TD 06 : INTÉGRATION

PSI 1 2025-2026 **vendredi 10 octobre 2025**

6.1 *Centrale PSI 2015* Agatha Courtenay Soit $a \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Soit f une solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation (E) : $y''+(1+a)y = 0$. Posons $g : x \mapsto f(x)+\int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t)dt$.

a. Est-ce que $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = 0$?

b. Montrer que $g'' + g = 0$.

c. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leqslant C + \int_0^x |a(t)f(t)|dt$.

d. Conclure quant aux solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

6.2 *OdlT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 277II* Soit $g : [0; 1] \to \mathbb{R}$ continue.

a. Montrer que $G : x \to \dfrac{1}{2}\int_0^1 |x - t|g(t)dt$ est de classe C^2 sur $[0; 1]$ et calculer G''.

b. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) = G(x) + ax + b$ vérifie $f'' = g$ et $f(0) = f(1) = 0$.

c. Existe-t-il d'autres fonctions f vérifiant ces conditions ?

6.3 *Centrale PSI 2016* Marine Saint-Mézard Soit $a < b$ deux réels et f de classe C^1 sur $[a; b]$.

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)dt$.

a. Montrer que cette suite tend vers 0.

b. Montrer l'existence de $A = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}dt$. On admettra que cette intégrale vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

c. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \dfrac{1}{n}\int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin(nt)^2}{\sin(t)^2}dt$.

Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calcul de son éventuelle limite.

6.4 *OdlT 2016/2017 CCP PSI planche 218I*

Trouver a, b et c tels que $\dfrac{2x+1}{x(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$.

On admet que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$; montrer que $I = \int_0^1 t\left\lfloor \dfrac{1}{t} \right\rfloor dt$ existe et la calculer.

6.5 *Mines PSI 2017* Alexandre Chamley II

On définit f par $f(x) = \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{\ln(t)}$. Justifier que f se prolonge par continuité en 0 et en 1.

Tracer le graphe de f. Montrer l'existence et trouver la valeur de $\int_0^1 \dfrac{x-1}{\ln(x)}dx$.

6.6 *E3A PSI 2018* Peio Betbeder Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$.

a. Calculer I_0 et I_1. Étudier le sens de variation de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \dfrac{n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^2)^{3/2}dx$. En déduire une relation entre I_{n+1} et I_{n-1}.

c. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ 0 < \dfrac{n}{n+3}I_{n-1} < I_n < I_{n-1}$. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n-1}$.

On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $u_n = n(n+1)(n+2)I_nI_{n-1}$.

d. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

6.7 *CCP PSI 2019* Elaia Mugica I

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, une fonction continue $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ telle que $\forall x \in [a;b],\ f(x) = f(a+b-x)$.

a. Montrer que $\displaystyle\int_a^b tf(t)dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt$.

b. En déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}dt$.

6.8 *Petites Mines PSI 2019* Thibault Maury I

a. Justifier l'existence de $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2-x^3)^{1/3}}$.

b. On admet que $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{du}{u^2-u+1}$. Calculer une valeur exacte de I.

6.9 *X PSI 2020* Victor Barberteguy I

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient les conditions suivantes :

- $f(0) = 0$
- f' croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$
- $\forall x \geqslant 0,\ \displaystyle\int_0^x f'(t)^2 dt \geqslant f(x+f(x)) - f(x)$.

6.10 *Mines PSI 2022* Tony Géreaud II Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(xy) = f(x)+f(y)$ (1).

a. Calculer $f(1)$. Pour $x \in]0;+\infty[$, comparer $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

b. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = \displaystyle\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)dt - \int_1^2 f(t)dt$.

c. Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et en déduire f.

6.11 *Mines PSI 2021 et 2022* Esteban Poupinet I et Colin Herviou-Laborde I

a. Montrer que la fonction $\cos$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

c. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$.

6.12 *Mines PSI 2024* Nathan Jung I

a. Montrer que la fonction $I : x \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos(\theta)+1)d\theta$ est bien définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

b. Donner une expression simplifiée de $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c. En déduire la valeur de $I(x)$ pour $x \in D$.

6.13 *Mines PSI 2024* Antoine Métayer II

Soit $s \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N(s) = \displaystyle\left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s}\right) - \frac{N^{1-s}}{1-s}$ et, en cas d'existence, $\zeta(s) = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N(s)$.

a. Montrer que $\zeta(s)$ est bien définie si $\mathrm{Re}(s) > 1$.

b. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s} = \int_1^{N+1} \frac{1}{\lfloor t\rfloor^s}dt$.

c. Si $\mathrm{Re}(s) > 0$, après avoir justifié l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t^s} - \frac{1}{\lfloor t\rfloor^s}\right)dt$, montrer que $\zeta(s)$ existe et qu'on a $\zeta(s) = \displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{\lfloor t\rfloor^s} - \frac{1}{t^s}\right)dt + \frac{1}{s-1}$.