

DS 02 : INSPIRÉ DE CENTRALE PSI 2019 M2

PSI1/2 2025/2026

samedi 27 septembre 2025

NOTATIONS ET RAPPELS :

Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n .

Une matrice M est dite nilpotente s'il existe un entier naturel $k \geq 1$ tel que $M^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel $k \geq 1$ tel que $M^k = 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de M . On a donc par définition $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$ si M est nilpotente d'indice p .

Soit $\mathcal{B}$ une base de E , un endomorphisme de E est nilpotent d'indice p si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est nilpotente

d'indice p . On pose $J_1 = (0) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ et, pour un entier $\alpha \geq 2$, $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

On a donc en particulier $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, on note $\text{diag}(A, B) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale par blocs et, plus généralement, si $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$, $\dots$, $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, on note

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\dots+n_k}(\mathbb{C}).$$

PARTIE 1 : DEUX EXEMPLES

1.1 Le premier : on considère ici la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

1.1.1 Vérifier que A est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence.

1.1.2 Que valent $\text{Tr}(A)$ et $\det(A)$?

1.1.3 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à la matrice A . On pose $\varepsilon_1 = (1, 0)$ et $\varepsilon_2 = u(\varepsilon_1)$.

Vérifier que $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{C}^2$.

1.1.4 En déduire que A est semblable à J_2 et donner une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible telle que $A = PJ_2P^{-1}$.

1.2 Le second : ici $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à B .

1.2.1 On pose $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$ et $\varepsilon_2 = u(\varepsilon_1)$. Vérifier que $\varepsilon_2 \in \text{Ker}(u)$.

1.2.2 Déterminer un vecteur ε_3 de $\mathbb{C}^3$ tel que $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ soit une base de $\text{Ker}(u)$.

1.2.3 Démontrer que B est semblable à la matrice $\text{diag}(J_2, J_1)$. Justifier que B est nilpotente et donner son indice. Donner la valeur d'une matrice P inversible telle que $B = P \text{diag}(J_2, J_1) P^{-1}$.

PARTIE 2 : PREMIERS RÉSULTATS

2.1 Que peut-on dire d'un endomorphisme nilpotent d'indice 1 ?

2.2 Réduction d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ d'indice 2 : on suppose dans cette question que $n = 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

2.2.1 On suppose que $p \geq 3$. Justifier qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(x, u(x), u^2(x))$ est libre. Conclure que $p = 2$.

2.2.2 Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$.

2.2.3 Construire une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à J_2 .

2.2.4 Prouver que les matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sont les matrices de trace et déterminant nuls.

2.3 Réduction d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ d'indice 2 : on suppose dans cette question que $n \geq 3$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice 2 et de rang r .

2.3.1 Montrer que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ et que $2r \leq n$.

2.3.2 On suppose dans cette question que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E tels que la famille $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ soit une base de E . Donner $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

2.3.3 On suppose dans cette question que $\text{Im}(u) \neq \text{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E et des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}$ de $\text{Ker}(u)$ tels que $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$ soit une base de E . Quelle est la matrice de u dans cette base $\mathcal{B}$?

2.4 Polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente : dans cette question, A désigne une matrice nilpotente d'indice $p \geq 2$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et u l'endomorphisme de $E = \mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A .

2.4.1 Justifier que A n'est pas inversible.

2.4.2 Justifier qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$ et montrer que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre.

2.4.3 En déduire $p \leq n$ puis que X^n annule u .

2.4.4 Démontrer que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ multiple de X^p est un polynôme annulateur de A .

On suppose pour la suite de cette question que P est un polynôme annulateur de A .

2.4.5 Démontrer que 0 est racine de P .

On note m la multiplicité de la racine 0 dans le polynôme P , ce qui permet d'écrire $P = X^m Q$ où Q est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$. Soit x un vecteur de $\mathbb{C}^n$ appartenant au noyau de $Q(u)$: $Q(u)(x) = 0_E$.

2.4.6 Calculer $u^{p-1} \circ Q(u)(x)$ et en déduire $u^{p-1}(x) = 0_E$.

2.4.7 Montrer par récurrence sur $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ que $u^{p-k}(x) = 0_E$. Indication : on pourra considérer $u^h \circ Q(u)(x)$ pour des entiers h bien choisis.

2.4.8 En déduire que $Q(A)$ est inversible.

2.4.9 Montrer que P est un multiple de X^p .

PARTIE 3 : RACINES CARRÉES DE NILPOTENTES

Pour $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée, on dit qu'une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une racine carrée de V si $R^2 = V$.

On se propose d'étudier l'existence et les valeurs de racines carrées éventuelles de matrices nilpotentes.

3.1 Premier exemple : comme en question 1.2, soit ici la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à B .

Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = B$, on note ρ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à R .

3.1.1 Démontrer que $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont stables par ρ et que ρ est nilpotent.

3.1.2 Soit P la matrice introduite à la question 1.2.3 (la valeur exacte de cette matrice n'est pas nécessaire) et $R' = P^{-1}RP$. Montrer d'abord qu'il existe des complexes $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ tels que $R' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \alpha & \beta \\ c & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

3.1.3 En déduire l'ensemble des racines carrées de B . On pourra présenter les matrices R qui conviennent sous la forme $PR'P^{-1}$ en donnant la forme des matrices R' .

3.2 Second exemple : soit ici une matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = J_3$.

3.2.1 Donner les valeurs de R^4 et R^6

3.2.2 En déduire l'ensemble des racines carrées de J_3 .

3.3 Cas général : soit $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p .

3.3.1 Montrer que si $2p - 1 > n$, il n'existe aucune racine carrée de V .

3.3.2 Pour toute valeur de l'entier $n \geq 3$, exhiber une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice $p \geq 2$ et admettant au moins une racine carrée.

PARTIE 4 : RÉDUCTION DES MATRICES NILPOTENTES

On suppose que $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p \geq 2$.

4.1 Démontrer que $\text{Im}(u)$ est stable par u et que l'endomorphisme v induit par u sur $\text{Im}(u)$ est nilpotent. Préciser son indice de nilpotence.

4.2 Pour tout vecteur x non nul de E , on note $C_u(x)$ l'espace vectoriel engendré par les $(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$. Démontrer que $C_u(x)$ est stable par u et qu'il existe un plus petit entier $s(x) \geq 1$ tel que $u^{s(x)}(x) = 0$.

4.3 Démontrer que $(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ est une base de $C_u(x)$ et donner la matrice, dans cette base, de l'endomorphisme w_x induit par u sur $C_u(x)$.

4.4 Démontrer par récurrence sur p qu'il existe des vecteurs $x_1, \dots, x_t$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$.

Indication : on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme v induit par u sur $\text{Im}(u)$.

4.5 Donner la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^t C_u(x_i)$.

DS 02 : LA BELLE ÉQUIPE

PSI1 2025/2026

samedi 27 septembre 2025

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et deux sous-espaces vectoriels de E notés F et G tels que $E = F \oplus G$ (F et G sont supplémentaires dans E).

On pose alors $A = \{ f \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im}(f) = F \text{ et } \text{Ker}(f) = G \}$.

On notera p la projection sur F parallèlement à G .

1 Soit u et v deux endomorphismes quelconques de E , énoncer des inclusions entre $\text{Im}(u \circ v)$ et $\text{Im}(u)$ d'une part, puis entre $\text{Ker}(u \circ v)$ et $\text{Ker}(v)$ d'autre part, et les démontrer.

2 Interne : soit dans cette question deux éléments f et g de A . On a donc déjà $f \circ g \in \mathcal{L}(E)$.

2.1 Soit $z \in \text{Ker}(f \circ g)$. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in F$ tel que $g(z) = g(x)$.

Établir que $g(x) \in F \cap G$ et en déduire que $x = 0_E$. Qu'en conclut-on sur z ?

2.2 Soit $z \in F$, justifier qu'il existe un vecteur $x \in F$ tel que $z = f(x)$. Montrer alors que $z \in \text{Im}(f \circ g)$.

2.3 Justifier que $f \circ g \in A$.

3 Neutre : montrer que si $f \in A$, alors $f \circ p = p \circ f = f$.

4 Inversibilité : soit dans cette question une application $f \in A$.

4.1 Justifier qu'on peut définir l'endomorphisme $\tilde{f} : F \rightarrow F$ induit par f dans F défini par $\forall x \in F, \tilde{f}(x) = f(x)$.

4.2 Montrer que $\tilde{f}$ est un automorphisme de F .

On définit alors l'application $g : E \rightarrow E$ de la manière suivante : pour $x \in E = F \oplus G$ qu'on décompose de manière unique $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$, on pose $g(x) = (\tilde{f})^{-1}(y)$.

4.3 Montrer que g est un endomorphisme de E .

4.4 Établir que $g \in A$ et que $g \circ f = f \circ g = p$.

5 Que vient-on de prouver quant à la structure de A ?