

DEVOIR 06 : INTÉGRALES LINÉAIRES

PSI 1 2025-2026

mardi 07 octobre 2025

QCM

- 1** Déterminants des matrices et endomorphismes : soit E un espace de dimension n et de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et on suppose que $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est diagonale

1.1 $\det(f + g) = \det(f) + \det(g)$

1.3 $\det(f \circ g) = \det(B)\det(A)$

1.2 $\det(\lambda f) = \lambda \det(A)$

1.4 $\det(f) = \prod_{k=1}^n d_{k,k}$

- 2** Variation des fonctions et TAF : soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable admettant des limites à gauche et à droite en 0

2.1 f strictement décroissante $\iff \forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) < 0$

2.3 $\exists c \in [1; 3], f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{2}$

2.2 f croissante $\iff (\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) \geq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x))$

2.4 $\exists c \in]-1; 1[, f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$

- 3** Continues par morceaux : soit $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a; b]$. On suppose que f est strictement positive

3.1 $\ln(f)$ est continue par morceaux sur $[a; b]$

3.3 $f + g$ est continue par morceaux sur $[a; b]$

3.2 $\frac{1}{f}$ est continue par morceaux sur $[a; b]$

3.4 $f \times g$ est continue par morceaux sur $[a; b]$

- 4** Inégalités classiques : soit $a < b$ et $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues

4.1 $\int_a^b fg \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$

4.3 $\int_a^b |fg| \leq \int_a^b |f| \int_a^b |g|$

4.2 $(\min_{[a,b]} g) \int_a^b f \leq \int_a^b fg \leq (\max_{[a,b]} g) \int_a^b f$

4.4 $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$

Énoncé Définir une matrice de VANDERMONDE et en donner le déterminant.

Preuve Soit $n \geq 1$ et des matrices $(A, B, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$, calculer le produit par blocs $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

En déduire que si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, on a $\det(M) = \det(A) \times \det(D)$.

Exercice 1 Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $D = \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos \beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}$. Avec des formules de trigonométrie et la formule de VANDERMONDE, exprimer D comme un produit de trois termes.

Exercice 2 Soit $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$, donner l'expression la plus simple possible de $I = \int_0^1 \frac{\sin(2\theta)}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)x^2} dx$.

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1			X	X	
2		X	X		
3			X	X	
4				X	

1.1 et **1.2** Faux : affreux (vrai si $n = 1$) **1.3** Vrai : $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A)$

1.4 Vrai : A est semblable à D par formule de changement de base donc $\det(f) = \det(A) = \det(D) = \prod_{k=1}^n d_{k,k}$.

2.1 Faux : par exemple si $f(x) = -x$ si $x > 0$ et $f(x) = -x - 1$ si $x < 0$ et $f(-0.5) = f(0.5)$ bien que $-0.5 < 0.5$

2.2 Vrai : car f est alors croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ et la condition sur les limites montre que les images des négatifs sont inférieures à celles des positifs **2.3** Vrai : c'est le TAF appliqué à f entre 1 et 3 car $3 - 1 = 2$

2.4 Faux : f n'est pas dérivable sur $] -1; 1[$ car elle ne l'est pas forcément en 0.

3.1 Faux : pour $f = \text{id}$ sur $]0; 1]$ avec $f(0) = 1$ (pas de limite finie pour $\ln(f)$ en 0^+) **3.2** Faux : même contre-exemple **3.3** Vrai : on utilise la linéarité de la limite et de la continuité sur une subdivision "réunion"

de deux subdivisions adaptées à f et g **3.4** Vrai : même chose pour le produit.

4.1 Faux : pour $f = g = 1$ et $b - a = \frac{1}{2}$; le vrai CAUCHY-SCHWARZ c'est $\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$ **4.2**

Faux : c'est vrai si on impose f positive mais faux par exemple si $f = -1$, $b = 1$, $a = -1$ et $g : x \mapsto x$ **4.3**

Faux : par exemple pour $f = g = 1$ et $b - a = \frac{1}{2}$; ça ne ressemble à rien **4.4** Vrai : inégalité triangulaire.

Énoncé Soit un corps commutatif $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), un entier $n \geq 1$, une famille de scalaires $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et la matrice de VANDERMONDE $V = (\alpha_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq n}$. On sait qu'alors $\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$.

Preuve Il vient $M = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$. En développant n fois le déterminant de $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ par rapport à sa première ligne (ou première colonne), on trouve que $\det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(D)$. De même, en développant n fois le déterminant de $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ par rapport à sa dernière ligne, on trouve que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \det(A)$. Comme le déterminant d'un produit de matrices carrées de même taille est le produit des déterminants de ces matrices carrées, on obtient $\det(M) = \det(A)\det(D)$.

Exercice 1 Comme $\cos(2x) + 2\sin^2(x) = 1$, en effectuant l'opération de GAUSS $C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1$, on obtient

$$D = \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin^2 \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin^2 \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix}. \text{ Or } \sin^2 x - 1 = -\cos^2 x \text{ d'où } D = \begin{vmatrix} -\cos^2 \alpha & \cos \alpha & 1 \\ -\cos^2 \beta & \cos \beta & 1 \\ -\cos^2 \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos^2 \alpha \\ 1 & \cos \beta & \cos^2 \beta \\ 1 & \cos \gamma & \cos^2 \gamma \end{vmatrix} \text{ en}$$

effectuant l'opération de GAUSS $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$, ensuite $C_1 \leftrightarrow C_3$ et en utilisant la linéarité par rapport à la troisième colonne. On reconnaît alors VANDERMONDE : $D = (\cos \gamma - \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \beta - \cos \alpha)$.

Exercice 2 La fonction $x \mapsto \frac{\sin(2\theta)}{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)x^2}$ est continue sur le segment $[0; 1]$ car $\cos(\theta) > 0$ donc I existe et, par trigonométrie, $I = \int_0^1 \frac{2 \tan(\theta)}{1 + (\tan(\theta)x)^2} dx = \left[2 \operatorname{Arctan}(\tan(\theta)x) \right]_0^1 = 2\theta$ car $\theta \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$.