

PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 03

PSI 1 2025-2026

du lundi 29/09 au vendredi 03/10

1 Révisions d'algèbre linéaire :

- espaces et sous-espaces, somme de deux sous-espaces, somme directe, supplémentaires ;
- applications linéaires, noyau et image, caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité ;
- projecteurs et symétries : passage de l'algébrique au géométrique ;
- famille libre, génératrice, base, propriétés de ces familles ;
- sous-espace stable par un endomorphisme et endomorphismes induits ;
- théorème du rang (isomorphisme entre un supplémentaire du noyau et l'image) ;
- application donnée par ses restrictions à des sous-espaces en somme directe ;
- familles libres, génératrices, liées, bases éventuellement infinies (hors programme néanmoins) ;
- définition des hyperplans (prog. en dimension finie) : supplémentaire droite ou dimension $\dim(E) - 1$;
- les hyperplans sont les noyaux des formes linéaires non nulles ;
- les hyperplans n'ont qu'une seule équation à un coefficient multiplicatif près ;
- calcul matriciel : somme, produit, espace vectoriel, anneau, matrices élémentaires, dimension ;
- transposée, matrices symétriques, antisymétriques, diagonales, triangulaires, trace ;
- inverses de matrices, calcul de puissances, matrices de GAUSS ;
- représentations matricielles : famille, matrice d'application linéaire, d'endomorphisme ;
- isomorphisme matrice-applications linéaires, relation avec le produit, l'inverse ;
- matriciellement : image d'un vecteur, changement de bases, matrices de passage entre bases ;
- changement de bases pour une application linéaire, matrices équivalentes, matrices semblables ;

2 Algèbre linéaire : ce qui est nouveau !

- espaces produits de plusieurs espaces : définition et dimension ;
- somme de plusieurs sous-espaces vectoriels dans un espace ;
- somme directe de plusieurs sous-espaces et caractérisations ; projecteurs associés ;
- caractérisation de sous-espaces en somme directe sur les dimensions ;
- produit matriciel par blocs et stabilité ;
- stabilité des noyaux et images si les endomorphismes commutent ;
- trace d'une matrice carrée et d'un endomorphisme, trace d'un projecteur ;
- définition des polynômes d'endomorphismes, "morphisme d'algèbres" si on fixe f ;
- structure de sous-algèbre commutative des polynômes en f , sous-espaces stables, commutant ;
- polynômes annulateurs de f , polynôme minimal en dimension finie (hors programme) ;
- exemples en dimension infinie où le seul polynôme annulateur est 0 ;
- utilisation d'un polynôme annulateur pour calculer les puissances d'un endomorphisme, d'une matrice ;

QUESTIONS DE COURS :

- 1 définir ce qu'est une somme directe de plusieurs sous-espaces (déf. 2.41)
- 2 définir ce qu'est un polynôme d'endomorphisme (déf. 2.44)
- 3 énoncer la caractérisation géométrique d'un projecteur (th. 2.16)
- 4 énoncer la dualité liant les hyperplans et les formes linéaires non nulles en dimension finie (th. 2.36)
- 5 énoncer la formule de changement de bases dans sa forme "endomorphisme" (th. 2.53)
- 6 énoncer la caractérisation d'une somme directe par les dimensions en dimension finie (th. 2.75)
- 7 énoncer le lien entre stabilité d'un sous-espace par un endomorphisme f et existence d'une base adaptée dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure par blocs (prop. 2.78)
- 8 prouver que $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f + g)$ et $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ (rem. 2.20)
- 9 prouver que $\text{rang}(g \circ f) \leq \min(\text{rang}(f), \text{rang}(g))$ (prop. 2.35)
- 10 prouver que si $u \circ v = v \circ u$, alors $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v (prop. 2.80)

Prévision pour la prochaine semaine : algèbre linéaire et début des intégrales