

TD 04 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2025-2026

vendredi 26 septembre 2025

- 4.1** Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A . Comme $A^3 = 0$, on a aussi $f^3 = 0$. En l'écrivant $f^2 \circ f = f \circ f^2 = 0$ on a donc classiquement $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$.

On va faire une disjonction des cas selon l'indice de nilpotence de f :

- si $f^2 \neq 0$, c'est-à-dire si l'indice de nilpotence de f vaut 3, il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(x) \neq 0$. Classiquement, $\mathcal{B} = (f^2(x), f(x), x)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, si $(R) : af^2(x) + bf(x) + cx = 0$, on applique f^2 à (R) et il reste $cf^2(x) = 0$ (car $f^3 = 0$) donc $c = 0$ car $f^2(x) \neq 0$; on applique ensuite f à (R) et $bf^2(x) = 0 \implies b = 0$ et il reste $af^2(x) = 0$ donc $a = 0$. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre et comme elle comporte $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Par construction, la matrice de f dans $\mathcal{B}$

est bien $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $f^3(x) = 0$ et A est donc semblable à $N_1 = E_{1,2} + E_{2,3}$ si $f^2 \neq 0$ car

$A = PN_1P^{-1}$ en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$.

- si $f^2 = 0$, c'est-à-dire si l'indice de nilpotence de f vaut 2, on a $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ donc, par la formule du rang, $\text{rang}(f) \leq \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - \text{rang}(f)$ donc $\text{rang}(f) = 1$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$. Soit u_3 un vecteur non nul de $E \setminus \text{Ker}(f)$, on pose alors $u_2 = f(u_3) \in \text{Im}(f)$ de sorte que $u_2 \neq 0$ car $u_3 \notin \text{Ker}(f)$. La famille (u_2) est une famille libre dans $\text{Ker}(f)$ qu'on peut donc compléter par en une base (u_1, u_2) de $\text{Ker}(f)$. Comme $u_3 \notin \text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Ker}(f)$, la famille libre à trois vecteurs $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est

une base de $\mathbb{C}^3$. Par construction, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et A est semblable à $N_2 = E_{2,3}$ car

$A = PN_2P^{-1}$ en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$.

Ainsi, toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $A \neq 0$ et $A^3 = 0$ est semblable à N_1 ou N_2 .

- 4.2** Notons E l'espace vectoriel tel que $f \in \mathcal{L}(E)$ et posons $n = \dim(E)$. Par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = n - 1$ puisque $\text{rang}(f) = 1$ par hypothèse.

Méthode 1 (la plus rapide) : soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\text{Ker}(f)$. Cette famille est libre dans E , on peut donc la compléter (avec le théorème de la base incomplète) en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ de E . Par

construction, comme $\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, f(e_k) = 0_E$, on a $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$. Comme

$\text{Tr}(f) = \text{Tr}(A) = 1$, on a $\alpha_n = 1$ et en effectuant le calcul, on constate que $A^2 = A$ donc que $f^2 = f$.

Méthode 2 : on traite deux cas (les deux seuls cas) selon le rapport entre $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$:

Si $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$: soit une base (e_1) de $\text{Im}(f)$ et une base $(e_2, \dots, e_n)$ de $\text{Ker}(f)$, comme $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E , $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E . Comme $f(e_1) \in \text{Im}(f)$, $\exists \lambda \in \mathbb{K}, f(e_1) = \lambda e_1$. De plus, $\forall k \in \llbracket 2; n \rrbracket, f(e_k) = 0_E$. Ainsi, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \lambda E_{1,1}$. Comme $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(A) = 1$, on a $\lambda = 1$ et $A^2 = A$ donc $f^2 = f$.

Si $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$: on peut prendre (e_1) de $\text{Im}(f)$, qu'on complète en une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de $\text{Ker}(f)$,

qu'on complète à nouveau en une base $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ de E . Par construction, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \lambda E_{1,n}$ car $\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $f(e_k) = 0_E$ et $\exists l \in \mathbb{K}$, $f(e_n) = \lambda e_1$ car $\text{Im}(f) = \text{Vect}(e_1)$. Si $n \geq 2$, on aurait donc $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(A) = 0$ et c'est impossible. Si $n = 1$, $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(f) = 1 = \lambda$ donc $A^2 = A$ d'où $f^2 = f$.

Quelle que soit la méthode, la seule possibilité quand $\text{rang}(f) = \text{Tr}(f) = 1$ est $f^2 = f$ (f est un projecteur).

4.3 a. Pour $n \geq 3$, en développant par rapport à la première ligne puis le second déterminant obtenu par rapport à la première colonne (puisque $n \geq 3$, la plus petite matrice est bien une "vraie" matrice car $n-2 \geq 1$), on obtient classiquement $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$ (R). Pour simplifier les calculs à suivre, comme $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2 - 1$, la relation de récurrence (R) marche pour $n = 2$ si on convient $P_0(x) = 1$.

b. Pour $x \in]-2; 2[$, on pose $\alpha = \arccos\left(\frac{x}{2}\right) \in]0; \pi[$ et on a bien $x = 2 \cos(\alpha)$.

Initialisation : on a bien $P_0(x) = 1 = \frac{\sin((0+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$ et $P_1(x) = x = 2 \cos(\alpha) = \frac{\sin((1+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

Hérédité : si on suppose, pour un entier $n \geq 2$, que l'on a $P_{n-2}(x) = \frac{\sin((n-1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$ et $P_{n-1}(x) = \frac{\sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)}$

alors $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x) = 2 \cos(\alpha) \frac{\sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)} - \frac{\sin((n-1)\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{2 \cos(\alpha) \sin(n\alpha) - \sin((n-1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$

donc $P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha) + \sin((n-1)\alpha) - \sin((n-1)\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

On conclut par principe de récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$. On pouvait aussi

commencer la récurrence aux rangs 1 et 2 (sans convenir que $P_0(x) = 1$) mais il fallait alors montrer, par des formules de trigonométrie, que $\sin(3\alpha) = \sin(\alpha)(4 \cos^2(\alpha) - 1)$ pour initialiser.

c. Comme $\sin((n+1)\alpha) = 0 \iff (n+1)\alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$, on est conduit à considérer $\alpha_k = \frac{k\pi}{n+1}$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

avec $x_k = 2 \cos(\alpha_k)$. Alors comme $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < \pi$ et que la fonction $\cos$ est injective sur $[0; \pi]$, les $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts et on a $P_n(x_k) = 0$. De plus, on montre par une récurrence simple ou en constatant que P_n est le polynôme caractéristique de la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que P_n est un polynôme unitaire de degré n dont on connaît n racines distinctes. Ainsi, $\forall n \geq 1$, $P_n = \prod_{k=1}^n (X - 2 \cos(\alpha_k))$.

Comme $P_n = \chi_{A_n}$ est scindé à racines simples, la matrice A_n est diagonalisable.

4.4 a. Comme $f^3 - \text{id}_E = (f^2 + f + \text{id}_E) \circ (f - \text{id}_E) = 0$, on a $\text{Im}(f - \text{id}_E) \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{id}_E)$ d'après le cours.

b. Soit $x \in \text{Im}(f - \text{id}_E) \cap \text{Ker}(f - \text{id}_E)$, il vient $x \in \text{Ker}(f^2 + f + \text{id}_E) \cap \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ d'après a.. Ainsi, $f(x) = x$ et $f^2(x) + f(x) + x = 0$ or $f^2(x) = f(x) = x$ donc $3x = 0_E$ et $x = 0_E$. On en déduit que $\text{Im}(f - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$ sont en somme directe mais comme, par la formule du rang, on a $n = \dim(\text{Im}(f - \text{id}_E)) + \dim(\text{Ker}(f - \text{id}_E))$, on en déduit que $E = \text{Im}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \text{id}_E)$.

c. À nouveau (même en dimension infinie) $\text{Im}(f - \text{id}_E) \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{id}_E)$ donc, avec la même méthode que précédemment, $\text{Im}(f - \text{id}_E) \cap \text{Ker}(f - \text{id}_E) = \{0_E\}$.

Soit $x \in E$ quelconque, on raisonne par analyse / synthèse :

- Si $x = a + b$ avec $a \in \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et $b \in \text{Im}(f - \text{id}_E)$, alors $f(a) = a$ et $f^2(b) + f(b) + b = 0_E$. Donc $x = a + b$, $f(x) = a + f(b)$ et $f^2(x) = a + f^2(b)$. On somme : $a = \frac{1}{3}(f^2(x) + f(x) + x)$ et $b = x - a = \frac{1}{3}(2x - f(x) - f^2(x))$.
- Réciproquement, si $a = \frac{1}{3}(f^2(x) + f(x) + x)$ et $b = \frac{1}{3}(2x - f(x) - f^2(x))$, $f(a) = a$ (simple calcul car $f^3 = \text{id}_E$)

donc $a \in \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et comme $2 - X - X^2 = (X - 1)(-2 - X) : b = (f - \text{id}_E)\left(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}f(x)\right) \in \text{Im}(f - \text{id}_E)$.

Comme on a clairement $x = a + b$, on conclut que $E = \text{Im}(f - \text{id}_E) + \text{Ker}(f - \text{id}_E)$.

Par conséquent, $E = \text{Im}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ est encore vrai en dimension quelconque si $f^3 = \text{id}_E$.

d. Premièrement, on a vu à la question **b.** que $\text{Ker}(f^2 + f + \text{id}_E) \cap \text{Ker}(f - \text{id}_E) = \{0_E\}$. De plus, comme $\text{Im}(f - \text{id}_E) \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{id}_E)$ et $\text{Im}(f - \text{id}_E) + \text{Ker}(f - \text{id}_E) = E$, on a aussi $E \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{id}_E) + \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ donc $E = \text{Ker}(f^2 + f + \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \text{id}_E)$. Comme f et $f^2 + f + \text{id}_E$ commutent car ce sont tous les deux des polynômes en f , on sait qu'alors $F = \text{Ker}(f^2 + f + \text{id}_E)$ est stable par f donc u induit par f sur $\text{Ker}(f^2 + f + \text{id}_E)$ est bien défini. Par construction, on a $u^2 + u + \text{id}_F = 0$ car $\forall x \in F, (u^2 + u + \text{id}_F)(x) = f^2(x) + f(x) + x = 0_E$.

Ainsi, $u^2 + u + \text{id}_F = \left(u + \frac{\text{id}_F}{2}\right)^2 + \frac{3\text{id}_F}{4} = 0$ donc $\left(u + \frac{\text{id}_F}{2}\right)^2 = -\frac{3\text{id}_F}{4}$ et $\det\left(\left(u + \frac{\text{id}_F}{2}\right)^2\right) = \left(-\frac{3}{4}\right)^r$ où $r = \dim(F)$. Comme $\det\left(\left(u + \frac{\text{id}_F}{2}\right)^2\right) = \det\left(u + \frac{\text{id}_F}{2}\right)^2 \geq 0$, $r = \dim(F) = \text{rang}(f - \text{id}_E)$ est pair.

4.5 Par le binôme de NEWTON, il vient $M = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_i^k b_j^{n-k}\right)_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et on reconnaît un produit matriciel $M = AB$ avec $A = (a_i^k)_{0 \leq i, k \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B = \left(\binom{n}{k} b_j^{n-k}\right)_{0 \leq k, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. La matrice A est une matrice de VANDERMONDE et on a donc $\det(A) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ d'après le cours. Par multilinéarité par rapport aux lignes de B , on a $\det(B) = \left(\prod_{k=0}^n \binom{n}{k}\right) \det(C)$ où $C = (b_j^{n-k})_{0 \leq k, j \leq n}$. Or la matrice C est quasiment une matrice de VANDERMONDE, il suffit de mettre les lignes dans le bon ordre : cela se fait en intervertissant les lignes L_1 et L_{n+1} , L_2 et L_n , etc... Il faut donc $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ interversions de lignes pour transformer C en une vraie matrice de VANDERMONDE : $\det(B) = (-1)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \left(\prod_{k=0}^n \binom{n}{k}\right) \prod_{0 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)$. Par propriété du déterminant, $\det(M) = \det(A)\det(B) = (-1)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \left(\prod_{k=0}^n \binom{n}{k}\right) \prod_{0 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)(a_j - a_i)$.

4.6 ($\Leftarrow$) S'il existe deux automorphismes de E tels que $u \circ v = -v \circ u$, en prenant le déterminant, on a $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v) = (-1)^n \det(v)\det(u) = \det(-v \circ u)$ car la dimension de E vaut n . Ainsi, $(-1)^n = 1$ car $\det(u) \neq 0$ et $\det(v) \neq 0$ puisque u et v sont des automorphismes ce qui impose que n est pair.

($\Rightarrow$) Si $n = 2p$ est pair, on se souvient des isométries du plan (2 est le plus petit entier pair) et on "constate" que la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et la symétrie orthogonale (réflexion) d'axe (Ox) de matrice $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ anti-commutent : $A'B' = -B'A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par analogie, on choisit une base $\mathcal{B}$ quelconque de E de dimension $n = 2p$ et on définit u (resp. v) l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ vaut $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$ (resp. $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$). On vérifie avec des produits par blocs que A et B sont inversibles avec $B^{-1} = B$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ -I_p & 0 \end{pmatrix} = -A$ et que $AB = -BA = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi u et v sont bien des automorphismes de E et $u \circ v = -v \circ u$.

4.7 Posons $S_0 = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}$, $S_1 = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/3 \rfloor} \binom{n}{3k+1}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-2)/3 \rfloor} \binom{n}{3k}$; ce qui revient à partitionner les termes $\binom{n}{k}$ de la n -ième ligne du triangle de PASCAL selon la congruence modulo 3 de k . Alors, par le binôme de NEWTON, on a $(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = S_0 + S_1 + S_2$, $(1+j)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^k = S_0 + jS_1 + j^2S_2$ car $j^k = 1 \iff k \equiv 0[3]$, $j^k = j \iff k \equiv 1[3]$ et $j^k = j^2 \iff k \equiv 2[3]$. De plus, on a la relation $(1+j^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} j^{2k} = S_0 + j^2S_1 + j^4S_2 = S_0 + j^2S_1 + jS_2$ car $j^4 = j$. Par conséquent, puisque $1+j+j^2 = 0$, il vient $S_0 = \frac{2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n}{3} = \frac{2^n + (-1)^n(j^n + j^{2n})}{3} = \frac{2^n + 2(-1)^n \cos(\frac{2\pi n}{3})}{3}$.

4.8 a. Si $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, posons $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$ qui est un sous-espace de E de dimension n car $(f_1, \dots, f_n)$ est alors une base de F . Soit $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\forall f \in F$, $\varphi(f) = \left(\int_0^1 f f_1, \dots, \int_0^1 f f_n \right)$. Alors $\varphi \in \mathcal{L}(F)$ par linéarité de l'intégrale. Si $f \in \text{Ker}(\varphi)$, comme $f \in F$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que l'on ait $f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$ et $\varphi(f) = 0$ donne $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\int_0^1 f f_k = 0$. Alors, toujours par linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k \right) f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_0^1 f f_k = 0$. Un résultat classique du cours, comme f^2 est continue et positive sur $[0; 1]$ et que $\int_0^1 f^2 = 0$, montre que $f^2 = 0$ sur $[0; 1]$ donc que $f = 0$.

Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ donc φ est injective. Mais comme $\dim(F) = \dim(\mathbb{R}^n)$, φ est un isomorphisme.

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $(h_1, \dots, h_n) \in F^n$, la condition $\forall (i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $m_{i,j} = \int_0^1 h_i f_j$ se traduit par $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\varphi(h_i) = (m_{i,1}, \dots, m_{i,n})$. La bijectivité de φ montre que non seulement une telle famille $(h_1, \dots, h_n) \in F^n$ existe, mais aussi qu'elle est unique, il suffit de prendre $h_i = \varphi^{-1}(m_{i,1}, \dots, m_{i,n})$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Il existe donc une famille $(h_1, \dots, h_n) \in E^n$ (mais on n'a plus forcément l'unicité dans E qui est de dimension violemment infinie) telle que $\forall (i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $m_{i,j} = \int_0^1 h_i f_j$.

b. Méthode 1 : en prenant $M = I_n$, il existe par hypothèse $(h_1, \dots, h_n) \in E^n$ telle que l'on ait les relations $\forall (i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $\delta_{i,j} = \int_0^1 h_i f_j$ (symbole de KRONECKER). Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j = 0$. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j \right) h_i = 0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j \int_0^1 h_i f_j = \lambda_i$. Ainsi $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ et $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

La réciproque de la question **a.** est donc vraie.

Méthode 2 : on pouvait aussi raisonner par l'absurde. Si $(f_1, \dots, f_n)$ était liée, l'une de ces fonctions, disons f_j , s'écrirait comme combinaison linéaire des autres. Alors, par linéarité de l'intégrale, la j -ième colonne de la matrice $M = \left(\int_0^1 h_i f_j \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ serait combinaison linéaire des autres donc M ne serait pas inversible. On aurait donc une contradiction avec n'importe quelle matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (notamment I_n).

4.9 a. Soit $x \in E$, comme $O_x = \{u^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ (orbite de x) est fini, l'application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow O_x$ telle que $\varphi(m) = u^m(x)$ ne peut pas être injective car $\mathbb{N}$ est infini et O_x est fini par hypothèse. Ainsi, il existe deux entiers naturels $p < q$ tels que $u^p(x) = u^q(x) = u^p(u^{q-p}(x))$. Or u est bijectif, donc u^p aussi d'où $u^{q-p}(x) = x$. En posant $k = q - p \in \mathbb{N}^*$, on a bien $u^k(x) = x$.

b. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, d'après **a.**, il existe $k_i \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^{k_i}(e_i) = e_i$. Posons $N = \text{ppcm}(k_1, \dots, k_n)$, alors N est un multiple de k_i , donc $u^N(e_i) = u^{k_i} \circ \dots \circ u^{k_i}(e_i) = \dots = e_i$. Comme les endomorphismes u^N et id_E coïncident sur la base $\mathcal{B}$, ils sont égaux donc $u^N = \text{id}_E$.

c. • Le résultat de **a.** n'est plus vérifié si on ne suppose plus u bijectif. En effet, en prenant un projecteur p de E tel que $p \neq \text{id}_E$ (par exemple $p = 0_{\mathcal{L}(E)}$). Pour tout x de E , on a $O_x = \{p^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\} = \{x\}$ si $x \in \text{Im}(p)$ et $O_x = \{p^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\} = \{x, p(x)\}$ sinon mais dans les deux cas $\{p^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ est fini. Pourtant, si $x \neq 0_E \in \text{Ker}(p)$ (et il existe des vecteurs non nuls dans $\text{Ker}(p)$ par hypothèse), on n'a aucun entier $k \geq 1$ tel que $p^k(x) = x$ car $\forall k \geq 1, p^k(x) = 0_E$. Si p était inversible, comme $p^2 = p$, on aurait $p^{-1} \circ p^2 = p^{-1} \circ p$ donc $p = \text{id}_E$: NON ! Ainsi p n'est pas inversible.

• Le résultat de **b.** n'est plus vérifié si on ne suppose plus u bijectif. En effet, si $u \notin \text{GL}(E)$ et si on avait $u^N = \text{id}_E$ avec $N \geq 1$, $u \circ u^{N-1} = u^{N-1} \circ u = \text{id}_E$ donc $u^{-1} = u^{N-1}$: NON ! Ainsi, $\forall N \in \mathbb{N}^*, u^N \neq \text{id}_E$.

4.10 a. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E . Comme $(v_k, f(v_k))$ est liée pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ par hypothèse, il existe des scalaires λ_k tels que $f(v_k) = \lambda_k v_k$ car $(v_k, f(v_k))$ est liée et $v_k \neq 0_E$. Comme $v = v_1 + \dots + v_n \neq 0_E$, il existe un scalaire λ tel que $f(v) = \lambda v$ ce qui équivaut à $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \lambda(v_1 + \dots + v_n)$ donc, puisque $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, à $\lambda = \lambda_1 = \dots = \lambda_n$. Ainsi, f et l'homothétie de rapport λ coïncident sur une base et on peut conclure d'après le cours que $f = \lambda \text{id}_E$.

b. Montrons la contre-apposée de cette assertion : $(\forall x \in E, (x, f(x)) \text{ liée}) \implies (f = 0 \text{ ou } \text{Tr}(f) \neq 0)$. Cela découle de la question précédente car si $(x, f(x))$ est liée pour tout vecteur x de E , alors f est une homothétie, disons $f = \lambda \text{id}_E$. Alors on a deux cas, soit $\lambda = 0$ et $f = 0$, soit $\lambda \neq 0$ et $\text{Tr}(f) = \lambda \text{Tr}(\text{id}_E) = n\lambda \neq 0$.

c. Si f est non nul et que $\text{Tr}(f) = 0$, on sait d'après la question **b.** qu'il existe au moins un vecteur x_1 de E tel que $(x_1, f(x_1))$ est libre (ce qui justifie que $x_1 \neq 0_E$). Posons $x_2 = f(x_1)$. Comme (x_1, x_2) est libre, on peut donc compléter la famille (x_1, x_2) en une base $\mathcal{B} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ de E . La matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$ est bien, par construction, de la forme $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1, n-1}(\mathbb{K})$ (matrice ligne), $C \in \mathcal{M}_{n-1, 1}(\mathbb{K})$ (matrice colonne) et $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ (matrice carrée) et on a même ${}^t C = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$.

d. Effectuons une récurrence sur la taille de la matrice M .

• Si $n = 1$, il est évident que si $M \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et si $\text{Tr}(M) = 0$, alors $M = 0$ donc M est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle. On a même $\forall P \in \text{GL}_1(\mathbb{K}), M = P 0 P^{-1} = 0$.

• Supposons le résultat établi pour des matrices de taille $n \geq 1$. Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que $\text{Tr}(M) = 0$. Si $M = 0$, la matrice M est elle-même à diagonale nulle et le tour est joué ! Si $M \neq 0$, d'après **c.**, en posant f l'endomorphisme canoniquement associé à M , il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1, n}(\mathbb{K})$ (matrice ligne), $C \in \mathcal{M}_{n, 1}(\mathbb{K})$ (matrice colonne) et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comme $\text{Tr}(M) = 0 + \text{Tr}(A)$,

on a aussi $\text{Tr}(A) = 0$. En posant Q la matrice de passage entre la base canonique et la base $\mathcal{B}$, on a donc, par formule de changement de base, $M = Q \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix} Q^{-1}$. Or, par hypothèse de récurrence, il existe une matrice $R \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = RNR^{-1}$ où $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice à diagonale nulle. Posons $Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$, alors Q' est inversible et $Q'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$. En calculant par blocs, $Q'^{-1} \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix} Q' = \begin{pmatrix} 0 & LR \\ R^{-1}C & N \end{pmatrix}$ donc $M = QQ'UQ'^{-1}Q^{-1}$ avec $U = \begin{pmatrix} 0 & LR \\ R^{-1}C & N \end{pmatrix}$ dont la diagonale est nulle. Comme QQ' est inversible comme produit de matrices inversibles et que $Q'^{-1}Q^{-1} = (QQ')^{-1}$, M est bien semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

Par principe de récurrence, on a bien montré que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{Tr}(M) = 0$, alors M est semblable à une matrice dont la diagonale est nulle.

4.11 a. Rendons cet exercice plus général en constatant (par calculs) que $A^3 = 2A^2$. Prenons dans **a.** un endomorphisme d'un espace E tel que $f^3 = 2f^2$, c'est-à-dire tel que $X^3 - 2X^2 = X^2(X - 2)$ soit un polynôme annulateur de f . Soit $x \in E$.

Analyse : supposons qu'il existe $(y, z) \in \text{Ker}(f^2) \times \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$ tel que $x = y + z$. En appliquant f^2 à cette relation, on a $f^2(x) = f^2(y) + f^2(z) = 0_E + 2(2z) = 4z$ donc $y = x - \frac{f^2(x)}{4}$ et $z = \frac{f^2(x)}{4}$.

Synthèse : posons $y = x - \frac{f^2(x)}{4}$ et $z = \frac{f^2(x)}{4}$, il est clair que $x = y + z$. De plus, $f^2(y) = f^2(x) - \frac{f^4(x)}{4} = 0$ car $f^3 = 2f$ donc $f^4 = 2f^3 = 4f^2$ donc $y \in \text{Ker}(f^2)$. Enfin, $f(z) - 2z = \frac{f^3(x)}{4} - \frac{f^2(x)}{2} = \frac{f^3(x) - 2f^2(x)}{4} = 0$ car $f^3 = 2f^2$ ce qui prouve que $z \in \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$.

On vient de prouver par analyse/synthèse que $E = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{id}_E)$.

Avec la matrice A de l'énoncé, il était plus simple de calculer $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de constater que A^2 est de

rang 1 donc, par la formule du rang, que $\dim(\text{Ker}(f^2)) = 2$. Comme les vecteurs $w_1 = (1, 0, 1)$ et $w_2 = (3, 1, 0)$ sont clairement dans $\text{Ker}(f^2)$ car les colonnes C_1, C_2, C_3 de A^2 vérifient $C_1 + C_3 = 3C_1 + C_2 = 0$ et que w_1 et w_2 sont non colinéaires, on a $\text{Ker}(f^2) = \text{Vect}(w_1, w_2)$. De plus, $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ et on voit que

la différence des deux premières colonnes de cette matrice est nulle donc $\text{rang}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = 2$ car les deux premières colonnes ne sont pas colinéaires. Toujours d'après la formule du rang, on a $\dim(\text{Ker}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})) = 1$ et $\text{Ker}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(w_3)$ avec $w_3 = (1, 1, 0)$. Comme la famille $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de déterminant $2 \neq 0$, on en déduit que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})$.

b. A est de rang 2 donc, par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ et il est visible que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1, 0, 1)$. Ainsi, on peut prendre $w_2 \in \text{Ker}(f^2) \setminus \text{Ker}(f)$ d'après la question **a.**

c. On cherche d'après l'énoncé une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = v_1$ et $f(v_3) = 2v_3$. Comme ceci implique $f^2(v_2) = f(f(v_2)) = f(v_1) = 0$ et que $f(v_2) = v_1 \neq 0$ car v_1 est un vecteur de base, on est incité à prendre $v_2 = w_2 = (3, 1, 0)$. Forcément, $v_1 = f(v_2) = (4, 0, 4)$ et on prend $v_3 = w_3 = (1, 1, 0)$.

Comme avant, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et on a par construction $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4.12 Analyse : soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice telle que S_A soit fini. Soit, pour $(u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$, la matrice inversible $P = \text{diag}(u_1, \dots, u_n)$, alors la matrice $M = PAP^{-1} = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dans S_A et, par calcul, on a $m_{i,j} = \frac{u_i}{u_j} a_{i,j}$. S'il existe un couple $(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$ et $a_{i,j} \neq 0$, alors en prenant $u_i = \lambda$ et $u_j = 1$, quelles que soient les valeurs des autres coefficients diagonaux de P , on a $m_{i,j} = \lambda a_{i,j}$ qui pourrait prendre n'importe quelle valeur réelle (à part 0) quand λ parcourt $\mathbb{R}^*$. Puisque S_A est fini, on en déduit que $\forall i \neq j, a_{i,j} = 0$, donc A est diagonale.

Soit, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, la matrice de transvection $P = T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$, alors P est inversible et $P^{-1} = T_{i,j}(-\lambda) = I_n - \lambda E_{i,j}$. En posant $M = PAP^{-1} = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a $m_{i,i} = a_{i,i} + \lambda(a_{j,j} - a_{i,i})$. Si on avait $a_{i,i} \neq a_{j,j}$, alors $m_{i,i}$ pourrait prendre toutes les valeurs réelles quand $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui contredit le fait que S_A est fini. Ainsi, $\forall i \neq j, a_{i,i} = a_{j,j}$ donc on a $A = a_{1,1} I_n$.

Synthèse : réciproquement, soit $A = \lambda I_n$ pour un réel λ , alors pour toute matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $P^{-1}AP = \lambda P^{-1}I_nP = \lambda I_n = A$ donc $S_A = \{A\}$ est bien fini.

Par analyse-synthèse, les seules matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que S_A est fini sont les matrices d'homothéties de la forme $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (on les appelle aussi matrices scalaires).

4.13 a. Comme $u^{n-1} \neq 0$, par définition, il existe un vecteur $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0_E$. Posons alors $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$, cette famille de vecteurs de E comporte n vecteurs et $\dim(E) = n$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{B}$ est libre pour établir que $\mathcal{B}$ est une base de E .

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$ (1). Par l'absurde, supposons $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ et posons alors $m = \min(\{k \in \llbracket 0;n-1 \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\})$. La relation (1) devient donc $\sum_{k=m}^{n-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$ ce qui, en composant par u^{n-m-1} , devient $\sum_{k=m}^{n-1} \lambda_k u^{n-m-1+k}(x) = 0_E$. Or, dès que $k \geq m+1$, on a $n-m-1+k \geq n$ donc $u^{n-m-1+k} = u^n \circ u^{k-m-1} = 0$ et la relation se résume à $\lambda_m u^{n-1}(x) = 0_E$, ce qui est impossible car $\lambda_m \neq 0$ et $u^{n-1}(x) \neq 0_E$ par définition. On a donc montré que $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) = (0, \dots, 0)$ ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est libre donc que $\mathcal{B}$ est une base de E .

b. Méthode 1 : pour tout $k \in \llbracket 0;n \rrbracket$, $\text{Im}(u^k) = \text{Vect}(u^k(x), \dots, u^k(u^{n-1}(x))) = \text{Vect}(u^k(x), \dots, u^{n-1}(x))$ car $u^k(u^{n-k}(x)) = \dots = u^k(u^{n-1}(x)) = 0_E$ et que $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E . Comme $(u^k(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une famille libre car c'est une sous-famille de $\mathcal{B}$, la famille $(u^k(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est à la fois libre et génératrice dans $\text{Im}(u^k)$ donc $\text{rang}(u^k) = \dim(\text{Im}(u^k)) = n - k$. Par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(u^k)) = k$. Mais comme on a vu que $u^{n-k}(x), \dots, u^{n-1}(x)$ étaient dans $\text{Ker}(u^k)$ et que cette famille $(u^{n-k}(x), \dots, u^{n-1}(x))$ de k vecteurs est libre une nouvelle fois car c'est une sous-famille de $\mathcal{B}$, c'est une base de $\text{Ker}(u^k)$. Par conséquent, $\text{Ker}(u^k) = \text{Vect}(u^{n-k}(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est de dimension k pour $k \in \llbracket 0;n \rrbracket$.

Méthode 2 : si $k \in \llbracket 0;n \rrbracket$ et $y \in E$, comme $\mathcal{B}$ est une base de E , $y = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(x)$ avec $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$.

Alors, $y \in \text{Ker}(u^k) \iff u^k(y) = 0_E \iff \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^{i+k}(x) = \sum_{i=0}^{n-k-1} \lambda_i u^{i+k}(x) = 0_E$ et $(u^k(x), \dots, u^{n-1}(x))$

est libre donc $y \in \text{Ker}(u^k) \iff (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-k-1}) = (0, \dots, 0) \iff y \in \text{Vect}(u^{n-k}(x), \dots, u^{n-1}(x))$ donc $\text{Ker}(u^k) = \text{Vect}(u^{n-k}(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est de dimension k pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

c. Comme u^k et u commutent pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on sait d'après le cours que $\text{Ker}(u^k)$ est stable par u .

Réciproquement, soit F un sous-espace de E stable par u . Notons $k = \dim(F) \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Traitons deux cas :

- si $k = 0$, alors $F = \{0_E\} = \text{Ker}(u^0) = \text{Ker}(\text{id}_E)$.
- si $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on peut considérer l'endomorphisme u_F induit par u sur F . Comme u est nilpotent, u_F l'est aussi car $\forall x \in F, u_F^n(x) = u^n(x) = 0_E$. Posons p son indice de nilpotence, c'est-à-dire l'unique entier p tel que $u_F^p = 0$ et $u_F^{p-1} \neq 0$. Comme en a., il existe un vecteur $x \in F$ tel que $(x, \dots, u^{p-1}(x))$ est libre. Ainsi, $\dim(F) = k \geq p$ et on a donc $u_F^k = u_F^p \circ u_F^{k-p} = 0$ ce qui prouve que $\forall x \in F, u_F^k(x) = u^k(x) = 0_E$ donc $F \subset \text{Ker}(u^k)$. Par inclusion et égalité des dimensions, $F = \text{Ker}(u^k)$.

Les sous-espaces de E stables par u sont les $n+1$ sous-espaces $\text{Ker}(u^k) = \text{Im}(u^{n-k})$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

4.14 a. Par le binôme de NEWTON, $\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket, (X+1)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i$. Ainsi, A_n est la matrice dans la base

canonique $\mathcal{B}_n = (1, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme $f_n : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f_n(P) = P(X+1)$ (clairement linéaire et allant de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$). Si on définit $g_n : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ par $g_n(P) = P(X-1)$, alors $f_n \circ g_n = g_n \circ f_n = \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc f_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $g_n = f_n^{-1}$. Par conséquent,

$$A_n^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_n}(g_n) \text{ et, comme } \forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket, (X-1)^j = \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \binom{j}{i} X^i, A_n^{-1} = B_n = \left((-1)^{j-i} \binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}.$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note S_n l'ensemble de toutes les permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$. On sait que $\text{card}(S_n) = n!$. On partitionne (ou plutôt on partage) S_n selon le nombre de points fixes des permutations. Notons donc $S_{n,i}$

l'ensemble des permutations de S_n qui ont exactement i points fixes. Alors $S_n = \bigsqcup_{i=0}^n S_{n,i}$ (réunion disjointe)

avec $S_{n,n-1} = \emptyset$ car si une permutation de S_n a au moins $n-1$ points fixes, c'est forcément l'identité donc elle a en fait n points fixes. On a donc $\text{card}(S_n) = n! = \sum_{i=0}^n \text{card}(S_{n,i})$. Pour dénombrer $S_{n,i}$, on choisit les i

points fixes parmi les éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ ce qui fait $\binom{n}{i}$ choix ; ensuite on choisit une permutation des $n-i$ éléments restants sans point fixe, elles sont au nombre de d_{n-i} par définition (le nombre de dérangements, c'est le nom des permutations de $S_{n,0}$, ne dépend que du nombre d'éléments de l'ensemble qu'on "dérange").

On obtient donc $\text{card}(S_{n,i}) = \binom{n}{i} d_{n-i}$. Par conséquent, on a $n! = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} d_{n-i}$ et le changement d'indice

$$k = n - i \text{ donne bien le résultat attendu, à savoir } n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k \text{ car } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

c. Les relations trouvées à la question précédente s'écrivent $A_n^T(d_0 \ d_1 \ \dots \ d_n)^T = (0! \ 1! \ \dots \ (n-1)! \ n!)^T$.

d. Comme A_n est inversible et $(A_n^T)^{-1} = (A_n^{-1})^T = B_n^T$, on a $(d_0 \ d_1 \ \dots \ d_n)^T = B_n^T(0! \ 1! \ \dots \ (n-1)! \ n!)^T$. On

en déduit donc, en regardant la dernière ligne de ce produit, que $d_n = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j! = n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!}$

et le changement d'indice $k = n - j$ permet d'écrire $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

Comme la loi sur S_n est la loi uniforme par hypothèse ("au hasard"), on a $p_n = \frac{\text{card}(S_{n,0})}{\text{card}(S_n)} = \frac{d_n}{n!}$ donc

$$p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}. \text{ Avec le développement en série entière de } \exp, \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} \sim 0,36.$$