

CHAPITRE 4

SOMMABILITÉ

4.1 : Borne supérieure

DÉFINITION 4.1 :

Sur $[0; +\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on prolonge les opérations $+$ et $\times$ classiques en rajoutant :

- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$ si $a \in \mathbb{R}_+$,
- $a \times (+\infty) = (+\infty) \times a = +\infty$ si $a > 0$ et $0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0$.

On prolonge aussi la relation d'ordre $\leq$ en convenant que $a \leq (+\infty)$ si $a \in \mathbb{R}_+$, $(+\infty) \leq (+\infty)$.

PROPOSITION 4.1 :

Toute partie A de $[0; +\infty]$ admet une borne supérieure (le plus petit des majorants) :

- $\text{Sup}(A)$ est la borne supérieure classique si $A \subset [0; +\infty[$.
- $\text{Sup}(A) = +\infty$ si $+\infty \in A$ et $\text{Sup}(A) = 0$ si $A = \emptyset$.

Si A et B sont des parties de $[0; +\infty]$ et $\lambda \in [0; +\infty]$, on a l'implication $A \subset B \implies \text{Sup}(A) \leq \text{Sup}(B)$ et les deux relations $\text{Sup}(\lambda A) = \lambda \text{Sup}(A)$ et $\text{Sup}(A + B) = \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B)$.

4.2 : Familles de réels positifs

DÉFINITION 4.2 :

Soit I un ensemble et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0; +\infty]$ indexée par I , on note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I . On pose $A = \left\{ \sum_{i \in J} x_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\} \subset [0; +\infty]$.

On appelle **somme de la famille** $(x_i)_{i \in I}$ l'élément de $[0; +\infty]$, noté $\sum_{i \in I} x_i$, tel que $\sum_{i \in I} x_i = \text{Sup}(A) \in [0; +\infty]$.

Soit I un ensemble et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0; +\infty[$ indexée par I .

On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est **sommable** si $\sum_{i \in I} x_i < +\infty$.

THÉORÈME 4.2 :

Soit cinq ensembles $I, J, I'', I' \subset I, K$ et un recouvrement disjoint $I = \bigsqcup_{k \in K} I_k$ de I , $\lambda \in [0; +\infty]$ et

deux familles $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0; +\infty]$, σ une bijection de I'' dans I , deux familles $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ d'éléments de $[0; +\infty]$ et une famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ d'éléments de $[0; +\infty]$.

- $\sum_{i \in I'} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$ (restriction).
- $\sum_{i \in I} (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$ (linéarité).
- Si $\forall i \in I, x_i \leq y_i$, alors $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$ (croissance).
- $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in I_k} x_j \right)$ (sommation par paquets).
- $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i'' \in I''} x_{\sigma(i'')}$. En particulier, si $I'' = I$, $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)}$ est invariant par permutation des termes, elle ne dépend pas de l'ordre de sommation.
- $\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)$ (théorème de FUBINI).
- $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \times \left(\sum_{j \in J} b_j \right)$ (familles produits).

4.3 : Familles complexes

DÉFINITION 4.3 :

Soit I un ensemble et $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par I . On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est **sommable** si $\sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$. On note $\ell^1(\mathbb{K})$ l'ensemble des familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I .

REMARQUE 4.1 : Si $I = \mathbb{N}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $\sum x_n$ converge absolument.

PROPOSITION 4.3 :

Soit I un ensemble, $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(y_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. Si on suppose que $\forall i \in I, |x_i| \leq y_i$ et que $(y_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $(x_i)_{i \in I}$ l'est aussi.

DÉFINITION 4.4 :

Soit I un ensemble, $(x_i)_{i \in I}$ une famille sommable. On définit la **somme S de cette famille** par :

$$\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad S = \left(\sum_{i \in I} x_i^+ \right) - \left(\sum_{i \in I} x_i^- \right) \text{ si, pour } i \in I, \text{ on pose } x_i^+ = \text{Max}(x_i, 0), x_i^- = \text{Max}(-x_i, 0).$$

$$\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad S = \left(\sum_{i \in I} \text{Re}(x_i) \right) + i \left(\sum_{i \in I} \text{Im}(x_i) \right).$$

THÉORÈME 4.4 :

Soit I, I' et J trois ensembles, $\lambda \in \mathbb{K}$, $(x_i)_{i \in I}$, $(y_i)_{i \in I}$, $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$, $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ des familles sommables d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit aussi $\sigma : I' \rightarrow I$ une bijection et deux familles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sommables d'éléments de $\mathbb{K}$. On a alors les propriétés suivantes :

- (i) **Restriction** : si I' est une partie de I , alors $(x_i)_{i \in I'}$ est sommable.
- (ii) **Linéarité** : la famille $(\lambda x_i + y_i)_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$.
- (iii) **Croissance** : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $\forall i \in I, x_i \leq y_i$, alors $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.
- (iv) **Inégalité triangulaire** : $\left| \sum_{i \in I} x_i \right| \leq \sum_{i \in I} |x_i|$.
- (v) **Sommation par paquets** : pour tout recouvrement disjoint $(I_k)_{k \in K}$ de I , c'est-à-dire que $I = \bigsqcup_{k \in K} I_k$, la famille $\left(\sum_{j \in I_k} x_j \right)_{k \in K}$ est sommable et $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in I_k} x_j \right)$.
- (vi) **Changement d'indice** : $(x_{\sigma(i')})_{i' \in I'}$ est sommable et $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i' \in I'} x_{\sigma(i')}$.
- (vii) **Théorème de FUBINI** : les familles $\left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right)_{i \in I}$ et $\left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)_{j \in J}$ sont sommables et on a la relation de FUBINI $\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)$.
- (viii) **Familles produit** : la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable et $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right)$.
- (ix) **Approximation** : $\forall \varepsilon > 0, \exists J \in \mathcal{P}_f(I), \left| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} x_j \right| \leq \varepsilon$.
- (x) **Produit de CAUCHY** : en posant $p_n = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i+j=n}} u_i v_j = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Alors $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi sommable et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$.

REMARQUE 4.2 : • $\ell^1(I, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel et $S : \ell^1(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire si $S((x_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} x_i$.

• Pour $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ absolument convergente et σ est une permutation de $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$.