

CHAPITRE 4

PROBABILITÉS

PARTIE 4.1 : ENSEMBLES

THÉORÈME ÉNORME 4.1 :

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément (un minimum) et toute partie non vide majorée admet un plus grand élément (un maximum).

DÉFINITION 4.1 :

Deux ensembles non vides E, F sont dits **équipotents** ($E \sim F$) si $\exists f : E \rightarrow F$ bijective. On dit que E est **fini** si $E = \emptyset$ ou s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $E \sim \llbracket 1; n \rrbracket$. On dit que E est **infini** dans le cas contraire.

REMARQUE 4.1 : • Si $E \neq \emptyset$ est fini, on montre que $\exists ! n \in \mathbb{N}^*, E \sim \llbracket 1; n \rrbracket$.

• On admet le théorème de CANTOR-BERNSTEIN qui affirme que, pour deux ensembles E et F , s'il existe $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ injectives, alors E et F sont équipotents.

DÉFINITION 4.2 :

Soit E un ensemble fini, on définit son **cardinal**, noté $\text{card}(E)$ ou $|E|$ ou $\#E$, par : $\text{card}(E) = 0$ si $E = \emptyset$; $\text{card}(E) = n$ où n est l'unique entier n tel que $E \sim \llbracket 1; n \rrbracket$ sinon.

REMARQUE 4.2 : • Pour deux entiers $a \leq b$, on a $\text{card}(\llbracket a; b \rrbracket) = b - a + 1$.

• Tout ensemble E fini de cardinal n s'écrit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ où les éléments sont distincts 2 à 2.

PROPOSITION 4.2 :

Si E et F sont non vides et finis : $(E \sim F) \iff (\text{card}(E) = \text{card}(F))$.

Soit E un ensemble fini, alors toute partie A de E est finie et on a $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$.

De plus, si $A \subset E$, on a $A = E \iff \text{card}(A) = \text{card}(E)$.

REMARQUE 4.3 : • Toute intersection et toute réunion finie d'ensembles finis est finie.

• Soit E fini et $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

• Si $\bar{A}$ est le complémentaire de A , $\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$ et $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$.

THÉORÈME 4.3 :

Soit $f : E \rightarrow F$ une application avec E ensemble fini, alors on a :

• $\text{Im}(f)$ est fini et $\text{card}(\text{Im } f) \leq \text{card } E$; de plus, $\text{card}(\text{Im } f) = \text{card}(E) \iff f$ **injective**.

• si F est fini on a $\text{card}(\text{Im } f) \leq \text{card } F$; de plus, $\text{card}(\text{Im } f) = \text{card}(F) \iff f$ **surjective**. On a aussi f **inj.** $\implies \text{card}(E) \leq \text{card}(F)$; f **surj.** $\implies \text{card}(E) \geq \text{card}(F)$; f **bij.** $\implies \text{card}(E) = \text{card}(F)$.

REMARQUE 4.4 : D'où le **principe des tiroirs** de DIRICHLET : si deux ensembles E et F sont finis et si $\text{card}(E) > \text{card}(F)$ alors il n'y a pas d'injection de E dans F (trop de chaussettes pour les tiroirs).

THÉORÈME ÉNORME 4.4 :

Soit $f : E \rightarrow F$ avec E, F de même cardinal fini : f **injective** $\iff f$ **surjective** $\iff f$ **bijective**.

PROPOSITION 4.5 :

Soit $E_1, \dots, E_n$ finis disjoints 2 à 2 : $\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n \text{card}(E_k)$.

REMARQUE 4.5 : • Si $\{E_1, \dots, E_p\}$ constitue une **partition** de E fini : $\sum_{k=1}^p \text{card}(E_k) = \text{card}(E)$.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E et F deux ensembles finis et $f : E \rightarrow F$ qui vérifie : $\forall y \in F$, y possède exactement p antécédent(s). Alors $\text{card}(E) = p \times \text{card}(F)$ (**lemme des bergers**).

PROPOSITION 4.6 :

Soit E, F deux ensembles finis de cardinaux respectifs $n \leq p$.

$E \times F$ est fini et $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$. E^m est fini si $m \in \mathbb{N}^*$ et $\text{card}(E^m) = (\text{card}(E))^m$.

De plus, $\mathcal{F}(E, F)$ est aussi fini et $\text{card}(\mathcal{F}(E, F)) = (\text{card}(F))^{\text{card}(E)}$.

Il y a exactement $A_p^n = \frac{p!}{(p-n)!}$ injections de E dans F .

Il y a aussi A_p^n n -listes (ou n -uplets) d'éléments distincts de F .

Soit E un ensemble fini de cardinal n , alors il y a exactement $n!$ permutations de E .

Soit E un ensemble fini de cardinal n , $\mathcal{P}(E)$ est fini et $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, alors en notant $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties de E à p éléments, on a $\mathcal{P}_p(E)$ fini et $\text{card}(\mathcal{P}_p(E)) = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

DÉFINITION 4.3 :

Si $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ si $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $\binom{n}{p} = 0$ sinon.

PROPOSITION 4.7 :

$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$.

Soit A un anneau, $(x, y) \in A^2$, $n \in \mathbb{N}$, $xy = yx$: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ (**binôme de NEWTON**).

DÉFINITION 4.4 :

On dit qu'un ensemble est **dénombrable** s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.

REMARQUE 4.6 : • $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont dénombrables.

- E dénombrable s'écrit $E = \{x_0, \dots, x_n, \dots\} = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (écriture en extension).
- Si E est fini et F dénombrable (ou E et F sont dénombrables), $E \times F$ est dénombrable.
- Toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable ; toute réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables l'est encore ; tout produit fini d'ensembles dénombrables l'est encore.

EXEMPLE 4.1 : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et dénombrable. Ni $\mathbb{R}$, ni $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne sont dénombrables.

PARTIE 4.2 : ESPACE PROBABILISÉ

DÉFINITION 4.5 :

Soit Ω un ensemble, on appelle **tribu** sur Ω toute partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ telle que :

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- Si $A \in \mathcal{A}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$.
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω , univers d'une expérience aléatoire, les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés les **événements**.

PROPOSITION 4.8 :

Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω , A et B deux événements de $\mathcal{A}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, alors :

$\emptyset \in \mathcal{A}$; $A \cup B \in \mathcal{A}$; $A \cap B \in \mathcal{A}$; $A \setminus B \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

REMARQUE 4.7 : Un peu de terminologie :

- Ω est appelé **évènement certain**, $\emptyset = \bar{\Omega}$ est appelé **évènement impossible**.
- Si A est un évènement, l'évènement $\bar{A}$ est appelé **évènement contraire** de A .
- Si $\omega \in \Omega$ et si $\{\omega\} \in \mathcal{A}$, on dit que $\{\omega\}$ est un **évènement élémentaire**.
- Soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, si $A \subset B$, on dit que l'évènement A implique l'évènement B .
- Deux évènements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

DÉFINITION 4.6 :

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble Ω , on appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0; 1]$ telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 incompatibles, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (σ -additivité).

Un **espace probabilisé** est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, où $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

PROPOSITION 4.9 :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, alors $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_n$ des évènements 2 à 2 incompatibles : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$.
- Pour $(A, B) \in \mathcal{A}^2$, $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$; $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- Pour des évènements $A_1, \dots, A_n$: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(A_k)$.

REMARQUE 4.8 : Quelques probabilités définies sur les évènements élémentaires :

- Sur un ensemble fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, la **loi uniforme** est définie par $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \frac{1}{n}$.
- Si $\Omega = \{\omega_0, \dots, \omega_n\}$, $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (**loi binomiale** de paramètre $p \in]0; 1[$).
- Si $\Omega = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable et si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0; 1]^{\mathbb{N}}$ est telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n$: si $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(\{x\})$.

DÉFINITION 4.7 :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{A}$.

On dit que A est **négligeable** si $\mathbb{P}(A) = 0$ et que A est **presque sûr** si $\mathbb{P}(A) = 1$.

THÉORÈME 4.10 :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements :

- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion (resp. décroissante), on a la **continuité croissante** (resp. **continuité décroissante**) : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (resp. $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$).
- Si $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ (**sous-additivité**).

REMARQUE 4.9 : • Une réunion finie ou dénombrable d'évènements négligeables est négligeable.

- Une intersection finie ou dénombrable d'évènements presque sûrs est presque sûr.

PROPOSITION 4.11 :

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'évènements :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right).$$

PARTIE 4.3 : CONDITIONNEMENT ET INDÉPENDANCE

DÉFINITION 4.8 :

Soit $B \in \mathcal{A}$ un évènement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Si $A \in \mathcal{A}$ est un évènement quelconque, on définit la **probabilité conditionnelle de A sachant B**, notée $\mathbb{P}_B(A)$ (ou même $\mathbb{P}(A|B)$), par la relation suivante :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \text{ ce qui équivaut à } \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) \mathbb{P}(B).$$

PROPOSITION 4.12 :

Soit $B \in \mathcal{A}$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}_B : \mathcal{A} \rightarrow [0; 1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

THÉORÈME 4.13 :

Si $A_1, \dots, A_n$ sont des évènements de $\mathcal{A}$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, alors :

$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$ (probabilités composées).

DÉFINITION 4.9 :

On appelle **système complet d'évènements** (resp. **système quasi-complet d'évènements**) toute famille $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I$ (I fini ou dénombrable) telle que :

- I est un ensemble d'indices fini ou dénombrable.
- $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$.
- $\bigcup_{k \in I} A_k = \Omega$ (resp. $\sum_{k \in I} \mathbb{P}(A_k) = 1$).

REMARQUE 4.10 : • Si $A \subset \Omega$, $(A, \bar{A})$ est un système complet fini d'évènements (engendré par A).

• Si $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, la famille $(A \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B, \bar{A} \cap \bar{B})$ l'est aussi (engendré par A et B).

• Si $\Omega = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable et si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ alors $(\{\omega_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ est un SCE.

THÉORÈME ÉNORME 4.14 :

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'évènements et $B \in \mathcal{A}$.

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B) \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \mid A_n) \mathbb{P}(A_n) \text{ (formule des probabilités totales).}$$

THÉORÈME 4.15 :

Soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ tel que $\mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) > 0$: $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_{A \cap B}}{\mathbb{P}(B)}$ (formule de BAYES).

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un SCE et $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors $\mathbb{P}_B(A_n) = \frac{\mathbb{P}_{A_n \cap B}}{\mathbb{P}(B)}$.

DÉFINITION 4.10 :

A, B sont dits **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$. On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont des **évènements indépendants** (ou $(A_1, \dots, A_n)$ est une famille indépendante) si $\forall J \subset \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$. La famille $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est dite **indépendante** si pour toute partie finie J de $\mathbb{N}$, $(A_j)_{j \in J}$ est indépendante.

PROPOSITION 4.16 :

$(A, B) \in \mathcal{A}^2$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$: $(A, B \text{ indépendants}) \iff \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

REMARQUE 4.11 : • Si A et B sont indépendants, alors $(A \text{ et } \bar{B}), (\bar{A} \text{ et } B), (\bar{A} \text{ et } \bar{B})$ aussi.

• Indépendance implique indépendance deux à deux ; mais la réciproque est fausse.