

TD 05 : ALGÈBRE LINÉAIRE

PSI 1 2025-2026

vendredi 03 octobre 2025

5.1 a. Il y a deux cas :

- si $\varphi = 0$ alors $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = n^2$ car $\text{Ker}(\varphi) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- si $\varphi \neq 0$, comme φ est une forme linéaire non nulle, φ est surjective et on sait d'après le cours que $\text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = n^2 - 1$.

b. Méthode 1 : soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors $\varphi(M) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} \varphi(E_{i,j})$ par linéarité de φ . Si on définit $N = (\varphi(E_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} = (n_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a $\text{Tr}(N^T M) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} n_{i,j} m_{i,j} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} \varphi(E_{i,j}) = \varphi(M)$. Si $N' = (n'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ convenait aussi, on aurait $n_{i,j} = \varphi(E_{i,j}) = \text{Tr}(N'^T E_{i,j}) = n'_{i,j}$ donc $N = N'$. On a bien existence et unicité de $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \text{Tr}(N^T M)$ et $N = (\varphi(E_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n}$.

Méthode 2 : comme $(M|N) = \text{Tr}(N^T M)$ définit classiquement un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que φ est une forme linéaire, il existe, par le théorème de représentation, un unique vecteur $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = (N|M) = \text{Tr}(N^T M)$ (voir formes linéaires dans espaces euclidiens). C'est plus rapide mais ça ne donne pas N en fonction de φ .

c. Si A et B sont semblables, il existe par définition $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$, alors, par propriété de la trace, on a $\text{Tr}(A) = \text{Tr}((PB)P^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1}(PB)) = \text{Tr}((P^{-1}P)B) = \text{Tr}(B)$.

d. Méthode 1 : l'indication de l'énoncé nous amène à montrer que N commute avec toutes les matrices inversibles. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors l'hypothèse de l'énoncé donne $\varphi(P^{-1}MP) = \varphi(M)$ donc par $\text{Tr}(N^T P^{-1}MP) = \text{Tr}((PN^T P^{-1})M) = \text{Tr}(N^T M)$. Avec la notation produit scalaire, cela donne la relation $(P^T N (P^{-1})^T | M) = (N | M)$. Comme ceci est vrai pour toute matrice M , on en déduit que $U = P^T N (P^{-1})^T - N$ est orthogonal à toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cette matrice U est donc nulle donc $U = P^T N (P^{-1})^T - N = 0$ et on a donc $P^T N = NP^T$ pour toute matrice inversible P . Alors $NQ = QN$ pour toute matrice inversible Q (toute matrice inversible Q est la transposée d'une autre matrice inversible, en effet, $Q = (Q^T)^T$ et Q^T est inversible si Q l'est). D'après l'énoncé, N est une matrice scalaire, c'est-à-dire de la forme $N = \lambda I_n$, et on conclut que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \text{Tr}(\lambda I_n M) = \lambda \text{Tr}(M)$ donc $\varphi = \lambda \text{Tr}$.

Méthode 2 : soit $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$ et $P = I_{1,i}$ (matrice d'interversion), alors $E_{1,1} = PE_{i,i}P^{-1}$ donc, $\varphi(E_{1,1}) = \varphi(E_{i,i})$ par hypothèse. Soit donc $\lambda = \varphi(E_{1,1})$ de sorte que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \varphi(E_{k,k}) = \lambda$. Soit $(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, alors $E_{i,j} = D_i(-1)(-E_{i,j})D_i(-1)^{-1}$ donc $\varphi(E_{i,j}) = \varphi(-E_{i,j})$ ce qui prouve que $n_{i,j} = \varphi(E_{i,j}) = 0$.

Par conséquent, $N = \lambda I_n$ et on a alors $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = \text{Tr}(\lambda M) = \lambda \text{Tr}(M)$ donc $\varphi = \lambda \text{Tr}$.

e. Soit M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec toutes les matrices inversibles. Alors, pour $(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

- si $i \neq j$, $T_{i,j}(1) = I_n + E_{i,j}$ est une matrice de transvection inversible donc, par hypothèse, on a $MT_{i,j}(1) = M + E_{i,j}M = E_{i,j}M + M = T_{i,j}(1)M$ ce qui se simplifie en $E_{i,j}M = ME_{i,j}$.
- si $i = j$, $D_i(2) = I_n + E_{i,i}$ est une matrice de dilatation inversible donc, par hypothèse, il vient $MD_i(2) = M + E_{i,i}M = E_{i,i}M + M = D_i(2)M$ donc $E_{i,i}M = ME_{i,i}$.

Ainsi M commute donc avec toutes les matrices $E_{i,j}$ donc avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par linéarité.

- Pour $i = j$, en écrivant les produits $E_{i,i}M$ et $ME_{i,i}$, on constate que sur la ligne i et la colonne i , le seul terme éventuellement non nul est $m_{i,i}$. La matrice M est donc diagonale.
 - Pour $i \neq j$, en écrivant $E_{i,j}M$ et $ME_{i,j}$, on constate que $m_{i,i} = m_{j,j}$. Les termes de la diagonale sont égaux.
- Enfin, M est bien une matrice scalaire puisqu'elle vaut $M = m_{1,1}I_n$.

5.2 a. L'application nulle 0 vérifie $F \subset \text{Ker}(0) = E$ et $\{0_{E'}\} = \text{Im}(0) \subset F'$ donc $0 \in A$ qui est donc non vide.

Si u et v sont dans A et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors, comme $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u + \lambda v)$, on a $F \subset \text{Ker}(u + \lambda v)$ car $F = F \cap F \subset \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$ par hypothèse. De plus, comme $\text{Im}(u + \lambda v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$, on a aussi $\text{Im}(u + \lambda v) \subset F'$ car $\text{Im}(u) + \text{Im}(v) \subset F' + F' = F'$ par hypothèse. Ainsi, A est stable par combinaison linéaire. Enfin, A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, E')$ donc a fortiori un espace vectoriel.

b. On sait que si E et E' sont de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E, E')$ aussi avec $\dim(\mathcal{L}(E, E')) = \dim(E) \times \dim(E')$. Comme A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, E')$, il est lui-même de dimension finie.

Notons $n = \dim(E)$, $p = \dim(F)$, $m = \dim(E')$ et $q = \dim(F')$. Il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E telle que $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Il existe aussi une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_q, e'_{q+1}, \dots, e'_m)$ de E' telle que $F' = \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_q)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$ et $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$. Alors $u \in A$ si et seulement si les p premières colonnes de A sont nulles (qui traduit $F \subset \text{Ker}(u)$) et si les $m - q$ dernières lignes de M sont nulles (qui traduit $\text{Im}(u) \subset F'$). Par conséquent $u \in A \iff M$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $N \in \mathcal{M}_{q, n-p}(\mathbb{K})$. Ceci

construit un isomorphisme φ entre A et $\mathcal{M}_{q, n-p}(\mathbb{K})$ défini par $\varphi(u) = N$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, $\dim(A) = q(n - p) = \dim(F)(\dim(E') - \dim(F))$. Montrons-le rigoureusement !

- Si $(u, v) \in A^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $u + \lambda v \in A$ et, d'après ce qui précède, il existe $(N, N') \in \mathcal{M}_{q, n-p}(\mathbb{K})^2$ telles que $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} 0 & N' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u + \lambda v) = \begin{pmatrix} 0 & N + \lambda N' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\varphi(u + \lambda v) = N + \lambda N' = \varphi(u) + \lambda \varphi(v)$. Ceci établit la linéarité de φ .

- De plus, si $u \in \text{Ker}(\varphi)$, alors $u \in A$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $u = 0$. Ainsi, φ est injective.

- Enfin, soit $N \in \mathcal{M}_{q, n-p}(\mathbb{K})$ quelconque, soit u l'unique application linéaire de E dans E' telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les trois blocs de 0 montrent que $F \subset \text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u) \subset F'$ donc $u \in A$, qui est donc un antécédent de N par φ : φ est surjective. φ est bien un isomorphisme donc il conserve les dimensions et on conclut bien que $\dim(A) = \dim(\mathcal{M}_{q, n-p}(\mathbb{K})) = q(n - p) = \dim(F)(\dim(E') - \dim(F'))$.

5.3 Pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, soit la fonction $f_j : t \mapsto e^{y_j t}$. Soit le sous-espace $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$ de $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On considère $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(f) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$. Il est clair que φ est linéaire. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j = 0$. Si on avait $\lambda_n \neq 0$, alors comme $\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j f_j = o(f_n)$, on aurait

$\lambda_n f_n = - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j f_j = o(f_n)$ ce qui est impossible. Ainsi, $\lambda_n = 0$. On continue ainsi de suite et on a

$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Ainsi $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ est libre, c'est donc une base de F qui est de dimension n .

Si on considère la fonction ψ qui est la restriction de φ à F , alors $\psi(f_j) = (e^{x_1 y_j}, \dots, e^{x_n y_j})$ de sorte que

$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\text{can}}}(\psi)$. Par conséquent, A est inversible si et seulement si ψ est un isomorphisme.

Cette interprétation de A comme la matrice d'une application linéaire n'est pas essentielle à la résolution de cet exercice, mais l'introduction des fonctions f_j semble inévitable, même si on raisonne sur le fait que les colonnes de la matrice A forment une famille libre, ce qui prouve que A est de rang n donc inversible.

Qu'on parle du noyau de ψ ou de combinaison linéaire des colonnes de A (la j -ième colonne de A est notée C_j) qui donne 0, on est conduit à considérer $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

- $f = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j \in \text{Ker}(\psi)$ si et seulement si f s'annule en $x_1, \dots, x_n$.
- si $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$, alors $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n \lambda_j e^{x_i y_j} = 0 = f(x_i)$ en posant $f = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j$.

Quelle que soit la méthode, il suffit donc de montrer qu'une telle fonction f s'annulant en n valeurs x_i distinctes ne peut être que nulle. On va montrer cette propriété par récurrence sur n . Soit donc $\mathcal{P}(n) =$ "si $f = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j$ s'annule en n valeurs distinctes avec $f_j : t \mapsto e^{z_j t}$ et $z_1, \dots, z_n$ distinctes, alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ ".

Initialisation : si $n = 1$, soit $y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $t \mapsto \lambda e^{yt}$ s'annule en au moins un réel x , alors $\lambda e^{xy} = 0 \implies \lambda = 0$ car $e^{xy} \neq 0$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \geq 1$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit maintenant $y_1 < \dots < y_{n+1}$ des réels distincts et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $f : t \mapsto \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e^{y_k t}$ s'annule en des réels $x_1 < \dots < x_{n+1}$ distincts. En

multipliant $f(t)$ par $e^{-y_{n+1}t}$, la fonction $g : t \mapsto e^{-y_{n+1}t} f(t) = e^{-y_{n+1}t} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e^{y_k t} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e^{(y_k - y_{n+1})t}$

s'annule aussi $x_1, \dots, x_{n+1}$ donc en $n+1$ réels distincts deux à deux. D'après le théorème de ROLLE appliqué à la fonction g sur tous les intervalles $[x_i; x_{i+1}]$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, comme $g(x_i) = g(x_{i+1}) = 0$ et que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la fonction $g' : t \mapsto \sum_{j=1}^n (y_j - y_{n+1}) \lambda_j e^{(y_j - y_{n+1})t}$ s'annule en n réels m_i distincts vérifiant

$x_1 < m_1 < x_2 < m_2 < \dots < m_n < x_{n+1}$. D'après $\mathcal{P}(n)$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ puisque $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $y_j - y_{n+1} \neq 0$.

Il ne reste donc que $f : t \mapsto \lambda_{n+1} e^{y_{n+1}t}$ qui s'annule en $n+1$ valeurs ce qui, d'après $\mathcal{P}(1)$, impose $\lambda_{n+1} = 0$.

Ainsi $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, $\forall n \geq 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Si $f \in \text{Ker}(\psi)$, on peut écrire $f = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j$ et f s'annule en $x_1, \dots, x_n$ distincts deux à deux donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ d'après $\mathcal{P}(n)$. Ceci prouve que $f = 0$ donc ψ est injective. Comme $\dim(F) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$, ψ est un isomorphisme donc $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

5.4 Méthode 1 : Le lien entre ces deux matrices est la matrice de $M = \begin{pmatrix} I_q & A \\ B & I_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$.

Si on pose $U = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ -B & I_p \end{pmatrix}$, alors $MU = \begin{pmatrix} I_q - AB & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ et $UM = \begin{pmatrix} I_q & A \\ 0 & I_p - BA \end{pmatrix}$ donc, en passant au déterminant, il vient $\det(M)\det(U) = \det(I_q - AB) = \det(I_p - BA) = \det(U)\det(M)$ car UM, MU, U sont triangulaires par blocs. Cette formule est appelé identité de SYLVESTER. Difficile à voir !

Méthode 2 : Si on ne voit pas cette relation par blocs, comme A est de rang $r \leq \min(p, q)$, A est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (par blocs) mais c'est hors-programme. Ainsi, $\exists Q \in \text{GL}_q(\mathbb{R})$, $\exists P \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$, $A = QJ_rP^{-1}$.

Posons alors $C = P^{-1}BQ$ de sorte que $B = PCQ^{-1}$. Alors on peut simplifier et factoriser les deux matrices

$$I_q - AB = I_q - QJ_rP^{-1}PCQ^{-1} = Q(I_q - J_rC)Q^{-1} \text{ et } I_p - BA = I_p - PCQ^{-1}QJ_rP^{-1} = P(I_p - CJ_r)P^{-1}.$$

Par propriétés du déterminant, on a $\det(I_q - AB) = \det(I_q - J_rC)$ et $\det(I_p - BA) = \det(I_p - CJ_r)$.

Si $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$ par blocs avec $C_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, alors après calculs $I_q - J_rC = \begin{pmatrix} I_r - C_1 & -C_2 \\ 0 & I_{q-r} \end{pmatrix}$ et $I_p - CJ_r = \begin{pmatrix} I_r - C_1 & 0 \\ -C_3 & I_{p-r} \end{pmatrix}$. Comme ces matrices sont triangulaires par blocs, on a finalement l'égalité annoncée, $\det(I_q - AB) = \det(I_q - J_rC) = \det(I_r - C_1) = \det(I_p - CJ_r) = \det(I_p - BA)$.

5.5 a. Soit $A \in P$, comme P est stable par produit, on peut définir $f_A : P \rightarrow P$ par $f_A(B) = AB$. Comme A est

inversible, $f_A(B) = f_A(C) \iff AB = AC \iff A^{-1}AB = A^{-1}AC \iff B = C$ donc f_A est injective. Comme

l'ensemble P est fini, f_A est donc bijective. Par conséquent $f_A(P) = P$ ce qui montre que $\sum_{M \in f_A(P)} M = \sum_{B \in P} B$.

Or $\sum_{M \in f_A(P)} M = \sum_{B \in P} f_A(B) = \sum_{B \in P} AB$ et on a bien $\sum_{B \in P} AB = \sum_{B \in P} B$.

b. Posons $U = \sum_{B \in P} B$, alors $U^2 = \left(\sum_{A \in P} A \right) \left(\sum_{B \in P} B \right) = \sum_{(A,B) \in P^2} AB = \sum_{A \in P} \left(\sum_{B \in P} AB \right) = \sum_{A \in P} \left(\sum_{B \in P} B \right)$ d'après

la question précédente donc $U^2 = m \sum_{B \in P} B = mU$ car $\text{card}(P) = m$. En posant $V = \frac{U}{m}$, V est une matrice de

projecteur car $V^2 = \frac{U^2}{m^2} = \frac{mU}{m^2} = \frac{U}{m} = V$ et on sait qu'alors $\text{Tr}(V) = \text{rang}(V) \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, par linéarité de Tr , $\sum_{B \in P} \text{Tr}(B) = \text{Tr}(U) = \text{Tr}(mV) = m\text{Tr}(V)$ est un multiple de m .

c. Si $\sum_{B \in P} \text{Tr}(B) = 0$, alors $\text{Tr}(U) = 0$ donc $\text{Tr}(V) = \text{rang}(V) = 0$ donc $V = 0$. Alors $U = \sum_{B \in P} B = 0$.

5.6 a. Par l'absurde, supposons qu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que la famille (AX, X) est libre.

On peut poser $X_1 = X$, $X_2 = AX$ et compléter la famille libre (X_1, X_2) en une base $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons P la matrice de passage entre la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$. Comme $AX_1 = X_2$,

par formule de changement de base, $A = PBP^{-1}$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & \dots & * \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$. Ainsi, B est semblable à

A et son coefficient $b_{2,1}$ vaut $1 \neq 0$. On a donc montré par l'absurde que si toute matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ semblable à A vérifie $b_{2,1} = 0$, alors pour tout vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la famille (AX, X) est liée.

Soit $\mathcal{B}_0 = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, (AE_k, E_k) est liée donc il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $AE_k = \lambda_k E_k$ car $E_k \neq 0$. Or AE_k est la k -ième colonne de A ce qui montre que $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Pour $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, de même, il existe un réel μ_k tel que $A(E_1 + E_k) = \mu_k(E_1 + E_k)$. Or $A(E_1 + E_k) = \lambda_1 E_1 + \lambda_k E_k$ donc, par liberté de (E_1, E_k) , on a $\mu_k = \lambda_1 = \lambda_k$ et on en déduit que $A = \lambda_1 I_n$. Réciproquement, toute matrice de la forme λI_n n'est semblable qu'à elle-même ayant un coefficient nul en case $(2, 1)$.

Les matrices telles que toute matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ semblable à A vérifie $b_{2,1} = 0$ sont exactement les matrices scalaires (représentant les homothéties), de la forme λI_n .

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que toute matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à A est telle que $b_{1,1} = 0$. Supposons l'existence d'un vecteur $X_1 \neq 0$ tel que (AX_1, X_1) est libre. Posons $X_2 = AX_1 - X_1$, alors la famille

(X_1, X_2) est libre, on peut la compléter en une base $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons P la matrice de passage entre la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$. Comme $AX_1 = X_1 + X_2$, par formule de changement

de base, $A = PBP^{-1}$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$ ce qui contredit l'hypothèse. Par l'absurde, on a donc

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (AX, X)$ est liée (même pour $X = 0$). Comme ci-dessus, on en déduit que $A = \lambda I_n$. Mais comme $a_{1,1} = 0$ car A est semblable à elle-même, on a $\lambda = a_{1,1} = 0$ donc $A = 0$.

Il n'y a qu'une seule matrice telle que pour toute matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ semblable à A , on ait $b_{1,1} = 0$, et c'est la matrice nulle.

5.7 Les deux applications f et g de l'énoncé sont clairement linéaires donc des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a $\varphi = g \circ f = f \circ g$ donc φ est aussi linéaire (c'était clair) mais on a aussi $\det(\varphi) = \det(f)\det(g)$.

Pour f : soit $\mathcal{B}_\ell = (E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{1,n}, E_{2,1}, \dots, E_{2,n}, \dots, E_{n,1}, \dots, E_{n,n})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ écrite ligne par ligne et $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_\ell}(f)$. $f(E_{1,1}) = E_{1,1}A$ est la matrice dont la première ligne est celle de A et toutes les autres sont nulles donc $f(E_{1,1}) = \sum_{j=1}^n a_{1,j}E_{1,j}$. Ceci prouve que la première colonne de P contient dans l'ordre $a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, 0, \dots, 0$. De même, $f(E_{1,2}) = E_{1,2}A$ est la matrice dont la première ligne est la seconde de A et toutes les autres sont nulles donc $f(E_{1,2}) = \sum_{j=1}^n a_{2,j}E_{1,j}$ donc la seconde colonne de P contient dans l'ordre $a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, 0, \dots, 0$. On continue comme ceci pour toutes les colonnes de P pour se rendre compte que P est diagonale par blocs avec n fois A^T sur la diagonale : $P = \text{diag}(A^T, \dots, A^T)$. On sait qu'alors $\det(f) = \det(P) = (\det(A^T))^n = (\det(A))^n$.

Pour g : soit $\mathcal{B}_c = (E_{1,1}, E_{2,1}, \dots, E_{n,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,2}, \dots, E_{1,n}, \dots, E_{n,n})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ écrite colonne par colonne et $Q = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(g)$. $g(E_{1,1}) = AE_{1,1}$ est la matrice dont la première colonne est celle de A et toutes les autres sont nulles donc $g(E_{1,1}) = \sum_{i=1}^n a_{i,1}E_{i,1}$. Ceci prouve que la première colonne de Q contient dans l'ordre $a_{1,1}, \dots, a_{n,1}, 0, \dots, 0$. De même, $g(E_{2,1}) = AE_{2,1}$ est la matrice dont la première colonne est la seconde de A et toutes les autres sont nulles donc $g(E_{2,1}) = \sum_{i=1}^n a_{i,2}E_{i,1}$ donc la seconde colonne de Q contient dans l'ordre $a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, 0, \dots, 0$. On continue comme ceci pour toutes les colonnes de Q pour se rendre compte que Q est diagonale par blocs avec n fois A sur la diagonale : $Q = \text{diag}(A, \dots, A)$. On sait qu'alors $\det(g) = \det(Q) = (\det(A))^n$.

Ainsi, d'après ce qui précède, $\det(\varphi) = (\det(A))^{2n}$.

5.8 Méthode 1 : On va montrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathcal{F}$ vérifiant ces conditions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est toujours finie et que son cardinal est inférieur à 2^n .

Initialisation : si $n = 1$, les seules matrices $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = I_1$ sont $A = (1)$ et $A = (-1)$. Alors, $\mathcal{F}$ comporte donc 1 ou 2 éléments, en prenant $\mathcal{F} = \{(1)\}$, $\mathcal{F} = \{(-1)\}$ ou $\mathcal{F} = \{(1), (-1)\}$ et on a $\text{card}(\mathcal{F}) \leq 2$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que toute famille $\mathcal{F}$ contenant des matrices de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ avec $k \in [1; n]$ et

vérifiant les hypothèses de l'énoncé est finie et de cardinal inférieur à 2^k . On prend maintenant une famille non vide $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I} \in (\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}))^I$ telle que $\forall i \in I, A_i^2 = I_{n+1}$ et $\forall (i, j) \in I^2, A_i A_j = A_j A_i$:

- Si $\mathcal{F} = (I_{n+1})$ ou $\mathcal{F} = (-I_{n+1})$ ou $\mathcal{F} = (I_{n+1}, -I_{n+1})$, alors $\mathcal{F}$ est finie et $\text{card}(\mathcal{F}) \leq 2 \leq 2^{n+1}$.
- Si $\mathcal{F} \neq (I_{n+1})$ et $\mathcal{F} \neq (-I_{n+1})$ et $\mathcal{F} \neq (I_{n+1}, -I_{n+1})$ (ou dans l'autre ordre bien sûr), il existe un indice $i_0 \in I$ tel que $A_{i_0} \neq \pm I_{n+1}$. Comme A_{i_0} est une symétrie, on a $\mathbb{C}^{n+1} = E_1(A_{i_0}) \oplus E_{-1}(A_{i_0})$ avec $1 \leq p = \dim(E_1(A_{i_0})) \leq n-1$ et $1 \leq q = \dim(E_{-1}(A_{i_0})) \leq n-1$ car $A_{i_0} \neq \pm I_{n+1}$. Pour tout $i \in I, A_i A_{i_0} = A_{i_0} A_i$ donc les sous-espaces propres $E_1(A_{i_0})$ et $E_{-1}(A_{i_0})$ de la symétrie A_{i_0} sont stables par A_i . Soit une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q)$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^{n+1} = E_1(A_{i_0}) \oplus E_{-1}(A_{i_0})$. Notons P la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$ et la base $\mathcal{B}$. Les stabilités de $E_1(A_{i_0})$ et $E_{-1}(A_{i_0})$ par tous les A_i se traduisent par le fait que $\forall i \in I, D_i = P^{-1} A_i P = \begin{pmatrix} B_i & 0 \\ 0 & C_i \end{pmatrix}$ car $D_i = P^{-1} A_i P$ est la matrice de l'endomorphisme a_i de $\mathbb{C}^{n+1}$ canoniquement associé à A_i dans la base $\mathcal{B}$. Comme $A_i^2 = I_{n+1}$, on a $D_i^2 = I_{n+1}$ donc $B_i^2 = I_p$ et $C_i^2 = I_q$. Or $\forall (i, j) \in I^2, A_i A_j = A_j A_i$ se traduit par $\forall (i, j) \in I^2, D_i D_j = D_j D_i$ donc $\forall (i, j) \in I^2, B_i B_j = B_j B_i$ et $\forall (i, j) \in I^2, C_i C_j = C_j C_i$.

Ainsi, $\mathcal{F}_p = (B_i)_{i \in I} \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{C}))^I$ est une famille telle que $\forall i \in I, B_i^2 = I_p$ et $\forall (i, j) \in I^2, B_i B_j = B_j B_i$ et $\mathcal{F}_q = (C_i)_{i \in I} \in (\mathcal{M}_q(\mathbb{C}))^I$ est une famille telle que $\forall i \in I, C_i^2 = I_q$ et $\forall (i, j) \in I^2, C_i C_j = C_j C_i$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $\text{card}(\mathcal{F}_p) \leq 2^p$ et $\text{card}(\mathcal{F}_q) \leq 2^q$. Comme les matrices de $\mathcal{F}$ sont des images de couples $(B, C) \in \mathcal{F}_p \times \mathcal{F}_q$ par l'application $(B, C) \mapsto P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} P^{-1}$ qui est injective, on a $\text{card}(\mathcal{F}) \leq \text{card}(\varphi(\mathcal{F}_p \times \mathcal{F}_q)) = \text{card}(\mathcal{F}_p \times \mathcal{F}_q) = \text{card}(\mathcal{F}_p) \times \text{card}(\mathcal{F}_q) \leq 2^p \times 2^q = 2^{n+1}$.

Par récurrence forte, on a établi que si une famille $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I} \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^I$ vérifie $\forall i \in I, A_i^2 = I_n$ et $\forall (i, j) \in I^2, A_i A_j = A_j A_i$, alors cette famille est finie et $\text{card}(\mathcal{F}) \leq 2^n$.

Méthode 2 : montrons par récurrence sur le nombre p de matrices d'une famille de matrices de même taille $n \in \mathbb{N}^*$ (quelconque) que si une famille $\mathcal{F} = (A_i)_{1 \leq i \leq p}$ de p matrices ne contient que des matrices diagonalisables qui commutent deux à deux, alors il existe une base de $\mathbb{K}^n$ (et donc $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$) formée de vecteurs propres de toutes ces matrices (telle que $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, P^{-1} A_i P$ est diagonale).

Initialisation : si $p = 1$, il n'y a qu'une matrice $A_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans la famille $\mathcal{F} = (A_1)$ et l'existence de $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ provient de l'hypothèse que A est diagonalisable.

Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que toute famille de p matrices de même taille n (quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$) qui sont diagonalisables et qui commutent deux à deux codiagonalisent. Soit $\mathcal{F} = (A_1, \dots, A_{p+1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{p+1}$ telle que $A_1, \dots, A_{p+1}$ sont diagonalisables et commutent deux à deux. Comme A_{p+1} est diagonalisable, $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(A_{p+1})$ en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A_{p+1} . Comme $A_1, \dots, A_p$ commutent avec A_{p+1} , les sous-espaces propres de A_{p+1} sont stables par $A_1, \dots, A_p$ et les endomorphismes induits par $A_1, \dots, A_p$ sur $E_{\lambda_i}(A_{p+1})$ (pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$) sont diagonalisables car $A_1, \dots, A_p$ le sont.

Par hypothèse de récurrence, comme les endomorphismes induits par $A_1, \dots, A_p$ dans $E_{\lambda_i}(A_{p+1})$ sont tous diagonalisables et commutent deux à deux, il existe une base $\mathcal{B}_i$ de $E_{\lambda_i}(A_{p+1})$ qui est une base de vecteurs

propres communs à tous ces endomorphismes induits.

Posons $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg \cdots \amalg \mathcal{B}_r$, alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ car $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(A_{p+1})$ et les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de $A_1, \dots, A_p$ par construction et de A_{p+1} car ce sont des vecteurs non nuls d'un $E_{\lambda_i}(A_{p+1})$. Par principe de récurrence, on a bien établi la propriété énoncé plus haut.

Dans notre cas, pour $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I} \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^I$ telle que $\forall i \in I, A_i^2 = I_n$ et $\forall (i, j) \in I^2, A_i A_j = A_j A_i$ les A_i sont diagonalisables car $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est scindé à racines simples et annulateur des A_i . Le résultat prouvé ci-dessus montre que si on prend une famille finie $J \subset I$, les matrices A_j de la famille $\mathcal{F}' = (A_j)_{j \in J}$ codiagonalisent, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall j \in J, P^{-1} A_j P = D_j$ diagonale. Mais les D_j contiennent seulement des ± 1 sur la diagonale car $\text{Sp}(A_j) \subset \{-1, 1\}$. Il y a donc au plus 2^n matrices D_j possibles donc, par injectivité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$, il y a au plus 2^n matrices A_j dans la famille $\mathcal{F}'$. On vint donc de montrer que si $J \subset I$ est fini, alors $\text{card}(J) \leq 2^n$. Ainsi, I est fini et $\text{card}(I) \leq 2^n$.

5.9 a. Si $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $u(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X + 1) = \lambda P(X + 1) + Q(X + 1) = \lambda u(P) + u(Q)$ donc u est linéaire et u va bien de E dans E , ce qui montre que u est un endomorphisme de E . Par différence d'endomorphismes, v est aussi un endomorphisme de E .

Comme u et id_E commutent, par le binôme de NEWTON, on a $v^n = (u - \text{id}_E)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u^k$. Or, par une récurrence facile, on a $u^k : P \mapsto P(X + k)$ donc, pour tout polynôme $P \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il vient la relation $v^n(P) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u^k(P) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X + k)$.

b. Pour $P \in E$ non constant qu'on écrit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ avec $d \geq 1$ et $a_d \neq 0$ de sorte que $\deg(P) = d$, on a $v(P) = P(X + 1) - P(X) = \sum_{k=0}^d a_k ((X + 1)^k - X^k)$. Or les termes en X^k s'éliminent dans le développement de $(X + 1)^k - X^k$ donc $\deg(v(P)) \leq d - 1$ car tous les polynômes $D_k = a_k ((X + 1)^k - X^k)$ sont de degré inférieur à $k - 1$ et $\deg(v(P)) \leq \text{Max}(\deg(D_0), \dots, \deg(D_d))$.

Soit donc $p \in \mathbb{N}$ et un entier $n \geq p + 1$, comme on perd au moins un degré en appliquant v à chaque étape, $\deg(v^n(X^p)) \leq p - n \leq -1$ donc $v^n(X^p) = 0$ car le seul polynôme de degré négatif est le polynôme nul. On a donc, en posant $P = X^p$ dans **a.**, $v^n(P)(0) = 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(0 + k) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0$.

c. Soyons plus précis, avec les notations de la question précédente, toujours si P n'est pas constant, par le binôme de NEWTON, on a $v(P) = P(X + 1) - P(X) = \sum_{k=0}^d a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i \right) = \sum_{0 \leq i < k \leq d} a_k \binom{k}{i} X^i$ donc $v(P) = \sum_{i=0}^{d-1} \left(\sum_{k=i+1}^d a_k \binom{k}{i} \right) X^i$ donc, comme le terme en X^{d-1} de polynôme est $\binom{d}{d-1} a_d = d a_d \neq 0$, on a même $\deg(v(P)) = \deg(P) - 1 = d - 1$ et $\text{dom}(v(P)) = d a_d = \deg(P) \times \text{dom}(P)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, comme on perd exactement un degré à chaque application de v , on a $v^n(X^n)$ constant et, avec la relation précédente sur les coefficients dominants, $v^n(X^n) = n(n - 1) \cdots 2 \times 1 = n!$ car X^n est unitaire. Ainsi, en prenant $P = X^n$ dans **a.**, on a $v^n(X^n)(0) = n! = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(0 + k) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n$.

d. Soit $P \in \text{Ker}(v)$, on a $P(X + 1) = P(X)$. Si P était non constant, par le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, il

existerait $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P(\lambda) = 0$. Ainsi, $P(\lambda + 1) = P(\lambda)$ donc λ et $\lambda + 1$ sont des racines de P . Par récurrence simple, $\forall p \in \mathbb{N}$, $P(\lambda + p) = P(\lambda)$ donc tous les $\lambda + p$ sont des racines de P pour tout entier $p \in \mathbb{N}$. Or ceci donne une infinité de racines de P ce qui est absurde. Ainsi, P est constant. Réciproquement, si $P = \alpha$, $v(P) = \alpha - \alpha = 0$. Par double inclusion que $\text{Ker}(v) = \mathbb{R}_0[X]$. Comme $\text{Ker}(v) \neq \{0\}$, v n'est pas injective.

e. D'après **b.**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par v car le degré de $v(P)$ est inférieur à celui de P . On peut donc considérer l'endomorphisme induit $v_n : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ tel que $v_n(P) = v(P) = P(X + 1) - P(X)$. D'après la question **d.**, $\text{Ker}(v_n) = \text{Ker}(v) \cap \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_0[X] = \text{Vect}(1)$ est de dimension 1 donc, avec la formule du rang, $\text{rang}(v_n) = (n + 1) - 1 = n$. D'après ce qui précède, $\text{Im}(v_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc, par inclusion et égalité des dimensions, on obtient $\text{Im}(v_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Soit $Q \in E$, traitons deux cas :

Si $Q = 0$: $v(0) = Q = 0$ donc $Q \in \text{Im}(v)$.

Si $Q \neq 0$: posons $d = \deg(Q) \in \mathbb{N}$, alors $Q \in \mathbb{R}_d[X] = \text{Im}(v_{d+1})$ donc il existe $P \in \mathbb{R}_{d+1}[X]$ tel que $v_{d+1}(P) = v(P) = Q$ et on a encore $Q \in \text{Im}(v)$.

On vient de montrer que $\text{Im}(v) = E$, donc que v est surjective.

5.10 a. L'ensemble $\mathcal{F}$ est une partie de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ par construction. De plus, $\mathcal{F} \neq \emptyset$ car $0 \in \mathcal{F}$. Enfin,

si $(f, g) \in \mathcal{F}^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda f + g) \circ p = \lambda f \circ p + g \circ p = -\lambda p \circ f - p \circ g = -p \circ (\lambda f + g)$ donc, comme $\lambda f + g \in \mathcal{L}(E)$, on a $\lambda f + g \in \mathcal{F}$. Ainsi, $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ donc est un espace vectoriel.

b. • Soit $x \in \text{Im}(p)$, alors $p(x) = x$ donc $f(x) = f \circ p(x) = -p(f(x)) \in \text{Im}(p) : \text{Im}(p)$ est stable par f .

• Soit $x \in \text{Ker}(p)$, $p(f(x)) = -f \circ p(x) = -f(p(x)) = -f(0_E) = 0_E$ donc $f(x) \in \text{Ker}(p) : \text{Ker}(p)$ est stable par f .

c. Pour $f \in \mathcal{F}$ et $x \in \text{Im}(p)$, on a $f(x) = f(p(x)) = -p(f(x)) = -f(x)$ car $f(x) \in \text{Im}(p)$ donc $f(x)$ est un vecteur invariant par p puisque $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E) = E_1(p)$. on en déduit que $2f(x) = 0_E$ donc que $f(x) = 0_E$. Ainsi, l'application induite par f sur $\text{Im}(p)$ est l'application nulle de $\text{Im}(p)$.

d. Soit $r = \text{rang}(p)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \amalg \mathcal{B}'' = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ une base adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ avec $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_r)$ une base de $\text{Im}(p)$ et $\mathcal{B}'' = (v_{r+1}, \dots, v_n)$ une base de $\text{Ker}(p)$.

On sait que $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, d'après ce qui précède, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$ si $f \in \mathcal{F}$ avec

$K = \text{Mat}_{\mathcal{B}''}(f|_{\text{Ker}(p)})$ car $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont stables par f et que f induit sur $\text{Im}(p)$ l'application nulle.

L'application $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(f) = K$ est bien définie, elle est linéaire. Soit $f \in \mathcal{F}$ tel que

$\varphi(f) = 0$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ donc $f = 0$ et φ est injective. Pour $K \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$, si f est l'unique

endomorphisme de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$, on a $AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 = PA$ donc $AP = -PA$ et

$f \circ p = -p \circ f$ d'où $f \in \mathcal{F}$. Par construction, on a $\varphi(f) = K$ donc φ est surjective. Ainsi, φ est un isomorphisme

qui conserve donc les dimensions, ce qui assure que $\dim(\mathcal{F}) = \dim(\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})) = (n - r)^2 = (\dim(\text{Ker}(p)))^2$.

5.11 Si p est un projecteur, alors p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$. Avec une base $\mathcal{B}$ adaptée

à la décomposition $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$: $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $r = \text{rang}(p) = \dim(\text{Im } p)$.

Comme la trace de p est celle de sa matrice dans n'importe quelle base : $\text{Tr}(p) = \text{Tr}(D) = r = \text{rang}(p)$.

Si $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $i \neq j \implies p_i \circ p_j = 0$, alors en développant on a $P^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} p_i \circ p_j = \sum_{k=1}^n p_k^2$ par hypothèse donc $P^2 = P$ car les p_k sont des projecteurs ; P est donc aussi un projecteur.

Réciproquement, si P est un projecteur, on a $\text{Im}(P) = \text{Im}\left(\sum_{i=1}^r p_i\right) \subset \sum_{i=1}^r \text{Im}(p_i)$ et, par linéarité de la trace, $\dim(\text{Im}(P)) = \text{rang}(P) = \text{Tr}(P) = \sum_{i=1}^n \text{Tr}(p_i) = \sum_{i=1}^n \text{rang}(p_i) = \sum_{i=1}^n \dim(\text{Im}(p_i))$. On en déduit donc que :

- $\text{Im}(P) = \sum_{i=1}^r \text{Im}(p_i)$ (si l'inclusion était stricte : $\dim(\text{Im}(P)) < \dim\left(\sum_{i=1}^r \text{Im}(p_i)\right) \leq \sum_{i=1}^n \dim(\text{Im}(p_i))$).
- La somme des $\text{Im}(p_i)$ est directe d'après le cours car $\dim\left(\sum_{i=1}^r \text{Im}(p_i)\right) = \sum_{i=1}^n \dim(\text{Im}(p_i))$.

Par conséquent : $\text{Im}(P) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Im}(p_i)$.

Soit alors $x \in E$, on a $p_i(x) = x_i \in \text{Im}(p_i)$ donc $x_i = p_i(x_i)$ mais aussi $x_i = P(x_i)$ car $x_i \in \text{Im}(P) \supset \text{Im}(p_i)$.

On en déduit que $P(x_i) = \sum_{j=1}^n p_j(x_i) = p(x_i) + \sum_{j \neq i} p_j(x_i)$ donc $\sum_{j \neq i} p_j(x_i) = 0$ et comme la somme $\bigoplus_{i=1}^n \text{Im}(p_i)$ est directe, on a $\forall j \neq i$, $p_j(x_i) = 0$ donc $p_j \circ p_i(x) = 0$.

5.12 Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on a $a_n \neq 0$ car P est exactement de degré n . De plus, pour $z \in \mathbb{U}$, on a par inégalité

triangulaire $|P(z)| = \left| \sum_{k=0}^n a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| |z^k| = \sum_{k=0}^n |a_k| = M'$ car $|z| = 1$. Ceci justifie bien l'existence de $\sup_{|z|=1} |P(z)|$. Mieux, comme tout complexe z de $\mathbb{U}$ s'écrit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0; 2\pi]$, on a l'égalité des ensembles $\{|P(z)| \mid z \in \mathbb{U}\} = \{|P(e^{i\theta})| \mid \theta \in [0; 2\pi]\}$ et la fonction $f : \theta \mapsto |P(e^{i\theta})|$ est continue car composée de $\sqrt{\cdot}$, $\cos$, $\sin$ et autres fonctions polynomiales. D'après le théorème des bornes atteintes, f est donc bornée sur le segment $[0; 2\pi]$ mais elle y atteint ses bornes, ce qui montre que $M = \sup_{|z|=1} |P(z)| = \max_{|z|=1} |P(z)|$.

- Pour le cas particulier $n = 1$, on a $P = a_0 + a_1 X$ avec $a_1 \neq 0$ et $P(1) = a_0 + a_1$ et $P(-1) = a_0 - a_1$ de sorte que $a_0 = \frac{P(1) + P(-1)}{2}$ et $a_1 = \frac{P(1) - P(-1)}{2}$. Ainsi, $|a_0| \leq \frac{|P(1)| + |P(-1)|}{2} \leq \frac{2M}{2} = M$ et $|a_1| \leq \frac{|P(1)| + |P(-1)|}{2} \leq \frac{2M}{2} = M$. Comme 1 et -1 sont les racines secondes de l'unité, cela nous fait penser à utiliser les racines $(n+1)$ -ièmes de l'unité dans le cas général.

- Pour n quelconque, soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$ la première racine primitive $(n+1)$ -ième de l'unité. On va estimer P en les ω^j pour $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Pour $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P(\omega^j) = \sum_{k=0}^n a_k \omega^{jk}$ et, par hypothèse $|P(\omega^j)| \leq M = \sup_{|z|=1} |P(z)|$.

Soit $m \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\sum_{j=0}^n \omega^{-mj} P(\omega^j) = \sum_{j=0}^n \omega^{-mj} \sum_{k=0}^n a_k \omega^{jk} = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \omega^{-mj} \omega^{jk} \right) a_k$.

Or si $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $k \neq m$, on a $\sum_{j=0}^n \omega^{-mj} \omega^{jk} = \sum_{j=0}^n \omega^{(k-m)j} = \frac{1 - \omega^{(k-m)(n+1)}}{1 - \omega^{(k-m)}} = 0$ car $\omega^{(k-m)} \neq 1$ et $\omega^{(k-m)(n+1)} = (\omega^{(n+1)})^{k-m} = 1$. Si $k = m$, on a $\sum_{j=0}^n \omega^{-mj} \omega^{jk} = n+1$. Ainsi, $\sum_{j=0}^n \omega^{-mj} P(\omega^j) = (n+1)a_m$ ce qui implique $(n+1)|a_m| = \left| \sum_{j=0}^n \omega^{-mj} P(\omega^j) \right| \leq \sum_{j=0}^n |\omega^{-mj}| |P(\omega^j)| \leq (n+1)M$ donc $|a_k| \leq M$.

5.13 Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$, il suffit de montrer que cette famille de $n + 1$ polynômes est libre.

Méthode 1 : soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^n \lambda_i P(X + a_i) = 0$. En utilisant la formule de TAYLOR, on obtient $\sum_{i=0}^n \lambda_i \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a_i)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \frac{P^{(k)}(a_i)}{k!} \right) X^k = 0 \iff \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \sum_{i=0}^n \lambda_i \frac{P^{(k)}(a_i)}{k!} = 0$ (1).

Comme le polynôme P est de degré n , pour chaque entier $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, le polynôme $P^{(k)}$ est de degré $n - k$; ainsi $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est de degrés échelonnés donc $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est libre et c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Tout polynôme $U \in \mathbb{R}_n[X]$ s'écrit $U = \sum_{k=0}^n u_k P^{(k)}$ et les relations (1) prouvent donc que $\sum_{i=0}^n \lambda_i U(a_i) = 0$ (2).

Pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, soit $L_j = \prod_{i \neq j} (X - a_i)$. Alors $L_j(a_i) = 0$ si $i \neq j$ et $L_j(a_j) \neq 0$. En prenant $U = L_j$ dans (2), $\lambda_j L_j(a_j) = 0 \implies \lambda_j = 0$. La famille $(P(X + a_i))_{0 \leq i \leq n}$ est donc libre : c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Méthode 2 : soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^n \lambda_i P(X + a_i) = 0$. Si on écrit $P = \sum_{k=0}^n b_k X^k$, $b_n \neq 0$ car P est de degré n et on a $\sum_{i=0}^n \lambda_i \sum_{k=0}^n b_k (X + a_i)^k = 0$. On inverse cette somme et $\sum_{k=0}^n b_k \sum_{i=0}^n \lambda_i (X + a_i)^k = 0$.

Avec le binôme de NEWTON, il vient $\sum_{k=0}^n b_k \sum_{i=0}^n \lambda_i \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_i^{k-j} X^j = 0$. On inverse encore et on obtient

$\sum_{j=0}^n \left(\sum_{k=j}^n b_k \binom{k}{j} \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i^{k-j} \right) X^j = 0$. Comme $(1, X, \dots, X^n)$ est libre, $\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket, \sum_{k=j}^n b_k \binom{k}{j} \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i^{k-j} = 0$.

Pour $j = n$, cela donne $b_n \sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$ donc $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$ car $b_n \neq 0$.

Pour $j = n - 1$, cela donne $n b_{n-1} \sum_{i=0}^n \lambda_i + b_n \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = 0$ donc, grâce à la relation ci-dessus, $\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = 0$.

Par récurrence, on montre en considérant tous les $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, que $\forall m \in \llbracket 0; n \rrbracket, \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i^m = 0$.

Si on pose $V = (a_i^j)_{0 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{n+1, 1}(\mathbb{R})$ définie par ${}^t L = (\lambda_0 \dots \lambda_n)$, on a $VL = 0$. Mais la matrice de VANDERMONDE V est inversible car $\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \neq 0$ car les $a_0, \dots, a_n$ sont distincts. Ainsi, $V^{-1}VL = L = 0$ et la famille $(P(X + a_i))_{0 \leq i \leq n}$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5.14 a. $(I_n + M)(M^2 - M^3) = M^2 + M^3 - M^3 - M^4 = M^2 - M^4 = 0$. Ainsi, si $I_n + M$ est inversible, on multiplie cette relation à gauche par $(I_n + M)^{-1}$ et on trouve $M^2 - M^3 = 0$ donc $M^2 = M^3$.

b. Par calculs, on trouve $-X^3 + X^2 = (-X^2 + 2X - 2)(X + 1) + 2$ et, en divisant cette relation par 2, on obtient $(-X^3 + X^2)U + (X + 1)V = 1$ avec $U = \frac{1}{2}$ et $V = \frac{X^2 - 2X + 2}{2}$.

c. Supposons que $M^2 = M^3$, alors en remplaçant X par M ci-dessus, on a $(I_n + M) \left(\frac{M^2 - 2M + 2I_n}{2} \right) = I_n$ donc $I_n + M$ est inversible et $(I_n + M)^{-1} = \frac{M^2 - 2M + 2I_n}{2}$.