

DM 3 : DIRICHLET ET COMPAGNIE

PSI1 2025/2026

pour samedi 18 octobre 2025

Notations et objectifs

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et en cas de convergence de l'intégrale, on note $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt} dt$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, et en cas de convergence de l'intégrale, on note $J_m = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$.

PARTIE 1 : ÉTUDE DE φ

1.1 Étude de fonctions. Étudier $d : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $\delta : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par $d(t) = t - 1 + \cos(t)$ et $\delta(t) = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos(t)$. En déduire deux réels α et β telles que $\forall t > 0$, $0 \leq \frac{1 - \cos(t)}{t} \leq \alpha$ et $0 \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \leq \beta$.

1.2 Existence de la fonction φ sur $[0; +\infty[$. Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$.
En déduire que $\varphi(x)$ existe pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$.

1.3 Limite de la fonction φ en $+\infty$. Préciser le signe de $\varphi(x_1) - \varphi(x_2)$ pour $0 \leq x_1 \leq x_2$.
En déduire que la fonction φ admet une limite finie λ en $+\infty$.
Déterminer la valeur de λ (on pourra utiliser **1.1**).

1.4 Caractère C^k de la fonction φ : soit un réel $a > 0$.

1.4.1 Pour $t > 0$ fixé, on définit $f_t : \left[\frac{a}{2}; +\infty\right[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f_t(x) = e^{-xt}$. En appliquant une formule de TAYLOR à la fonction f_t , montrer que $\forall x \geq \frac{a}{2}$, $|e^{-xt} - e^{-at} + (x - a)te^{-at}| \leq \frac{(x - a)^2}{2} t^2 e^{-at/2}$.

1.4.2 En déduire que $\left| \varphi(x) - \varphi(a) + (x - a) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-at} dt \right| \leq \frac{(x - a)^2}{2} \int_0^{+\infty} (1 - \cos t) e^{-at/2} dt$ si $x \geq \frac{a}{2}$. Établir que φ est dérivable en a et donner l'expression de $\varphi'(a)$ à l'aide d'une intégrale.

De même, et on l'admet ici, φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x > 0$, $\varphi''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos t) e^{-xt} dt$.

1.4.3 Expliciter $\varphi''(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$. En déduire la valeur de $\varphi'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$.

1.5 Expression explicite de la fonction $\varphi(x)$.

1.5.1 Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right)$. Expliciter une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x^2)$.

1.5.2 Expliciter $\varphi(x)$ pour $x > 0$. Déterminer $\varphi(0)$. La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

PARTIE 2 : ÉTUDE DE L'EXISTENCE DE J_m

2.1 Étude de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$. Justifier la convergence de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, en cas de convergence de l'intégrale, on note $I_k = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t} dt$.

2.2 Étude de J_1 . Justifier l'existence de J_1 et établir une relation entre J_1 et $\varphi(0)$ (on pourra utiliser une intégration par parties et choisir judicieusement la constante d'intégration).

2.3 Étude de l'existence de I_k . Préciser la nature de l'intégrale généralisée I_k selon la valeur de l'entier relatif k (on pourra utiliser une intégration par parties).

2.4 Étude de la nature de J_m .

Pour tout x appartenant à $\left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right[$ et tout entier relatif k , on note $I_k(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{e^{ikt}}{t} dt$.

2.4.1 Exprimer, pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right[$, l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{(\sin t)^m}{t} dt$ à l'aide des intégrales $I_k(x)$.

2.4.2 En déduire l'existence de J_{2p+1} pour tout entier naturel p (donc la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p+1}}{t} dt$).

2.4.3 Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p}}{t} dt$ pour $p \in \mathbb{N}^*$?

2.4.4 Pour $p \in \mathbb{N}^*$, la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p+1}}{t} dt$ est-elle absolue ?

PARTIE 3 : CALCUL DE J_{2p+1}

3.1 Étude d'un procédé de calcul.

On désigne par f une fonction continue sur $[-1; 1]$, à valeurs réelles, impaire et dérivable en 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\gamma_n = \int_{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2} + n\pi} \frac{f(\sin(t))}{t} dt$ et $\mu_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2tf(\sin(t))}{t^2 - n^2\pi^2} dt$.

On admettra la relation suivante (en posant $\frac{\sin(0)}{0} = 1$), $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\sin(x)}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x \sin(x)}{x^2 - n^2\pi^2} = 1$.

On admet que $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2tf(\sin(t))}{t^2 - n^2\pi^2}$ définit une fonction $S : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et qu'on peut inverser somme et intégrale de sorte que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2tf(\sin(t))}{t^2 - n^2\pi^2} \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \frac{2tf(\sin(t))}{t^2 - n^2\pi^2} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n.$$

3.1.1 Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n$. Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre γ_n et μ_n .

3.1.2 Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt$.

Montrer l'égalité $\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{f(\sin t)}{t} dt$.

3.1.3 Justifier la convergence des intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{\sin t} dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin t)}{t} dt$.

3.1.4 Exprimer $\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin(t))}{t} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)} dt$ à l'aide de l'intégrale d'une fonction continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3.2 Application au calcul de J_{2p+1} .

3.2.1 En utilisant les résultats obtenus en **3.1**, retrouver la valeur de J_1 (déjà obtenue en **2.2**).

3.2.2 Calculer J_3 .

3.2.3 Plus généralement, expliciter J_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.