

CHAPITRE 5

RÉDUCTION

PARTIE 5.1 : ÉLÉMENTS PROPRES

DÉFINITION 5.1 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

- On dit que λ est une **valeur propre** de u s'il existe un vecteur x de E non nul tel que $u(x) = \lambda x$.
- Le **spectre** de u , noté $\text{Sp}(u)$, est l'ensemble des valeurs propres de u .
- Si $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on note $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ l'**espace propre** de u associé à λ .
- Un vecteur non nul de $E_\lambda(u)$ est appelé **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ .
- Un vecteur propre est un vecteur non nul $x \in E$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ qui vérifie $u(x) = \lambda x$.

REMARQUE FONDAMENTALE 5.1 : • Si $\lambda = 0$, alors $E_0(u) = \text{Ker}(u)$ et si $\lambda \neq 0$, $E_\lambda(u) \subset \text{Im}(u)$.

- Soit $e \in E$ non nul et $D = \text{Vect}(e)$: $(D \text{ stable par } u) \iff (e \text{ vecteur propre de } u)$.

PROPOSITION 5.1 :

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ 2 à 2 distinctes :

- les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe.
- Si $x_1, \dots, x_p$ sont des vecteurs propres associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

PROPOSITION 5.2 :

Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent (c'est-à-dire que $u \circ v = v \circ u$) alors les espaces propres de u sont stables par v (et réciproquement).

DÉFINITION 5.2 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les **valeurs propres**, le **spectre** de A (noté $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$) et les **vecteurs propres** et les **espaces propres** de A (notés $E_\lambda(A)$) sont ceux de u canoniquement associé à A .

PROPOSITION 5.3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on a : $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

De plus, si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ alors $\bar{\lambda} \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\dim E_\lambda(A) = \dim E_{\bar{\lambda}}(A)$.

PROPOSITION 5.4 :

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables (il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$), alors $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \text{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$ et pour $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, on a $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(B)$.

PROPOSITION 5.5 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Pour toute base $\mathcal{B}$ de E , on a $\text{Sp}(u) = \text{Sp}_{\mathbb{K}}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$.

DÉFINITION 5.3 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Le **polynôme caractéristique** de u est le polynôme $\chi_u \in \mathbb{K}[X]$ associé à la fonction polynomiale définie par $\lambda \in \mathbb{K} \mapsto \det(\lambda \text{id}_E - u)$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de même $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.

REMARQUE 5.2 : • Si $\mathcal{B}$ est une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors $\chi_u = \chi_A$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $x \mapsto \det(A + xB)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à n .

THÉORÈME ÉNORME 5.6 :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\deg(\chi_A) = n$ et $\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$. Soit E un espace de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\deg(\chi_u) = n$ et $\chi_u = X^n - \text{tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$.

THÉORÈME 5.7 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , u un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a les équivalences suivantes : $\lambda \in \text{Sp}(u) \iff (u - \lambda \text{id}_E) \notin \text{GL}(E) \iff \chi_u(\lambda) = 0$.

Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u (dans $\mathbb{K}$).

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors : $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \iff (A - \lambda I_n) \notin \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \chi_A(\lambda) = 0$.

Le spectre de A (sur $\mathbb{K}$) est l'ensemble des racines de χ_A (dans $\mathbb{K}$).

REMARQUE 5.3 : On en déduit, si $u \in \mathcal{L}(E)$ et E de dimension n ou si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- u admet au plus n valeurs propres distinctes. A admet au plus n valeurs propres complexes distinctes.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u (ou A) possède au moins une valeur propre complexe.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si n est impair, u (ou A) possède au moins une valeur propre réelle.

PROPOSITION 5.8 :

Si A et B semblables, elles ont les mêmes valeurs propres de mêmes multiplicités car $\chi_A = \chi_B$. De même avec A et ${}^t A$ car $\chi_A = \chi_{{}^t A}$.

REMARQUE HP 5.4 : Soit E un espace de dimension finie, u un endomorphisme de E et F un sous-espace de E stable par u . On note u_F l'endomorphisme de F induit par u : χ_{u_F} divise χ_u .

Plus généralement, si la matrice de u dans une base $\mathcal{B}$ est triangulaire par blocs avec des blocs $(A_k)_{1 \leq k \leq r}$ sur la diagonale, alors : $\chi_u = \prod_{k=1}^r \chi_{A_k}$.

THÉORÈME ÉNORME 5.9 :

Soit E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_u(u) = 0$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_A(A) = 0$ (CAYLEY-HAMILTON).

DÉFINITION 5.4 :

Soit E un espace de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **ordre de multiplicité algébrique** de λ , notée $m_\lambda(u)$ (ou $m_\lambda(A)$) l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme χ_u (ou χ_A). L'entier $\dim E_\lambda(u)$ est appelé **l'ordre de multiplicité géométrique** de la valeur propre λ .

THÉORÈME 5.10 :

Soit E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$, si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ (par ex. si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) :

$$n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m_\lambda(u), \quad \text{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda m_\lambda(u) \quad \text{et} \quad \det(u) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda^{m_\lambda(u)}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} m_\lambda(A)$, $\text{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda m_\lambda(A)$ et $\det(A) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda^{m_\lambda(A)}$.

REMARQUE 5.5 : • Si on a toutes les valeurs propres de A sauf une, on utilise la trace.

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est valeur propre de A , alors on sait que $\bar{\lambda}$ l'est aussi et que $E_\lambda(A)$ et $E_{\bar{\lambda}}(A)$ ont même dimension mais λ et $\bar{\lambda}$ ont aussi même ordre de multiplicité algébrique.

THÉORÈME ÉNORME 5.11 :

Soit E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on a $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, on a $1 \leq \dim E_\lambda(A) \leq m_\lambda(A)$.

REMARQUE 5.6 : L'ordre géométrique est donc inférieur à l'ordre algébrique pour toute valeur propre.

PARTIE 5.2 : RÉDUCTION EN DIMENSION FINIE

DÉFINITION 5.5 :

Soit E un espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.

PROPOSITION 5.12 :

Si λ est une valeur propre simple, alors $E_{\lambda}(u)$ (ou $E_{\lambda}(A)$) est une droite.

DÉFINITION 5.6 :

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est **scindé à racines simples** ou **simplement scindé** (noté souvent **SARS**) s'il est de degré $n \geq 1$ et s'il possède n racines distinctes deux à deux.

PROPOSITION 5.13 :

Soit E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u possède n valeurs propres distinctes (si χ_u est SARS) alors $\forall \lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim E_{\lambda}(u) = 1$ et u est diagonalisable.

REMARQUE 5.7 : Attention : ce n'est qu'une condition suffisante de diagonalisabilité ; il est clair que id_E est diagonalisable mais que son polynôme caractéristique n'est pas à racines simples.

THÉORÈME 5.14 :

Soit E un espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u .
- (ii) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
- (iii) $\dim(E) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_{\lambda}(u))$.
- (iii) $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$.
- (iv) Il existe $F_1, \dots, F_p$ stables par u tels que $E = \sum_{k=1}^p F_k$ et $u_{F_1}, \dots, u_{F_p}$ sont des homothéties.

REMARQUE FONDAMENTALE 5.8 : Soit E un espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- u est diagonalisable $\implies E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.
- Si u est nilpotent, u est diagonalisable $\iff u = 0$.

REMARQUE 5.9 : Soit E un espace vectoriel de dimension n et u endomorphisme de E . Il suffit de trouver des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de u telles que $\sum_{k=1}^r \dim(E_{\lambda_k}(u)) = n$ pour que u soit diagonalisable et qu'on puisse conclure que $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$.

PROPOSITION 5.15 :

Soit E un espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable tel que $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. Si $p_1, \dots, p_r$ est la famille des projecteurs associée à $E = \bigoplus_{1 \leq k \leq r} E_{\lambda_k}(u)$:

- $p_1 + \dots + p_r = \text{id}_E$.
- $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $i \neq j \implies p_i \circ p_j = 0$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^n = \lambda_1^n p_1 + \dots + \lambda_r^n p_r$.

THÉORÈME ÉNORME 5.16 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$:

$(u \text{ est diagonalisable}) \iff (\chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \text{ et } \forall \lambda \in \text{Sp}(u), \dim(E_{\lambda}(u)) = m_{\lambda}(u))$.

DÉFINITION 5.7 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est **diagonalisable** (dans $\mathbb{K}$) si A est semblable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) à une matrice diagonale ; s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

PROPOSITION 5.17 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u canoniquement associé à A :

- A est diagonalisable $\iff u$ est diagonalisable.
- Si A est diagonalisable et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et $P = P_{\mathcal{B}_{\text{can}}, \mathcal{B}}$ où $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de u .

REMARQUE 5.10 : Plus généralement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, E de dimension n , $\mathcal{B}$ une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors : $(A \text{ est diagonalisable}) \iff (u \text{ est diagonalisable})$.

PROPOSITION 5.18 :

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$:

- Si $\lambda \in \text{Sp}(u)$ alors $P(\lambda) \in \text{Sp}(P(u))$.
- Si $P(u) = 0$ alors $\forall \lambda \in \text{Sp}(u), P(\lambda) = 0$; donc $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$ divise P .

REMARQUE 5.11 : Toutes les valeurs propres de u sont des racines de tout polynôme annulateur de u alors que ce sont les racines du polynôme caractéristique de u (ou du polynôme minimal de u).

THÉORÈME ÉNORME 5.19 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$:

$(u \text{ diagonalisable}) \iff (\exists P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0 \text{ et } P \text{ SARS (dans } \mathbb{K})) \iff \left(\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda) \text{ annule } u \right)$.

PROPOSITION 5.20 :

Si u est un endomorphisme diagonalisable de E , espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace de E stable par u , alors l'endomorphisme induit par u sur F est diagonalisable.

PROPOSITION 5.21 :

Soit E de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, on suppose u diagonalisable :

- $(v \text{ commute avec } u) \iff (\text{tous les sous-espaces propres de } u \text{ sont stables par } v)$.
- Si $v \circ u = u \circ v$ et v diagonalisable, alors il existe une base de E composée de vecteurs propres communs à u et v (on dit que u et v codiagonalisent dans $\mathcal{B}$).

REMARQUE 5.12 : Si u est diagonalisable, alors en notant $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ son spectre de cardinal r , alors la sous-algèbre $\mathcal{C}(u)$ de $\mathcal{L}(E)$ (commutant de u) est de dimension $\sum_{k=1}^r \dim(E_{\lambda_k}(u))^2$.

DÉFINITION 5.8 :

Soit u un endomorphisme d'un espace E de dimension finie, on dit que u est **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire (supérieure).

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** si $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure.

THÉORÈME ÉNORME 5.22 :

Soit E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$: $(u \text{ est trigonalisable}) \iff (\chi_u \text{ est scindé (sur } \mathbb{K}))$.

REMARQUE FONDAMENTALE 5.13 : • Toute matrice est donc trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres complexes de A (comptées avec multiplicité), alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$.