

TD 07 : INTÉGRATION

PSI 1 2025-2026

vendredi 17 octobre 2025

7.1 E3A PSI 2015 Charlotte Sapaly Calcul de $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(x)} dx$. Indication : poser $\tan(x) = u^2$.

7.2 CCP PSI 2017 Maxime Lacourcelle II Soit E l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et 2π -périodiques.

On pose $c(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$ et $g : t \mapsto f(t) - c(f)$ si $f \in E$.

a. Étudier la convergence, pour $\alpha > 1$ et $f \in E$, de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$.

b. Si $f \in E$, montrer que f a ses primitives 2π -périodiques si et seulement si $c(f) = 0$.

c. Si $f \in E$, est-ce que $g \in E$? Calculer $c(g)$.

d. Montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t} dt$.

e. Trouver, si $c(f) \neq 0$, un équivalent en $+\infty$ de $\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$.

f. Dédire des questions précédentes la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$.

7.3 Mines PSI 2019 Tanguy Sommet II Soit $y \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que y^2 et y''^2 sont intégrables sur \mathbb{R}_+ .

a. Trouver une primitive de $y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2$.

b. Montrer que $\int_0^{+\infty} yy''$ converge. En déduire que $\int_0^{+\infty} y'^2$ converge.

c. Établir que $\int_0^{+\infty} yy'$ converge. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

d. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$.

e. Montrer que $\int_0^{+\infty} y'^2 \leq \int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2$.

f. Quelles sont les fonctions pour lesquelles $\int_0^{+\infty} y'^2 = \int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2$.

7.4 Centrale Maths1 PSI 2021 Clotilde Cantini

On admet la convergence $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$, on note I sa valeur. On définit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt$.

a. Montrer que f est définie sur \mathbb{R} .

b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = I$ et calculer la limite de f en $+\infty$.

c. Montrer que $I = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+k\pi} du$. En déduire que f n'est pas continue en 0.

7.5 Mines PSI 2022 Anatole Rousset I Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

a. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta} t^n}{1 - e^{i\theta} t} dt$.

b. En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge et montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} t} dt$.

c. Établir $\int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t + i \sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt = -\frac{1}{2} \ln(2 - 2 \cos(\theta)) + i \operatorname{Arctan}\left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + i \operatorname{Arctan}\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$.

d. En déduire que si $\theta \in]0; \pi[$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = -\ln\left(2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$.

7.6 Mines PSI 2022 Guillaume Tran-Ruesche II Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer l'existence et donner la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-(1-i)t} t^n dt$.
- Trouver la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^{1/4}} \sin(t^{1/4}) t^n dt$.

7.7 Centrale Maths1 PSI 2024 Jules Campistron

Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0\}$. Pour $f \in E$, on définit $(E_f) : y' - y + f(x) = 0$.

- Montrer que E est un espace vectoriel.
- Montrer que la fonction $g : x \mapsto e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est l'unique solution de (E_f) appartenant à E .

7.8 Centrale Maths1 PSI 2024 Mathis Laruelle Soit $f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t) dt$ et $\Phi(x) = x f(x) f(x-1)$.

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Phi(x+1) = \Phi(x)$.
- Montrer que $x \mapsto \frac{\Phi(x)}{x}$ est décroissante. En déduire que Φ est constante sur \mathbb{R}_+^* .
- En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

7.9 Centrale Maths1 PSI 2024 Arya Tabrizi

- Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $t \mapsto e^{-zt}$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$ ou $z = 0$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt$ converge si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Soit $(z, z_0) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$, une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) dt$ converge. On définit $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ par $F(x) = \int_0^x e^{-z_0 t} f(t) dt$.

- Montrer que F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et qu'elle y est bornée.
- Montrer que $t \mapsto e^{-(z-z_0)t} F(t)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .
- Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$ converge et qu'on a $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$.

7.10 Mines PSI 2024 Armand Dépée II

Montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \left(\operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right) dx$ et calculer sa valeur.

7.11 X PSI 2024 Jules Campistron II Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = q > 0$.

- Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\psi :]-\alpha; \beta[\rightarrow]-\alpha; \beta[$ tels que $\forall x \in]-\alpha; \beta[$, $f(x) = -f(\psi(x))$.
- Montrer que ψ est de classe C^1 .

7.12 Mines PSI 2016 (3) et CCINP PSI 2024 Pauline Bourda, Marie Rebière, Séb. Sequeira, Yasmine Azzaoui I

- Montrer que f définie par $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* . Calculer $f'(x)$.
- Montrer que $\forall x > 0$, $f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.
- Montrer que $\forall x > 0$, $f(x) = -e^{-x} \ln(x) + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.
- Calculer $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.