DS 02 : INSPIRÉ DE CENTRALE PSI 2019 M2

PSI1/2 2025/2026 **samedi 27 septembre 2025**

PARTIE 1 : DEUX EXEMPLES

1.1 Le premier :

1.1.1 Il est évident que $A \neq 0$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 4-4 & 8-8 \\ -2+2 & -4+4 \end{pmatrix} = 0$ donc, par définition de la nilpotence et de l'ordre de nilpotence d'une matrice nilpotente, $\boxed{\text{A est nilpotente d'indice 2.}}$

1.1.2 Il suffit de calculer, $\boxed{\mathrm{Tr}\,(A) = 2-2 = 0 \text{ et } \det(A) = -4+4 = 0.}$

1.1.3 On a $\varepsilon_1 = (1,0)$ et $\varepsilon_2 = u(\varepsilon_1) = (2,-1)$. Les deux vecteurs ε_1 et ε_2 ne sont pas colinéaires donc la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre. Comme elle comporte 2 vecteurs et que $\dim(\mathbb{C}^2) = 2$, on sait d'après le cours que $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $E = \mathbb{C}^2$. On pouvait aussi calculer $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{C}^2$. Par les deux méthodes, on peut conclure que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{C}^2.}$

1.1.4 On a $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_2) = u^2(\varepsilon_1) = 0_E$ car $A^2 = 0$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_2$ et, par la formule de changement de base, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}$, comme $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u)$, on a $\boxed{A = PJ_2P^{-1}}$ ce qui prouve que $\boxed{A \text{ et } J_2 \text{ sont semblables.}}$

1.2 Le second :

1.2.1 $\varepsilon_2 = u(\varepsilon_1) = (1,2,1)$ (première colonne de B) et on vérifie que $B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ car, en notant C_1, C_2, C_3 les trois colonnes de B, on a $C_1 + 2C_2 + C_3 = 0$. Ainsi, $\boxed{u(\varepsilon_2) = 0_E.}$

1.2.2 On a $C_2 = 3C_1$, $C_3 = -7C_1$ et $C_1 \neq 0$ donc la matrice B est de rang 1 et, par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 3 - \mathrm{rang}\,(B) = 2$. Comme $3C_1 - C_2 = 0$, les vecteurs ε_2 et $\boxed{\varepsilon_3 = (3,-1,0)}$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Ker}(u)$ qui est de dimension 2 donc $\boxed{(\varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ soit une base de } \mathrm{Ker}(u).}$

1.2.3 La famille $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$ car si $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$ est la matrice de $\mathcal{B}$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{C}^3$, on a $\det(P) = 1 \neq 0$. Comme $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$, $u(\varepsilon_2) = u(\varepsilon_3) = 0_E$, par définition, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,1} = \mathrm{diag}(J_2, J_1)$. Comme $E_{2,1}^2 = E_{2,1}E_{2,1} = \delta_{1,2}E_{2,1} = 0$ car $1 \neq 2$, on a $u^2 = 0$ donc $B^2 = 0$ alors que $B \neq 0$ donc $\boxed{\text{B est nilpotente d'indice 2.}}$ Par formule de changement de base, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = B = P\,\mathrm{diag}(J_2, J_1)P^{-1} = P\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P^{-1}$ donc les matrices $\boxed{B \text{ et } \mathrm{diag}(J_2, J_1) \text{ sont semblables.}}$

PARTIE 2 : PREMIERS RÉSULTATS

2.1 Si u est nilpotent d'indice 1 alors $u^1 = 0$ donc $\boxed{u = 0.}$

2.2 **Réduction d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ d'indice 2 :**

2.2.1 Par définition de l'indice de nilpotence de u, on a $u^{p-1} \neq 0$ donc $\boxed{\exists x \in E,\ u^{p-1}(x) \neq 0_E.}$ Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\alpha x + \beta u(x) + \gamma u^2(x) = 0_E$ alors il vient $\alpha u^{p-1}(x) + \beta u^p(x) + \gamma u^{p+1}(x) = 0_E$ en composant par u^{p-1}, ce qui donne, avec $u^p = u^{p+1} = 0$, $\alpha u^{p-1}(x) = 0_E$. Ainsi, $\alpha = 0$ puisque $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Il reste alors $\beta u(x) + \gamma u^2(x) = 0_E$, on compose cette fois par u^{p-2} (ce qui est possible car $p - 2 \geqslant 0$) et on obtient de même $\beta = 0$. Reste enfin $\gamma u^2(x) = 0_E$ et comme $p \geqslant 3$, on a $u^2(x) \neq 0_E$ car $u^{p-1}(x) \neq 0_E$ et on a bien $\gamma = 0$. Ainsi $\boxed{(x, u(x), u^2(x)) \text{ est une famille libre.}}$ On vient de construire une famille libre de 3 vecteurs alors que $\dim(E) = 2$, ce qui est absurde. On en déduit que l'hypothèse $p \geqslant 3$ est fausse donc que $p \leqslant 2$ et que $\boxed{p = 2}$ puisque $p \geqslant 2$ par hypothèse.

2.2.2 On a $u^2 = 0$ donc $\text{Im}\,(u) \subset \text{Ker}(u)$ puis $\dim(\text{Im}\,(u)) \leqslant \dim(\text{Ker}(u))$ et, par la formule du rang, $\dim(\text{Im}\,(u)) + \dim(\text{Ker}(u)) = 2$. On a donc deux possibilités : $\dim(\text{Im}\,(u)) = 0$ et $\dim(\text{Ker}(u)) = 2$, ce qui donnerait $u = 0$ qui serait nilpotent d'indice 1, ou bien $\dim(\text{Im}\,(u)) = \dim(\text{Ker}(u)) = 1$ qui est donc la seule possibilité. L'inclusion $\text{Im}\,(u) \subset \text{Ker}(u)$ et l'égalité des dimensions donne donc $\boxed{\text{Im}\,(u) = \text{Ker}(u).}$

2.2.3 Soit ε_2 un vecteur non nul de $\text{Im}\,(u)$: ceci existe car $\text{rang}\,(u) = 1$. Il existe donc $\varepsilon_1 \in E$ tel que $\varepsilon_2 = u(\varepsilon_1)$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 = 0_E$ alors $\alpha u(\varepsilon_1) + \beta u^2(\varepsilon_1) = 0_E$ donc $\alpha\varepsilon_2 = 0_E$, ce qui donne $\alpha = 0$ car $\varepsilon_2 \neq 0_E$. Il reste $\beta\varepsilon_2 = 0_E$ donc, comme avant, $\beta = 0$. $\mathcal{B}$ est donc une base de E puisque $\mathcal{B}$ est libre et que $\dim(E) = 2$. Comme $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_2) = 0$, par définition, on a $\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_2.}$

2.2.4 ($\subset$) Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$ alors soit $p = 1$ et $A = 0$, soit $p = 2$ (on ne peut pas avoir $p \geqslant 3$ d'après 2.2.1) et A est semblable à J_2 d'après 2.2.3. Dans les deux cas, on a $\text{Tr}\,(A) = \det(A) = 0$ puisque $\text{Tr}\,(J_2) = \det(J_2) = 0$ et que la trace et le déterminant se conservent par similitude.
($\supset$) Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est telle que $\det(A) = \text{Tr}\,(A) = 0$ alors, en écrivant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\text{Tr}\,(A) = a + d = 0$ et $\det(A) = ad - bc = 0$ et $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ad + bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc - ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Par double inclusion, on a bien $\boxed{\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid A \text{ est nilpotente}\} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \text{Tr}\,(A) = \det(A) = 0\}.}$

2.3 **Réduction d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ d'indice 2 :**

2.3.1 $u^2 = 0$ donc si $y \in \text{Im}\,(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et on a $u(y) = u^2(x) = 0_E$ donc $y \in \text{Ker}(u)$. Ainsi, $\boxed{\text{Im}\,(u) \subset \text{Ker}(u).}$ Par la formule du rang, $r = \dim(\text{Im}\,(u)) \leqslant \dim(\text{Ker}(u)) = n - \text{rang}\,(u)$ donc $r \leqslant n - r$ ce qui donne bien $\boxed{2r \leqslant n.}$

2.3.2 Comme $\mathrm{dim}(\mathrm{Im}\,(u)) = \mathrm{rang}\,(u) = r$, il existe une base $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$ de $\mathrm{Im}\,(u)$. Il existe $e_1, \cdots, e_r$ dans E tels que $\forall i \in [\![1;r]\!],\ u(e_i) = \varepsilon_i$. Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_r) \in \mathbb{C}^{2r}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{r} (\alpha_i e_i + \beta_i u(e_i)) = 0_E$, en composant par u et avec $u^2(e_i) = 0$, on a $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i u(e_i) = 0_E = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i \varepsilon_i$ qui donne $\forall i \in [\![1;r]\!],\ \alpha_i = 0$ par liberté de $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$. Il reste alors $\sum\limits_{i=1}^{r} \beta_i u(e_i) = 0_E$ qui donne $\forall i \in [\![1;r]\!],\ \beta_i = 0$ pour la même raison. La famille $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), \cdots, e_r, u(e_r))$ est donc libre de $2r = \mathrm{dim}(E)$ vecteurs de E qui est de dimension $n = 2r$ donc $\boxed{\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), \cdots, e_r, u(e_r)) \text{ est une base de } E.}$ Comme $\forall i \in [\![1;r]\!],\ u(e_i) = u(e_i)$ et $u(u(e_i)) = 0_E$, on a $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(J_2, \cdots, J_2) \in \mathcal{M}_{2r}(\mathbb{C}).}$

2.3.3 On reprend la construction et les notations précédentes mais cette fois $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$ est une base de $\mathrm{Im}\,(u)$ donc une famille libre de $\mathrm{Ker}(u)$ qu'on peut compléter par une famille $(v_1, \cdots, v_{n-2r})$ de $n-2r$ vecteurs en une base de $\mathrm{Ker}(u)$. Soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_r, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n-2r}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{r} (\alpha_i e_i + \beta_i u(e_i)) + \sum\limits_{i=1}^{n-2r} \gamma_i v_i = 0_E$, en composant par u, on a $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha \varepsilon_i = 0_E$ donc $\forall i \in [\![1;r]\!],\ \alpha_i = 0$ par liberté de $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$. Il reste ensuite $\sum\limits_{i=1}^{r} \beta_i \varepsilon_i + \sum\limits_{i=1}^{n-2r} \gamma_i v_i = 0_E$ donc $\forall i \in [\![1;r]\!],\ \beta_i = 0$ et $\forall i \in [\![1;n-2r]\!],\ \gamma_i = 0$ par liberté de la famille $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r, v_1, \cdots, v_{n-2r})$ qui est une base de $\mathrm{Ker}(u)$. La famille $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), \cdots, e_r, u(e_r), v_1, \cdots, v_{n-2r})$ est donc libre dans E et a n vecteurs donc $\boxed{\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), \cdots, e_r, u(e_r), v_1, \cdots, v_{n-2r}) \text{ est une base de } E.}$

Comme $\forall i \in [\![1;r]\!],\ u(e_i) = u(e_i)$ et $u(u(e_i)) = 0_E$ et que l'on a aussi $\forall i \in [\![1;n-2r]\!],\ u(v_i) = 0_E$, on en déduit que $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\underbrace{J_2, \cdots, J_2}_{r \text{ fois}}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-2r \text{ fois}}) = \mathrm{diag}(\underbrace{J_2, \cdots, J_2}_{r \text{ fois}}, \underbrace{J_1, \cdots, J_1}_{n-2r \text{ fois}}).}$

2.4 Polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente :

2.4.1 Par hypothèse, $A^p = 0$ donc, comme le déterminant est multiplicatif, $\det(A^p) = \det(A))^p = 0$ ce qui impose $\det(A) = 0$ donc $\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$ On aurait aussi pu dire que si A était inversible, en multipliant p fois la relation $A^p = 0$ par A^{-1}, on arriverait à $I_n = 0$ ce qui est absurde.

2.4.2 Comme $u^{p-1} \neq 0_E$ par définition de l'indice de nilpotence p de A (qui est le même que celui de u), on en déduit qu' $\boxed{\text{il existe un vecteur } x \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } u^{p-1}(x) \neq 0_E.}$

Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$ (1). Par l'absurde, supposons $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}) \neq (0, \cdots, 0)$ et posons alors $m = \mathrm{Min}(\{k \in [\![0;p-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\})$ qui existe bien car $\{k \in [\![0;p-1]\!] \mid \lambda_k \neq 0\}$ est non vide par hypothèse et minoré par 0. La relation (1) devient donc $\sum\limits_{k=m}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$ ce qui, en composant par u^{p-m-1}, devient $\sum\limits_{k=m}^{p-1} \lambda_k u^{p-m-1+k}(x) = 0_E$. Dès que $k \geqslant m+1$, $p-m-1+k \geqslant p$ donc $u^{p-m-1+k} = u^p \circ u^{k-m-1} = 0$ et la relation se résume à $\lambda_m u^{p-1}(x) = 0_E$, ce qui est impossible car $\lambda_m \neq 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0_E$ par définition. On a donc montré que $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{p-1}) = (0, \cdots, 0)$ donc $\boxed{\text{la famille } (x, u(x), \cdots, u^{p-1}(x)) \text{ est libre.}}$

$\boxed{2.4.3}$ Comme la famille $(x, u(x), \cdots, u^{p-1}(x))$ est libre, son cardinal est inférieur à la dimension de l'espace qui la contient, c'est-à-dire $\mathbb{C}^n$, ce qui montre que $\boxed{p \leqslant n.}$

De plus, comme $n - p \in \mathbb{N}$, on a $u^n = u^p \circ u^{n-p} = 0$ car $u^p = 0$ donc $\boxed{X^n \text{ annule } u.}$

$\boxed{2.4.4}$ Soit un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ multiple de X^p, il existe donc $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = X^p Q$. D'après le cours, on a alors $P(A) = A^p Q(A) = 0$ car $A^p = 0$ par hypothèse. Ainsi, $\boxed{\text{si } P \in \mathbb{K}[X] \text{ est un multiple de } X^p,\ P(A) = 0.}$

$\boxed{2.4.5}$ Si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ et que 0 n'est pas une racine de P, $P(0) = a_0 \neq 0$, classiquement, $\sum\limits_{k=1}^{d} a_k A^k = -a_0 I_n$ donc $A \times \left(-\dfrac{1}{a_0} \sum\limits_{k=1}^{d} a_k A^k \right) = \left(-\dfrac{1}{a_0} \sum\limits_{k=1}^{d} a_k A^k \right) \times A = I_n$ donc A serait inversible avec $A^{-1} = -\dfrac{1}{a_0} \sum\limits_{k=1}^{d} a_k A^k$ ce qui contredirait la question 2.4.1. Par contraposée, $\boxed{P(0) = 0 \text{ et } 0 \text{ est une racine de } P.}$

$\boxed{2.4.6}$ Par choix de x, on a $Q(u)(x) = 0_E$ donc $u^{p-1} \circ Q(u)(x) = u^{p-1}(Q(u)(x)) = u^{p-1}(0_E) = 0_E$. Si $Q = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ alors $u^{p-1} \circ Q(u)(x) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k u^{k+p-1}(x) = a_0 u^{p-1}(x)$ car $u^{k+p-1} = u^p \circ u^{k-1} = 0$ si $k \geqslant 1$ car $u^p = 0$. On a donc $a_0 u^{p-1}(x) = 0_E$ et $a_0 = Q(0) \neq 0$ donc $\boxed{u^{p-1}(x) = 0_E.}$

$\boxed{2.4.7}$ <u>Initialisation</u> : pour $k = 1$, $u^{p-k}(x) = u^{p-1}(x) = 0_E$ d'après la question précédente.

<u>Hérédité</u> : soit $k \in [\![1; p-1]\!]$ tel que $\forall i \in [\![1; k]\!]$, $u^{p-i}(x) = 0_E$ (récurrence forte), comme $p-k-1 \geqslant 0$, on calcule $u^{p-k-1} \circ Q(u)(x) = u^{p-k-1}(Q(u)(x)) = u^{p-k-1}(0_E) = 0_E$ donc $\sum\limits_{j=0}^{d} a_j u^{p-k-1+j}(x) = a_0 u^{p-k-1}(x) = 0_E$ car $u^{p-k-1+j}(x) = 0_E$ si $j \geqslant 1$ par hypothèse de récurrence. Comme $a_0 \neq 0$, on en déduit $u^{p-(k+1)}(x) = 0_E$.

Par principe de récurrence, $\boxed{\forall k \in [\![1; p]\!],\ u^{k-p}(x) = 0_E.}$

$\boxed{2.4.8}$ Pour $k = p$, on obtient $0_E = u^{p-p}(x) = id_E(x) = x$ dans 2.4.7. On a donc $\mathrm{Ker}(Q(u)) = \{0_E\}$ donc $Q(u)$ est un endomorphisme injectif en dimension finie donc, d'après le cours, $Q(u)$ est un automorphisme de E. Comme $Q(A)$ est la matrice de $Q(u)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, $\boxed{Q(A) \text{ est inversible.}}$

$\boxed{2.4.9}$ On a $P(A) = 0$ et $P = X^m Q$ donc $A^m Q(A) = 0$. Or $Q(A)$ est inversible donc $A^m = 0$ donc $m \geqslant p$ par définition de l'indice de nilpotence. On a alors $P = X^p \times X^{m-p} Q$ donc $\boxed{P \text{ est multiple de } X^p.}$

On vient de prouver que les polynômes annulateurs de A nilpotente d'indice p sont exactement les multiples de X^p. Autrement dit, le polynôme minimal de A est X^p.

PARTIE 3 : RACINES CARRÉES DE NILPOTENTES

$\boxed{3.1}$ Premier exemple :

$\boxed{3.1.1}$ Si $R^2 = B$ alors $BR = R^3 = RB$ donc $u \circ \rho = \rho \circ u$ et les endomorphismes u et ρ commutent. On sait alors grâce au cours que $\boxed{\mathrm{Im}\,(u) \text{ et } \mathrm{Ker}(u) \text{ sont stables par } \rho.}$ De plus, $R^4 = (R^2)^2 = B^2 = 0$ avec la question 1.2.3 donc $\rho^4 = 0$ ce qui montre que $\boxed{\rho \text{ est nilpotent.}}$

$\boxed{3.1.2}$ Avec les notations de la question 1.2, comme $B = P\,E_{2,1}P^{-1}$ et que P est inversible, on a l'équivalence $R^2 = B \iff (PR'P^{-1})^2 = PE_{2,1}P^{-1} \iff P(R')^2P^{-1} = PE_{2,1}P^{-1} \iff (R')^2 = E_{2,1} \quad (E)$.

Par formule de changement de base, $R' = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho)$ où $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Comme $\varepsilon_2 \in \text{Im}(u)$ et que $\text{Im}(u)$ est stable par ρ, on a $\rho(\varepsilon_2) \in \text{Im}(u) = \text{Vect}(\varepsilon_2)$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\rho(\varepsilon_2) = \alpha\varepsilon_2$. De même, $\varepsilon_3 \in \text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ est stable par ρ donc $\rho(\varepsilon_3) \in \text{Ker}(u) = \text{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ d'où l'existence de $(\beta, \gamma) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\rho(\varepsilon_3) = \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3$. Ainsi, $\boxed{\text{si } R = PR'P^{-1} \text{ et } R^2 = B,\ R' \text{ est de la forme } R' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \alpha & \beta \\ c & 0 & \gamma \end{pmatrix}.}$

$\boxed{3.1.3}$ Comme $(R')^2 = E_{1,2}$, après calculs, $(a^2 = \alpha^2 = \gamma^2 = 0$ et $ab+b\alpha+c\beta = 1$ et $ac+c\gamma = 0$ et $\alpha\beta+\beta\gamma = 0)$ qui se résout en $(a = \alpha = \gamma = 0$ et $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}^*$ et $\beta = c^{-1})$. Réciproquement, si $R = P\,R'\,P^{-1}$ avec $R' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c^{-1} \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}^*$, on calcule $R'^2 = E_{2,1}$ donc $R^2 = B$ avec l'équivalence (E).

Les solutions de $R^2 = B$ sont donc les matrices $\boxed{R = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c^{-1} \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } b \in \mathbb{C} \text{ et } c \in \mathbb{C}^*.}$

$\boxed{3.2}$ Second exemple :

$\boxed{3.2.1}$ Comme $R^2 = J_3$ alors $\boxed{R^4 = J_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{3,1} \text{ et } R^6 = J_3^3 = 0.}$

$\boxed{3.2.2}$ On a donc, toujours si $R^2 = J_3$, R nilpotente d'après 3.2.1 et $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ alors que $R^3 \neq 0$ et que $R^6 = 0$ donc que l'indice de nilpotence de R ne peut valoir que $p = 4$ ou $p = 5$, ce qui contredit le résultat de la question 2.4.3. Ainsi, R ne peut pas exister et $\boxed{\text{l'équation } R^2 = J_3 \text{ ne possède pas de solution.}}$

$\boxed{3.3}$ Cas général :

$\boxed{3.3.1}$ Si $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $R^2 = V$ avec V est nilpotente d'indice p alors $R^{2p} = (R^2)^p = V^p = 0$ donc R est nilpotente d'indice $q \leqslant 2p$ mais $R^{2(p-1)} = (R^2)^{p-1} = V^{p-1} \neq 0$ par définition de l'indice de nilpotence donc $q \geqslant 2(p-1)+1 = 2p-1$. On ne peut donc avoir que $q = 2p-1$ ou $q = 2p$.

D'après la question 2.4.3, $q \leqslant n$ donc $2p-1 \leqslant n$ ou $2p \leqslant n$. Ainsi, si $2p-1 > n$, on a a fortiori $2p > n$ donc $(2p-1 \leqslant n$ ou $2p \leqslant n)$ est impossible, interdisant d'avoir $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = V$. Par conséquent, on en déduit que $\boxed{\text{si } 2p-1 > n, \text{ l'équation } R^2 = V \text{ n'a pas de solution.}}$

$\boxed{3.3.2}$ Soit un entier $n \geqslant 3$, d'après la question 3.1.3, il existe $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = B$. Si on pose $M = \text{diag}(B, 0_{n-3}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $M^2 = \text{diag}(B^2, 0_{n-3}^2) = \text{diag}(0,0) = 0$ car $B^2 = 0$ donc la matrice M est nilpotente d'indice $p = 2$ car $M \neq 0$. Si $S = \text{diag}(R, 0_{n-3}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $S^2 = \text{diag}(R^2, 0_{n-3}^2) = M$.

Par conséquent, $\boxed{M = \text{diag}(B, 0_{n-3}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ possède au moins une racine carrée.}}$

PARTIE 4 : RÉDUCTION DES MATRICES NILPOTENTES

4.1 Si $y \in \mathrm{Im}\,(u)$, on a clairement $u(y) \in \mathrm{Im}\,(u)$ donc $\boxed{\mathrm{Im}\,(u) \text{ est stable par } u}$. On pouvait aussi dire que comme u commute avec u, d'après le cours, $\mathrm{Im}\,(u)$ est stable par u.
Si $y \in \mathrm{Im}\,(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et on a $v^{p-1}(y) = v^{p-1}(u(x)) = u^{p-1}(u(x)) = u^p(x) = 0_E$ car $u^p = 0$. Ainsi, v est nilpotent d'indice $q \leqslant p-1$. Comme u est nilpotent d'indice p, $u^{p-1} \neq 0$ donc il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Pour un tel x, on a $y = u(x) \in \mathrm{Im}\,(u)$ et $v^{p-2}(y) = u^{p-1}(x) \neq 0_E$ donc $v^{p-2} \neq 0$ et, par définition de l'indice de nilpotence, $\boxed{v \text{ est nilpotent d'indice } p-1.}$

4.2 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u\big(u^k(x)\big) = u^{k+1}(x) \in C_u(x)$. Tout vecteur a de $C_u(x)$ s'écrit par définition $a = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k u^k(x)$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \cdots, a_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$ donc, par linéarité de u, $u(a) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k u^{k+1}(x) \in C_u(x)$ donc $\boxed{C_u(x) \text{ est stable par } u.}$ Si on définit l'ensemble $I_x = \{k \in \mathbb{N} \mid u^k(x) = 0_E\}$, cet ensemble est une partie de $\mathbb{N}$, elle est non vide car $p \in I_x$ donc I_x admet un plus petit élément $s(x) = \mathrm{Min}(I_x)$. On a obligatoirement $s(x) \geqslant 1$ car si on avait $s(x) = 0$, on aurait $0_E = u^{s(x)}(x) = u^0(x) = \mathrm{id}_E(x) = x$ ce qui est contraire à l'hypothèse $x \neq 0_E$. Ainsi, $\boxed{\text{il existe un plus petit entier } s(x) \geqslant 1 \text{ tel que } u^{s(x)}(x) = 0_E.}$

4.3 Soit $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{s(x)-1}) \in \mathbb{C}^{s(x)}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{s(x)-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E \quad (1)$.
<u>Initialisation</u> : on applique $u^{s(x)-1}$ à la relation (1) de sorte qu'il ne reste que $\lambda_0 u^{s(x)-1}(x) = 0_E$ car $\forall j \geqslant s(x),\ u^j(x) = u^{j-s(x)}(u^{s(x)}(x)) = 0_E$. Comme $u^{s(x)-1}(x) \neq 0_E$ par minimalité de $s(x)$, $\lambda_0 = 0$.
<u>Hérédité</u> : soit $j \in [\![0; s(x)-2]\!]$ tel que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_j = 0$, on a donc $\sum\limits_{k=j+1}^{s(x)-1} \lambda_k u^k(x) = 0_E$ à laquelle on applique $u^{s(x)-2-j}$ pour avoir, comme avant, $\lambda_{j+1} u^{s(x)-1}(x) = 0_E$ donc $\lambda_{j+1} = 0$ car $u^{s(x)-1}(x) \neq 0_E$. On en déduit donc que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_j = \lambda_{j+1} = 0$.
Par principe de récurrence, $\forall j \in [\![0; s(x)-1]\!]$, $\lambda_0 = \cdots = \lambda_j = 0$ donc, pour $j = s(x)-1$, cela donne $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{s(x)-1} = 0$ donc $(x, u(x), \cdots, u^{s(x)-1}(x))$ est une famille libre de $C_u(x)$. Comme ci-dessus, tout vecteur a de $C_u(x)$ s'écrit par définition $a = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k u^k(x)$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \cdots, a_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$. Mais $u^k(x) = 0_E$ dès que $k \geqslant s(x)$ donc $a = \sum\limits_{k=0}^{\min(m, s(x)-1)} a_k u^k(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), \cdots, u^{s(x)-1}(x))$ donc $(x, u(x), \cdots, u^{s(x)-1}(x))$ est aussi génératrice de $C_u(x)$.
Ainsi, $\boxed{\mathcal{B}_x = (x, \cdots, u^{s(x)-1}(x)) \text{ est une base de } C_u(x).}$ Comme $w_x(u^j(x)) = u(u^j(x)) = u^{j+1}(x)$ pour tout $j \in [\![0; s(x)-2]\!]$ et $w_x(u^{s(x)-1}(x)) = u(u^{s(x)-1}(x)) = u^{s(x)}(x) = 0_E$, on a $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_x}(w_x) = J_{s(x)}.}$

4.4 <u>Initialisation</u> : pour $p = 1$, on a $u = u^p = 0$ donc $C_u(x) = \mathrm{Vect}(x)$ pour tout vecteur $x \neq 0_E$ car $s(x) = 1$. Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une base de E, ainsi $E = \bigoplus\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{Vect}(x_i) = \bigoplus\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} C_u(x_i)$ donc le résultat est vrai pour $p = 1$.
<u>Hérédité</u> : soit $p \in \mathbb{N}^*$, on suppose que pour tout endomorphisme nilpotent d'indice $p-1$ d'un sous-espace F quelconque, une telle décomposition de F existe. On choisit alors u nilpotent d'indice p de E. D'après 4.1, l'endomorphisme v induit par u sur $\mathrm{Im}\,(u)$ est nilpotent d'indice $p-1$. Par hypothèse de récurrence, il existe

$(y_1,\cdots,y_t) \in \mathrm{Im}\,(u)^t$ non nuls tel que $\mathrm{Im}\,(u) = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant t} C_v(y_i)$ (D). Pour $i \in [\![1;t]\!]$, comme $y_i \in \mathrm{Im}\,(u)$, il existe $x_i \in E$ tel que $y_i = u(x_i)$. On commence alors par vérifier $s_u(x_i) = s_v(y_i) + 1$ (avec des notations claires). En effet, $u^{s_v(y_i)+1}(x_i) = u^{s_v(y_i)}(y_i) = v^{s_v(y_i)}(y_i) = 0_E$ donc $s_u(x_i) \leqslant s_v(y_i) + 1$ par minimalité de $s_u(x_i)$. Puis $u^{s_v(y_i)}(x_i) = u^{s_v(y_i)-1}(y_i) = v^{s_v(y_i)-1}(y_i) \neq 0_E$ donc $s_u(x_i) \geqslant 1 + s_v(y_i)$. On a donc bien $s_u(x_i) = s_v(y_i) + 1$ et $\mathrm{dim}(C_u(x_i)) = s_u(x_i) = 1 + s_v(y_i) = 1 + \mathrm{dim}(C_v(y_i))$ d'après 4.3.

Soit $i \in [\![1;t]\!]$, comme $y_i = u(x_i) = u^1(x_i) \neq 0_E$, on a $s(x_i) \geqslant 2$. De plus, $u^{s(x_i)-1}(x_i) \neq 0_E$ par minimalité de $s(x_i)$ et $u^{s(x_i)-1}(x_i) = u^{s(x_i)-2}(y_i) = v^{s(x_i)-2}(y_i) \in \mathbb{C}_v(y_i)$. De plus, $u(u^{s(x_i)-1}(x_i)) = u^{s(x_i)}(x_i) = 0_E$ donc, comme $E = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant t} C_v(y_i)$, cette somme étant directe, la famille $(u^{s(x_1)-1}(x_1),\cdots,u^{s(x_t)-1}(x_t))$ est une famille libre de vecteurs de $\mathrm{Ker}(u)$. On peut donc compléter cette famille libre par $z_1,\cdots,z_q$ de façon à former une base $(u^{s(x_1)-1}(x_1),\cdots,u^{s(x_t)-1}(x_t),z_1,\cdots,z_q)$ de $\mathrm{Ker}(u)$. Avec les notations précédentes, on a donc $\mathrm{dim}(\mathrm{Ker}(u)) = t + q$. Comme $z_k \in \mathrm{Ker}(u)$, on a $u(z_k) = 0_E$ donc $s(z_k) = 1$ et $C_u(z_k) = \mathrm{Vect}(z_k)$.

Si $x \in E$, on a $u(x) \in \mathrm{Im}\,(u)$ donc $u(x) = \sum_{i=1}^{t} y_i'$ avec $y_i' \in C_v(y_i)$ grâce à la décomposition (D) donc $y_i' = \sum_{k=0}^{s_v(y_i)-1} \alpha_k v^k(y_i) = \sum_{k=0}^{s_u(x_i)-2} \alpha_k u^{k+1}(x_i) = u(y_i'')$ avec $y_i'' = \sum_{k=0}^{s(x_i)-2} \alpha_k u^k(x_i) \in C_u(x_i)$. On pose alors $x' = x - \sum_{i=1}^{t} y_i''$ de sorte que $u(x') = u(x) - \sum_{i=1}^{t} u(y_i'') = u(x) - \sum_{i=1}^{t} y_i' = 0_E$ donc $x' \in \mathrm{Ker}(u)$ d'où, avec la base de $\mathrm{Ker}(u)$ trouvée ci-dessus, $x = x' + \sum_{i=1}^{t} y_i'' \in \Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant t} C_u(x_i)\Big) + \Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant q} C_u(z_i)\Big)$ ce qui montre déjà que $E = \Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant t} C_u(x_i)\Big) + \Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant q} C_u(z_i)\Big)$. Au niveau des dimensions, avec ce qui précède, on obtient $\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant t} \mathrm{dim}(C_u(x_i))\right) + \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant q} \mathrm{dim}(C_u(z_i))\right) = \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant t} s_u(x_i)\right) + \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant q} 1\right) = \mathrm{dim}(\mathrm{Im}\,(u)) + t + q$ qui vaut $\mathrm{rang}\,(u) + \mathrm{dim}(\mathrm{Ker}(u)) = \mathrm{dim}(E)$ avec la formule du rang donc, grâce au cours, la somme précédente est directe. On a donc $E = \left(\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant t} C_u(x_i)\right) \oplus \left(\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant q} C_u(z_i)\right)$ ce qui clôt la partie hérédité.

Par principe de récurrence, pour tout endomorphisme nilpotent de E, il existe $t \in \mathbb{N}^*$ et des vecteurs $x_1,\cdots,x_t$ non nuls de E tels que $E = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant t} C_u(x_i)$.

4.5 Comme à la question 4.3, on a $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(J_{s(x_1)},\cdots,J_{s(x_t)})}$: c'est une réduction de Jordan.

DS 02 : LA BELLE ÉQUIPE

PSI1 2025/2026 **samedi 27 septembre 2025**

1 • Soit $y \in \mathrm{Im}\,(u \circ v)$, il existe donc $x \in E$ tel que $y = u \circ v(x) = u(v(x))$ donc $y \in \mathrm{Im}\,(u)$.

• Soit $x \in \mathrm{Ker}(v)$, $v(x) = 0_E$ donc $u \circ v(x) = u(v(x)) = u(0_E) = 0_E$ car u est linéaire donc $x \in \mathrm{Ker}(u \circ v)$.

Ainsi, on a les inclusions $\boxed{\mathrm{Im}\,(u \circ v) \subset \mathrm{Im}\,(u) \text{ et } \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u \circ v).}$

$\boxed{2}$ **Interne :**

$\boxed{2.1}$ Comme $E = F \oplus G$, on décompose $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$ et on a $g(z) = g(x+y) = g(x) + g(y) = g(x)$ car $y \in G = \mathrm{Ker}(g)$ puisque $g \in A$. On a alors $g(x) \in F = \mathrm{Im}\,(g)$ et $f(g(x)) = f(g(z)) = f \circ g(z) = 0_E$ car $z \in \mathrm{Ker}(f \circ g)$ donc $g(x) \in \mathrm{Ker}(f) = G$ car $f \in A$. Par conséquent, $g(x) \in F \cap G = \{0_E\}$ donc $g(x) = 0_E$. Ceci prouve que $x \in \mathrm{Ker}(g) = G$ et, comme $x \in F$, il vient $x \in F \cap G = \{0_E\}$ donc $x = 0_E$. Ainsi, $\boxed{z = y \in G.}$

$\boxed{2.2}$ Comme $z \in F = \mathrm{Im}\,(f)$ car $f \in A$, il existe $a \in E$ tel que $z = f(a)$. On décompose $a = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$ car $E = F \oplus G$. Ainsi, $z = f(a) = f(x + y) = f(x) + f(y) = f(x)$ car $y \in G = \mathrm{Ker}(f)$. Comme $x \in F = \mathrm{Im}\,(g)$ car $g \in A$, il existe $b \in E$ tel que $x = g(b)$ et donc $\boxed{z = f(x) = f(g(b)) = f \circ g(b) \in \mathrm{Im}\,(f \circ g).}$

$\boxed{2.3}$ Les deux précédentes questions permettent d'établir que $\mathrm{Ker}(f \circ g) \subset G$ et que $F \subset \mathrm{Im}\,(f \circ g)$. De plus, d'après la question 1, on a $G = \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f \circ g)$ et $\mathrm{im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}\,(f) = F$. Ainsi, par double inclusion, on trouve $\mathrm{Im}\,(f \circ g) = F$ et $\mathrm{Ker}(f \circ g) = G$ donc $\boxed{f \circ g \in A}$: $\circ$ est une loi de composition interne dans A.

$\boxed{3}$ **Neutre** : soit $x \in E$ qu'on écrit $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G$ car $E = F \oplus G$. Comme $\mathrm{Im}\,(p) = F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(p) = G$, on a $p(a) = a$ et $p(b) = 0_E$ donc $p(x) = p(a) + p(b) = a$ d'où $f \circ p(x) = f(p(x)) = f(a)$. Or $b \in G = \mathrm{Ker}(f)$ car $f \in A$ et $f(x) = f(a) + f(b) = f(a) \in F = \mathrm{Im}\,(p)$ donc $p \circ f(x) = p(f(a)) = f(a) = f \circ p(x)$. Ceci étant valable pour tout vecteur $x \in E$, on a $\boxed{p \circ f = f \circ p = f}$: p est le neutre pour la loi $\circ$ dans A.

$\boxed{4}$ **Inversibilité :**

$\boxed{4.1}$ Comme $F = \mathrm{Im}\,(f)$ car $f \in A$, F est stable par f et on peut bien défini $\widetilde{f} : F \to F$ telle que $\forall x \in F$, $\widetilde{f}(x) = f(x)$. De plus, $\widetilde{f}$ est linéaire car f l'est, et on a $\boxed{\text{l'existence de l'endomorphisme } \widetilde{f} \text{ induit par } f \text{ dans } F = \mathrm{Im}\,(f).}$

$\boxed{4.2}$ Comme $F = \mathrm{Im}\,(f)$ et $G = \mathrm{Ker}(f)$ car $f \in A$ et que $E = F \oplus G$ par hypothèse, le sous-espace $\mathrm{Im}\,(f)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ donc, par la version géométrique du théorème du rang, f induit un isomorphisme (ici un automorphisme) de $\mathrm{Im}\,(f)$ dans $\mathrm{Im}\,(f)$. Ainsi, $\boxed{\widetilde{f} \text{ est un automorphisme de } F.}$

$\boxed{4.3}$ Soit $(x, x') \in E^2$ et $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$, on décompose $x = y + z$ et $x' = y' + z'$ avec $(y, y') \in F^2$ et $(z, z') \in G^2$. Comme $\lambda x + \lambda' x' = (\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda' z')$ avec $\lambda y + \lambda' y' \in F$ et $\lambda z + \lambda' z' \in G$ car F et G sont des sous-espaces de E, la définition de g donne $g(\lambda x + \lambda' x') = \widetilde{f}^{-1}(\lambda y + \lambda' y') = \lambda \widetilde{f}^{-1}(y) + \lambda' \widetilde{f}^{-1}(y')$ car $\widetilde{f}^{-1}$ est linéaire donc $g(\lambda x + \lambda' x') = \lambda g(x) + \lambda' g(x')$ ce qui montre bien que $\boxed{g \in \mathcal{L}(E).}$

$\boxed{4.4}$ Avec les notations de l'énoncé, montrons par double inclusion que $\mathrm{Im}\,(g) = F$ et $\mathrm{Ker}(g) = G$.
($\subset$) Soit $v \in \mathrm{Im}\,(g)$, il existe $x \in E$ tel que $v = g(x) = \widetilde{f}^{-1}(y) \in F$ car $\widetilde{f} \in GL(F)$.
($\supset$) Soit $y \in F$, par bijectivité de $\widetilde{f}$, comme $\widetilde{f}(y) \in F$, on a $g(\widetilde{f}(y)) = \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{f}(y)) = y \in \mathrm{Im}\,(g)$.
($\subset$) Si $x = y + z \in \mathrm{Ker}(g)$ où $(y, z) \in F \times G$, $g(x) = \widetilde{f}^{-1}(y) = 0_E$ et $y = 0_E$ car $\widetilde{f}^{-1} \in GL(F)$ donc $x = z \in G$.
($\supset$) Soit $x \in G$ alors $x = x + 0_E$ avec $x \in F$ et $0_E \in G$ donc $g(x) = \widetilde{f}^{-1}(0_E) = 0_E$ d'où $x \in \mathrm{Ker}(g)$.

On vient de montrer que $\mathrm{Im}\,(g) = F$ et $\mathrm{Ker}(g) = G$ et $g \in \mathcal{L}(E)$ avec 4.3, ainsi $\boxed{g \in A.}$

Si $x = y + z \in E$ avec $y \in F$ et $z \in G$, on a $p(x) = y$ donc $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\widetilde{f}^{-1}(y)) = \widetilde{f}(\widetilde{f}^{-1}(y)) = y$ mais aussi $g \circ f(x) = \widetilde{f}^{-1}(f(x))$ car $f(x) = f(y) + f(z) = f(y) \in F$ donc $g \circ f(x) = \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{f}(y)) = y$. Par conséquent, $f \circ g(x) = g \circ f(x) = y = p(x)$. Comme ces égalités sont valables pour tout $x \in E$, $\boxed{f \circ g = g \circ f = p.}$

$\boxed{5}$ On a vu en question 2 que $\circ$ est une loi de composition interne dans A, et la composition est toujours associative. De plus, en question 3, on a prouvé que p est neutre pour $\circ$ dans A et en question 4 que tout élément $f \in A$ admettait un "symétrique", c'est-à-dire un $g \in A$ tel que $f \circ g = g \circ f = p$.

Ainsi, $\boxed{(A, \circ) \text{ est un groupe (non abélien en général).}}$