

DEVOIR 05 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2025-2026

mardi 30 septembre 2025

QCM

1 Formules : soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

1.1 $(\lambda A + B) \times C = \lambda C \times A + C \times B$ si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1.3 $(\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T$

1.2 $(\lambda A + B)^{-1} = \lambda A^{-1} + B^{-1}$ si $(A, B) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})^2$

1.4 $\text{tr}(\lambda AB + I_n) = \lambda \text{tr}(BA) + n$

2 Composée et inverse : soit E un espace de dimension n , $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E et $(f, g) \in (\text{GL}(E))^2$

2.1 $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f))^{-1}$

2.3 $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(f)$

2.2 $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f^{-1}) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f) = I_n$

2.4 $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$

3 Somme de sous-espaces : soit E un espace vectoriel, $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces de E

3.1 $\sum_{k=1}^p E_k$ est directe $\implies (\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, i \neq j \implies E_i \cap E_j = \{0_E\})$

3.2 $\sum_{k=1}^p E_k$ est directe $\iff (\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, i \neq j \implies E_i \cap E_j = \{0_E\})$

3.3 $\sum_{k=1}^p E_k$ est directe $\iff (\forall x \in \sum_{k=1}^p E_k, \exists (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^p E_k, x = x_1 + \dots + x_p)$

3.4 $\sum_{k=1}^p E_k$ est directe $\iff (\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, x_1 + \dots + x_p = 0_E \implies x_1 = \dots = x_p = 0_E)$

4 Polynômes d'endom. : soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, $(x, y) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$

4.1 $P(f) = 0 \implies (PQ)(f) = 0$

4.3 $(P + Q)(f + g) = P(f) + P(g) + Q(f) + Q(g)$

4.2 $(\lambda P)(f)(x) = P(f)(\lambda x)$

4.4 $(P + Q)(x + y) = P(x) + P(y) + Q(x) + Q(y)$

Énoncé

Soit E un espace de dimension finie et $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces de E , donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les dimensions pour que la somme $E_1 + \dots + E_p$ soit directe.

Preuve

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a. Justifier l'existence d'un polynôme annulateur non nul de f .

b. Soit $Q = \sum_{k=r}^d a_k X^k$ avec $a_r \neq 0$ et $a_d \neq 0$ (Q est de valuation r et de degré d) un polynôme annulateur de $f \in \text{GL}(E)$, déterminer un polynôme annulateur P de f tel que $P(0) \neq 0$.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \text{Ker}(f^n) \subset \text{Ker}(f^{n+1})$.

On suppose dorénavant qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+1})$.

b. Montrer par récurrence que $\forall k \geq p + 1, \text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^p)$.

Exercice 2

Soit $n \geq 1$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice $A \in E$ fixée telle que $\text{tr}(A) \neq 0$.

On définit l'application $f_A : E \rightarrow E$ par $\forall M \in E, f(M) = \text{tr}(M)A + \text{tr}(A)M$.

a. Sans preuve, que peut-on dire de f_A ?

b. Déterminer la dimension de $F = \text{Ker}(f_A - \text{tr}(A) \text{id}_E)$.

c. Calculer $f_A(A)$. Est-ce que $A \in F$?

d. En déduire la matrice de f_A dans une base bien choisie. Que vaut $\text{tr}(f_A)$?

DEVOIR 05	NOM :	PRÉNOM :
-----------	-------	----------

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

i · j	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1			X	X	
2	X			X	
3	X			X	
4	X	X			

1.1 Faux : le produit matriciel n'est pas commutatif **1.2** Faux : une combinaison linéaire de matrices inversibles peut ne pas être inversible **1.3** Vrai : la transposition est linéaire **1.4** Vrai : la trace est linéaire, $\text{tr}(I_n) = n$ et $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

2.1 Vrai : cours **2.2** et **2.3** Faux : les bases intermédiaires ne coïncident pas **2.4** Vrai : cours.

3.1 Vrai : $E_i \cap \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^p E_k \right) = \{0_E\}$ et $E_j \subset \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^p E_k \right)$ donc $E_i \cap E_j = \{0_E\}$ **3.2** Faux : contre-exemple vu en cours **3.3** Faux : il manque l'unicité de la décomposition **3.4** Vrai : c'est la définition.

4.1 Vrai : car $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$ **4.2** Vrai : par linéarité de $P(f)$ et définition de $(\lambda P)(f)$ **4.3** Faux : $f \mapsto P(f)$ est loin d'être linéaire **4.4** Faux : x est un vecteur, $P(x)$ n'a aucun sens.

Énoncé Soit E un espace de dimension finie et $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces de E , on a l'équivalence suivante :

$E_1, \dots, E_p$ sont en somme directe (ou $\sum_{k=1}^p E_k$ est directe) si et seulement si $\dim \left(\sum_{k=1}^p E_k \right) = \sum_{k=1}^p \dim(E_k)$.

Preuve **a.** La famille $(\text{id}_E, \dots, f^{n^2})$ est liée car $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$ donc il existe $(b_0, \dots, b_{n^2})$ non tous nuls

tel que $\sum_{k=0}^{n^2} b_k f^k = 0$ et il existe un polynôme annulateur non nul $Q = \sum_{k=0}^{n^2} b_k X^k$ de f .

b. Si $f \in \text{GL}(E)$ et $\sum_{k=r}^d a_k f^k = 0$ avec $a_r \neq 0$ alors on compose par f^{-r} et on a $\sum_{k=0}^{d-r} a_{k+r} f^k = 0$; le polynôme

$P = \sum_{k=0}^{d-r} a_{k+r} X^k$ convient car $P(0) = a_r \neq 0$.

Exercice 2 **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \text{Ker}(f^n)$, alors $f^n(x) = 0_E$ donc $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) = f(0_E) = 0_E$ car f est linéaire donc $x \in \text{Ker}(f^{n+1})$. On a bien montré l'inclusion voulue : $\text{Ker}(f^n) \subset \text{Ker}(f^{n+1})$.

b. L'initialisation est l'hypothèse de la question. Soit un entier $k \geq p+1$ tel que $\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^p)$, on sait déjà que $\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^p) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$ d'après la question **a.** Réciproquement, si $x \in \text{Ker}(f^{k+1})$, alors $f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in \text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^p)$ d'où $f^p(f(x)) = f^{p+1}(x) = 0_E$ et on a bien montré que $x \in \text{Ker}(f^{p+1}) = \text{Ker}(f^p)$. Ainsi, $\text{Ker}(f^{k+1}) \subset \text{Ker}(f^p)$. Par double inclusion : $\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{k+1})$ et on a l'hérédité. Par principe de récurrence : $\forall k \geq p+1, \text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^p)$.

Exercice 2 **a.** Bien sûr, l'application f_A est bien définie et elle est linéaire par linéarité de la trace.

b. Pour $M \in E$, $M \in \text{Ker}(f_A - \text{tr}(A) \text{id}_E) \iff f_A(M) = \text{tr}(A)M \iff \text{tr}(M)A = 0 \iff \text{tr}(M) = 0$ car $A \neq 0$ (puisque $\text{tr}(A) \neq 0$) ce qui prouve que $F = \text{Ker}(\text{tr})$. Comme tr est une forme linéaire non nulle sur E , on sait que F est un hyperplan de E donc $\dim(F) = n^2 - 1$.

c. On a $f(A) = 2 \text{tr}(A)A$. Comme $2 \text{tr}(A) \neq \text{tr}(A)$ et $A \neq 0$, $A \notin F$.

d. Soit $\mathcal{B}_1$ une base de F , comme $A \notin F$, la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \{A\}$ est libre et elle comporte n^2 vecteurs dans E de dimension n^2 , ainsi $\mathcal{B}$ est une base de E . Par construction $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_A) = \text{diag}(\text{tr}(A), \dots, \text{tr}(A), 2 \text{tr}(A))$ donc $\text{tr}(f_A) = (n^2 - 1) \times \text{tr}(A) + 1 \times (2 \text{tr}(A)) = (n^2 + 1) \text{tr}(A)$.