in F$.

Ainsi, $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ d'où, en passant aux dimensions, $\dim(\text{Im}(g \circ f)) = \text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g) = \dim(\text{Im}(g))$.

b. Soit $x \in \text{Ker}(f)$, $f(x) = 0_F$ donc, par linéarité de g , $g \circ f(x) = g(0_F) = 0_G$ d'où $x \in \text{Ker}(g \circ f)$. Ainsi, $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$, $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f) \leq \dim(E) - \text{rg}(g \circ f) = \dim(\text{Ker}(g \circ f))$ d'où $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$.

Exercice 1 **a.** On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que $A^3 = A^2 + 2A$.

a. Initialisation : pour $n = 1$, $\frac{2^n + 2(-1)^n}{6} = \frac{2-2}{6} = 0$ et $\frac{2^n - 4(-1)^n}{6} = \frac{2+4}{6} = 1$ et $A = 0.A^2 + 1.A$.

Hérédité : si $n \geq 2$ et $A^{n-1} = \frac{2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{6}A^2 + \frac{2^{n-1} - 4(-1)^{n-1}}{6}A = \frac{2^n - 2(-1)^n}{12}A^2 + \frac{2^n + 8(-1)^n}{12}A$.

Alors, $A^n = A^{n-1} \times A = \frac{2^n - 4(-1)^n}{12}A^3 + \frac{2^n + 8(-1)^n}{12}A^2 = \frac{2^n - 4(-1)^n}{12}(A^2 + 2A) + \frac{2^n + 8(-1)^n}{12}A^2$.

Comme $\frac{2^n - 4(-1)^n}{12} + \frac{2^n + 8(-1)^n}{12} = \frac{2^n + 2(-1)^n}{6}$, on a bien $A^n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{6}A^2 + \frac{2^n - 4(-1)^n}{6}A$.

Par principe de récurrence, la formule de l'énoncé est valable pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

On aurait pu dire que le polynôme $P = X^3 - X^2 - 2X = X(X+1)(X-2)$ est annulateur de A et effectuer la division euclidienne de X^n par P pour trouver plus naturellement ces puissances de A .

Exercice 2 $u^2 = -\text{id}_E$ car $M^2 = -I_2$ avec $E = \mathbb{R}^2$. Soit $x \neq 0_E$, si $(x, u(x))$ était liée, on aurait $u(x) = \lambda x$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (car $x \neq 0_E$). Ainsi, $u^2(x) = \lambda^2 x = -x$ donc $\lambda^2 = -1$: absurde. Ainsi, $(x, u(x))$ est libre.

Prenons donc $e_1 \neq 0_E$, puis $e_2 = u(e_1)$. Ce qui précède montre que $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est libre donc que $\mathcal{B}$ est une

base de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2. De plus, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ car $u(e_2) = u^2(e_1) = -e_1$. Et en notant P

la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à cette base $\mathcal{B}$, $M = PAP^{-1}$ donc M et A sont semblables.