

CHAPITRE 4

FAMILLES SOMMABLES

4.1.1 : Borne supérieure

PROPOSITION 4.14 :

Si A et B sont des parties de $[0; +\infty]$ et $\lambda \in [0; +\infty]$, on a l'implication $A \subset B \implies \text{Sup}(A) \leq \text{Sup}(B)$ et les deux relations $\text{Sup}(\lambda A) = \lambda \text{Sup}(A)$ et $\text{Sup}(A + B) = \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B)$.

DÉMONSTRATION :

- Si A et B sont des parties de $[0; +\infty]$ et $A \subset B$, comme $\text{Sup}(B)$ est un majorant de B , c'est donc aussi un majorant de A , donc $\forall a \in A, a \in B$ donc $a \leq \text{Sup}(B)$. Ainsi, $\text{Sup}(B)$ est plus grand que le plus petit majorant de A qui est $\text{Sup}(A)$ par définition. On a bien $\text{Sup}(A) \leq \text{Sup}(B)$.
- Montrons maintenant que si $A \subset [0; +\infty]$ et $\lambda \in [0; +\infty]$, on a $\text{Sup}(\lambda A) = \lambda \text{Sup}(A)$.
 - Si $A = \emptyset$ ou si $A = \{0\}$, on a $0 = \lambda \times 0$ qui est vrai même si $\lambda = +\infty$ par convention.
 - Si $A \neq \{0\}$ et $\lambda = +\infty$, alors $+\infty \in \lambda A$ et $\text{Sup}(A) > 0$ donc $+\infty = +\infty$.
 - Si $A \neq \{0\}$ et $\lambda = 0$, alors on a $0 = 0$.
 - Si $A \neq \{0\}$ et $\lambda \in]0; +\infty[$, $\forall y \in \lambda A, \exists x \in A, y = \lambda x$ donc $y \leq \lambda \text{Sup}(A)$. Ainsi, $\lambda \text{Sup}(A)$ est un majorant de λA donc $\text{Sup}(\lambda A) \leq \lambda \text{Sup}(A)$. De plus, si $x \in A$, $\lambda x \in \lambda A$ donc $\lambda x \leq \text{Sup}(\lambda A)$ et on a $x \leq \frac{\text{Sup}(\lambda A)}{\lambda}$ donc $\frac{\text{Sup}(\lambda A)}{\lambda}$ est un majorant de A d'où $\text{Sup}(A) \leq \frac{\text{Sup}(\lambda A)}{\lambda}$ et $\text{Sup}(\lambda A) \geq \lambda \text{Sup}(A)$. Par antisymétrie, $\text{Sup}(\lambda A) = \lambda \text{Sup}(A)$.
- Si A et B sont des parties de $[0; +\infty]$, montrons que $\text{Sup}(A + B) = \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B)$.
 - Si $A = \emptyset$, c'est évident car $A + B = B$ et $\text{Sup}(A) = 0$.
 - Si $+\infty \in A$ ou $+\infty \in B$, alors $+\infty \in A + B$ et on a $+\infty = +\infty$.
 - Si $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ (par symétrie) et $+\infty \notin A \cup B$, alors si $x \in A + B$, $\exists (a, b) \in A \times B, x = a + b$ donc $x \leq \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B)$ donc $\text{Sup}(A + B) \leq \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B)$. Soit $\varepsilon > 0$, $\text{Sup}(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un majorant de A donc il existe $a \in A$ tel que $a > \text{Sup}(A) - \frac{\varepsilon}{2}$. De même, il existe $b \in B$ tel que $b > \text{Sup}(B) - \frac{\varepsilon}{2}$ donc, par somme $a + b \in A + B$ et $a + b > \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B) - \varepsilon$ ce qui prouve que $\text{Sup}(A + B) > \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B) - \varepsilon$. En passant à la limite quand ε tend vers 0, on a $\text{Sup}(A + B) \geq \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B)$. Ainsi, $\text{Sup}(A + B) = \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B)$.

4.1.2 : Familles de réels positifs

PROPOSITION , RÈGLES DE CALCULS SUR LES SOMMES 4.15 :

Soit un ensemble I , $I' \subset I$, $\lambda \in [0; +\infty]$ et deux familles $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0; +\infty]$.

- (i) $\sum_{i \in I'} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$ (restriction).
- (ii) $\sum_{i \in I} (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$ (linéarité).
- (iii) Si $\forall i \in I, x_i \leq y_i$, alors $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$ (croissance).

DÉMONSTRATION :

- (i) Notons $A' = \left\{ \sum_{i \in J} x_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I') \right\}$ de sorte que $\sum_{i \in I'} x_i = \text{Sup}(A')$, alors $A' \subset A = \left\{ \sum_{i \in J} x_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$ car toute partie finie J de I' en est une de I . Ainsi, par définition, $\sum_{i \in I'} x_i = \text{Sup}(A') \leq \text{Sup}(A) = \sum_{i \in I} x_i$.
- (ii)₁ Soit $A = \left\{ \sum_{i \in J} x_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$, $B = \left\{ \sum_{i \in J} y_i \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$ et $C = \left\{ \sum_{i \in J} (x_i + y_i) \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$. Par définition, $\sum_{i \in I} x_i = \text{Sup}(A)$, $\sum_{i \in I} y_i = \text{Sup}(B)$ et $\sum_{i \in I} (x_i + y_i) = \text{Sup}(C)$. Or, par définition, on a $A + B = \left\{ \sum_{i \in J} x_i + \sum_{i \in J'} y_i \mid (J, J') \in \mathcal{P}_f(I)^2 \right\}$. Ainsi, $C \subset A + B$ (avec $J = J'$) donc $\text{Sup}(C) \leq \text{Sup}(A + B)$. Réciproquement, si $s \in A + B$, $s = \sum_{i \in J} x_i + \sum_{i \in J'} y_i$ avec $(J, J') \in \mathcal{P}_f(I)^2$ donc, en notant $K = J \cup J' \in \mathcal{P}_f(I)$, on a $s \leq \sum_{i \in K} x_i + \sum_{i \in K} y_i$ par positivité des x_i et des y_i donc $s \leq \text{Sup}(C)$. On a donc aussi $\text{Sup}(A + B) \leq \text{Sup}(C)$. Ainsi, $\text{Sup}(C) = \text{Sup}(A + B) = \text{Sup}(A) + \text{Sup}(B)$ d'où la relation attendue : $\sum_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$.
- (ii)₂ $A' = \left\{ \sum_{i \in J} (\lambda x_i) \mid J \in \mathcal{P}_f(I) \right\} = \lambda A$ donc $\sum_{i \in I} (\lambda x_i) = \text{Sup}(A') = \text{Sup}(\lambda A) = \lambda \text{Sup}(A) = \lambda \sum_{i \in I} x_i$.
- (iii) Soit $J \in \mathcal{P}_f(I)$, alors $\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in J} y_i$ par compatibilité de $\leq$ avec la loi $+$ donc, par définition, on a $\sum_{i \in J} x_i \leq \text{Sup}(B) = \sum_{i \in I} y_i$. $\sum_{i \in I} y_i$ est donc un majorant de A , d'où $\sum_{i \in I} x_i = \text{Sup}(A) \leq \sum_{i \in I} y_i$.

THÉORÈME DE SOMMATION PAR PAQUETS (ÉNORME) 4.16 :

Pour tout recouvrement disjoint $I = \bigsqcup_{k \in K} I_k$ d'un ensemble d'indices I , et toute famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0; +\infty]$, on a $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in I_k} x_j \right)$.

DÉMONSTRATION : • Soit J une partie finie de I et posons $L = \{k \in K \mid I_k \cap J \neq \emptyset\}$ et, pour tout $k \in L$, $J_k = J \cap I_k \in \mathcal{P}_f(I_k)$. Comme $\bigsqcup_{k \in L} J_k = \bigsqcup_{k \in L} (J \cap I_k) = J \cap \left(\bigsqcup_{k \in L} I_k \right) = J \cap I = J$, on a $\sum_{k \in L} \text{card}(J_k) = \text{card}(J)$ donc, puisque $\forall k \in L, \text{card}(J \cap I_k) \geq 1$, L est un ensemble fini (c'est-à-dire $L \in \mathcal{P}_f(K)$) avec en plus $\text{card}(L) \leq \text{card}(J)$.

• Par commutativité d'une somme finie, $\sum_{i \in J} x_i = \sum_{k \in L} \left(\sum_{j \in J_k} x_j \right)$. Par compatibilité de $\leq$ avec la somme, comme $\sum_{j \in J_k} x_j \leq \sum_{j \in I_k} x_j$ par définition, $\sum_{k \in L} \left(\sum_{j \in J_k} x_j \right) \leq \sum_{k \in L} \left(\sum_{j \in I_k} x_j \right)$. Par définition encore, comme $L \in \mathcal{P}_f(K)$, on a $\sum_{k \in L} \left(\sum_{j \in I_k} x_j \right) \leq \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in I_k} x_j \right)$. On a donc $\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in I_k} x_j \right)$; ceci étant vrai pour toute partie $J \in \mathcal{P}_f(I)$, on a bien la relation attendue : $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in I_k} x_j \right)$.

• Soit L une partie finie de K , comme il s'agit d'une somme finie, par linéarité, $\sum_{k \in L} \left(\sum_{j \in I_k} x_j \right) = \sum_{k \in L} \text{Sup}(A_k)$ où $A_k = \left\{ \sum_{j \in J_k} x_j \mid J_k \in \mathcal{P}_f(I_k) \right\}$. Par définition de la somme, on obtient $\sum_{k \in L} \left(\sum_{j \in I_k} x_j \right) = \text{Sup}(A_L)$ en notant $A_L = \sum_{k \in L} A_k = \left\{ \sum_{k \in L} \left(\sum_{j \in J_k} x_j \right) \mid (J_k)_{k \in L} \in \prod_{k \in L} \mathcal{P}_f(I_k) \right\}$. Alors $\sum_{k \in L} \left(\sum_{j \in J_k} x_j \right) = \sum_{i \in \bigsqcup_{k \in L} J_k} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$

(tout est fini) d'où $\forall L \in \mathcal{P}_f(K), \text{Sup}(A_L) \leq \sum_{i \in I} x_i$ et $\sum_{k \in L} \left(\sum_{j \in I_k} x_j \right) \leq \sum_{i \in I} x_i$ donc $\sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in I_k} x_j \right) \leq \sum_{i \in I} x_i$.

• On conclut par antisymétrie à l'égalité attendue : $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in I_k} x_j \right)$.

THÉORÈME DE CALCUL DES SOMMES DE FAMILLES POSITIVES 4.17 :

Soit trois ensembles I , I' et J , σ une bijection de I' dans I , deux familles $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in J}$ d'éléments de $[0; +\infty]$ et une famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ d'éléments de $[0; +\infty]$.

- $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i' \in I'} x_{\sigma(i')}$. En particulier, si $I' = I$, $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)}$ est invariant par permutation des termes, elle ne dépend pas de l'ordre de sommation.
- $\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)$ (théorème de FUBINI).
- $\sum_{(i,j) \in I \times J} x_i y_j = \left(\sum_{i \in I} x_i \right) \times \left(\sum_{j \in J} y_j \right)$ (familles produits).

DÉMONSTRATION : • $I = \sigma(I') = \bigsqcup_{i' \in I'} \{\sigma(i')\}$ d'après la bijection σ et sommation par paquets.

• $I \times J = \bigsqcup_{i \in I} (\{i\} \times J) = \bigsqcup_{j \in J} (I \times \{j\})$ et sommation par paquets.

• Par FUBINI, $\sum_{(i,j) \in I \times J} x_i y_j = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} x_i y_j \right) = \sum_{i \in I} \left(x_i \left(\sum_{j \in J} y_j \right) \right) = \left(\sum_{i \in I} x_i \right) \times \left(\sum_{j \in J} y_j \right)$.

4.1.3 : Familles complexes
THÉORÈME SUR LES PROPRIÉTÉS DES FAMILLES SOMMABLES 4.19 :

Soit I , I' et J trois ensembles, $\lambda \in \mathbb{K}$, $(x_i)_{i \in I}$, $(y_i)_{i \in I}$, $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$, $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ des familles sommables d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit aussi $\sigma : I' \rightarrow I$ une bijection et deux familles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sommables d'éléments de $\mathbb{K}$. On a alors les propriétés suivantes :

- (i) **Restriction** : si I' est une partie de I , alors $(x_i)_{i \in I'}$ est sommable.
- (ii) **Linéarité** : la famille $(\lambda x_i + y_i)_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$.
- (iii) **Croissance** : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $\forall i \in I, x_i \leq y_i$, alors $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.
- (iv) **Inégalité triangulaire** : $\left| \sum_{i \in I} x_i \right| \leq \sum_{i \in I} |x_i|$.
- (v) **Sommation par paquets** : pour tout recouvrement disjoint $(I_k)_{k \in K}$ de I , c'est-à-dire que $I = \bigsqcup_{k \in K} I_k$, la famille $\left(\sum_{j \in I_k} x_j \right)_{k \in K}$ est sommable et $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in I_k} x_j \right)$.
- (vi) **Changement d'indice** : $(x_{\sigma(i')})_{i' \in I'}$ est sommable et $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i' \in I'} x_{\sigma(i')}$.
- (vii) **Théorème de FUBINI** : les familles $\left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right)_{i \in I}$ et $\left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right)_{i \in I}$ sont sommables et on a la relation de FUBINI $\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)$.
- (viii) **Familles produit** : la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable et $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right)$.
- (ix) **Approximation** : $\forall \varepsilon > 0, \exists J \in \mathcal{P}_f(I), \left| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} x_j \right| \leq \varepsilon$.
- (x) **Produit de CAUCHY** : en posant $p_n = \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ i+j=n}} u_i v_j = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Alors $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi sommable et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$.

DÉMONSTRATION : (i) $\sum_{i \in I'} |x_i| \leq \sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$ d'après la partie restriction de la proposition 15.

(ii) Déjà, $\sum_{i \in I} |\lambda x_i + y_i| \leq \sum_{i \in I} (|\lambda| |x_i| + |y_i|) = |\lambda| \sum_{i \in I} |x_i| + \sum_{i \in I} |y_i|$ par inégalité triangulaire et les parties croissance et linéarité de la proposition 15 dans le cas positif. Ceci assure déjà que la famille $(\lambda x_i + y_i)_{i \in I}$ est sommable.

• On prend ici $\lambda = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on s'intéresse à la "somme". Pour tous réels x et y , en traitant les 6 cas (non exclusifs mais exhaustifs), on a $(x + y)^+ + x^- + y^- = (x + y)^- + x^+ + y^+$:

- si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, cela se réduit à $(x + y) + 0 + 0 = 0 + x + y$.
- si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, cela se réduit à $0 + (-x) + (-y) = -(x + y) + 0 + 0$.
- si $x \geq 0$ et $y \leq 0$ et $x + y \geq 0$, cela se réduit à $(x + y) + 0 + (-y) = 0 + x + 0$.
- si $x \geq 0$ et $y \leq 0$ et $x + y \leq 0$, cela se réduit à $0 + 0 + (-y) = -(x + y) + x + 0$.
- si $x \leq 0$ et $y \geq 0$ et $x + y \geq 0$, cela se réduit à $(x + y) + (-x) + 0 = 0 + 0 + y$.
- si $x \leq 0$ et $y \geq 0$ et $x + y \leq 0$, cela se réduit à $0 + (-x) + 0 = -(x + y) + 0 + y$.

Ainsi, par linéarité dans le cas positif, $\sum_{i \in I} (x_i + y_i)^+ + \sum_{i \in I} x_i^- + \sum_{i \in I} y_i^- = \sum_{i \in I} (x_i + y_i)^- + \sum_{i \in I} x_i^+ + \sum_{i \in I} y_i^+$ ce qui donne

$$\text{bien } \sum_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum_{i \in I} (x_i + y_i)^+ - \sum_{i \in I} (x_i + y_i)^- = \sum_{i \in I} x_i^+ + \sum_{i \in I} y_i^+ - \left(\sum_{i \in I} x_i^- + \sum_{i \in I} y_i^- \right) = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i.$$

• On prend ici $\lambda = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on s'intéresse à la partie "somme". $x_i = \text{Re}(x_i) + i \text{Im}(x_i)$ et $y_i = \text{Re}(y_i) + i \text{Im}(y_i)$. Comme on sait que $\text{Re}(x_i + y_i) = \text{Re}(x_i) + \text{Re}(y_i)$ et $\text{Im}(x_i + y_i) = \text{Im}(x_i) + \text{Im}(y_i)$, par définition de la somme, $\sum_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum_{i \in I} (\text{Re}(x_i) + \text{Re}(y_i)) + i \sum_{i \in I} (\text{Im}(x_i) + \text{Im}(y_i))$ ce qui donne, par linéarité dans le cas réel, la linéarité

$$\text{dans le cas complexe, } \sum_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum_{i \in I} \text{Re}(x_i) + \sum_{i \in I} \text{Re}(y_i) + i \left(\sum_{i \in I} \text{Im}(x_i) + \sum_{i \in I} \text{Im}(y_i) \right) = \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i.$$

• On prend ici $y_i = 0$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on s'intéresse à la partie "multiplication par un scalaire".

- si $\lambda \geq 0$, $(\lambda x_i)^+ = \lambda x_i^+$ et $(\lambda x_i)^- = \lambda x_i^-$ donc $\sum_{i \in I} (\lambda x_i) = \sum_{i \in I} (\lambda x_i)^+ - \sum_{i \in I} (\lambda x_i)^- = \lambda \sum_{i \in I} x_i^+ - \lambda \sum_{i \in I} x_i^-$ par

$$\text{linéarité dans le cas positif donc } \sum_{i \in I} (\lambda x_i) = \lambda \left(\sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^- \right) = \lambda \sum_{i \in I} x_i.$$

- si $\lambda \leq 0$, $(\lambda x_i)^+ = -\lambda x_i^-$ et $(\lambda x_i)^- = -\lambda x_i^+$, $\sum_{i \in I} (\lambda x_i) = \sum_{i \in I} (\lambda x_i)^+ - \sum_{i \in I} (\lambda x_i)^- = (-\lambda) \sum_{i \in I} x_i^- - (-\lambda) \sum_{i \in I} x_i^+$

$$\text{par linéarité dans le cas positif donc } \sum_{i \in I} (\lambda x_i) = (-\lambda) \left(\sum_{i \in I} x_i^- - \sum_{i \in I} x_i^+ \right) = (-\lambda) \left(- \sum_{i \in I} x_i \right) = \lambda \sum_{i \in I} x_i.$$

• On prend ici $y_i = 0$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on s'intéresse à la partie "multiplication par un scalaire". On écrit $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\text{Re}(\lambda x_i) = \lambda_1 \text{Re}(x_i) - \lambda_2 \text{Im}(x_i)$ et $\text{Im}(\lambda x_i) = \lambda_1 \text{Im}(x_i) + \lambda_2 \text{Re}(x_i)$ donc, au niveau de la somme, cela donne $\sum_{i \in I} (\lambda x_i) = \sum_{i \in I} \text{Re}(\lambda x_i) + i \sum_{i \in I} \text{Im}(\lambda x_i) = \sum_{i \in I} (\lambda_1 \text{Re}(x_i) - \lambda_2 \text{Im}(x_i)) + i \left(\sum_{i \in I} (\lambda_1 \text{Im}(x_i) + \lambda_2 \text{Re}(x_i)) \right)$ donc $\sum_{i \in I} (\lambda x_i) = \lambda_1 \sum_{i \in I} \text{Re}(x_i) - \lambda_2 \sum_{i \in I} \text{Im}(x_i) + i\lambda_1 \sum_{i \in I} \text{Im}(x_i) + i\lambda_2 \sum_{i \in I} \text{Re}(x_i)$ par la linéarité dans le cas réel, ce qui

$$\text{donne bien la relation } \sum_{i \in I} (\lambda x_i) = (\lambda_1 + i\lambda_2) \left(\sum_{i \in I} \text{Re}(x_i) + i \sum_{i \in I} \text{Im}(x_i) \right) = \lambda \sum_{i \in I} x_i.$$

(iii) $\sum_{i \in I} y_i = \sum_{i \in I} ((y_i - x_i) + x_i) = \sum_{i \in I} (y_i - x_i) + \sum_{i \in I} x_i \geq \sum_{i \in I} x_i$ par linéarité et car $\sum_{i \in I} (y_i - x_i) \in \mathbb{R}_+^*$ par sommabilité.

(iv) Dans le cas réel, $\left| \sum_{i \in I} x_i \right| = \left| \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^- \right| \leq \sum_{i \in I} x_i^+ + \sum_{i \in I} x_i^- = \sum_{i \in I} |x_i|$ car $\sum_{i \in I} x_i^+ \geq 0$ et $\sum_{i \in I} x_i^- \geq 0$.

Dans le cas complexe, on pose $\lambda = r e^{i\theta} = \sum_{i \in I} x_i$ avec $r = |\lambda| \geq 0$ et $y_i = e^{-i\theta} x_i$ de sorte que, par linéarité, on a

$$\sum_{i \in I} y_i = e^{-i\theta} \sum_{i \in I} x_i = r. \text{ Ainsi, } \sum_{i \in I} \text{Re}(y_i) = r \text{ en identifiant la partie réelle, ce qui donne, par inégalité triangulaire dans}$$

$$\text{le cas réel, } \left| \sum_{i \in I} x_i \right| = r = \sum_{i \in I} \text{Re}(y_i) \leq \sum_{i \in I} |\text{Re}(y_i)| \leq \sum_{i \in I} |y_i| = \sum_{i \in I} |x_i| \text{ car } |\text{Re}(y_i)| \leq |y_i|.$$

(v) Pour $k \in K$, comme $I_k \subset I$, la famille $(x_i)_{i \in I_k}$ est sommable donc, par croissance, les familles $(x_i^+)_{i \in I_k}$ et $(x_i^-)_{i \in I_k}$ aussi. La famille $\left(\sum_{i \in I_k} x_i \right)_{k \in K}$ est aussi sommable car $\sum_{k \in K} \left| \sum_{i \in I_k} x_i \right| \leq \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} |x_i|$ par inégalité triangulaire et croissance

donc $\sum_{k \in K} \left| \sum_{i \in I_k} x_i \right| \leq \sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$ par sommation par paquets dans le cas réel positif.

Dans le cas réel, par croissance, on a aussi $\left(\sum_{i \in I_k} x_i^+ \right)_{k \in K}$ et $\left(\sum_{i \in I_k} x_i^- \right)_{k \in K}$ sommables. Ainsi, d'après la sommation par paquets dans la cas des réels positifs, et par linéarité puisque $\forall k \in K, \forall j \in I_k, x_j = x_j^+ - x_j^-$, on parvient à la relation

attendue, $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^- = \sum_{k \in K} \sum_{j \in I_k} x_j^+ - \sum_{k \in K} \sum_{j \in I_k} x_j^- = \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in I_k} x_j^+ - \sum_{j \in I_k} x_j^- \right) = \sum_{k \in K} \sum_{j \in I_k} x_j$.

Dans le cas complexe, $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(x_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(x_i) = \sum_{k \in K} \sum_{j \in I_k} \operatorname{Re}(x_j) + i \sum_{k \in K} \sum_{j \in I_k} \operatorname{Im}(x_j)$ par définition et d'après la sommation par paquets dans le cas réel. Ainsi, par linéarité complexe puis réelle, on obtient souhaitée, la sommation par paquets dans le cas complexe, $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \left(\sum_{j \in I_k} \operatorname{Re}(x_j) + i \sum_{j \in I_k} \operatorname{Im}(x_j) \right) = \sum_{k \in K} \sum_{j \in I_k} (\operatorname{Re}(x_j) + i \operatorname{Im}(x_j)) = \sum_{k \in K} \sum_{j \in I_k} x_j$.

(vi) $I = \sigma(I') = \bigsqcup_{i' \in I'} \{\sigma(i')\}$ d'après la bijection σ et sommation par paquets précédente.

(vii) $I \times J = \bigsqcup_{i \in I} (\{i\} \times J) = \bigsqcup_{j \in J} (I \times \{j\})$ et sommation par paquets.

(viii) Par FUBINI, $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_i b_j \right) = \sum_{i \in I} \left(a_i \left(\sum_{j \in J} b_j \right) \right) = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \times \left(\sum_{j \in J} b_j \right)$.

(ix) Dans le cas réel, par caractérisation epsilonlesque de la borne supérieure, comme $(x_i^+)_{i \in I}$ et $(x_i^-)_{i \in I}$ sont sommables, il existe deux parties finies J^+ et J^- de I telles que $\sum_{i \in I} x_i^+ - \varepsilon \leq \sum_{i \in J^+} x_i^+ \leq \sum_{i \in I} x_i^+$ et $\sum_{i \in I} x_i^- - \varepsilon \leq \sum_{i \in J^-} x_i^- \leq \sum_{i \in I} x_i^-$.

En posant $J = J^+ \cup J^-$, J est encore une partie finie de I (qui contient J^+ et J^-) et, par croissance de la somme, on a les deux encadrements $\sum_{i \in I} x_i^+ - \varepsilon \leq \sum_{i \in J} x_i^+ \leq \sum_{i \in I} x_i^+$ et $\sum_{i \in I} x_i^- - \varepsilon \leq \sum_{i \in J} x_i^- \leq \sum_{i \in I} x_i^-$. En soustrayant ces deux inégalités

(attention), on obtient $\sum_{i \in I} x_i - \varepsilon \leq \sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i + \varepsilon$ ce qui assure la majoration $\left| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} x_j \right| \leq \varepsilon$. Même si ce n'est pas demandé, en prévision de l'approximation dans le cas complexe, on constate que, par construction de cette partie J , dès que $J \subset J' \subset I$ avec J' finie, on a encore $\left| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J'} x_j \right| \leq \varepsilon$. Attention, ce n'est pas vrai pour toute partie J qui vérifie l'approximation, c'est vrai pour celle qu'on a construit !

Dans le cas complexe, comme $(\operatorname{Re}(x_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(x_i))_{i \in I}$ sont sommables, il existe, d'après le cas réel, deux parties finies J_1 et J_2 de I telles que $\left| \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(x_i) - \sum_{j \in J_1} \operatorname{Re}(x_j) \right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ et $\left| \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(x_i) - \sum_{j \in J_2} \operatorname{Im}(x_j) \right| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. En posant la partie

$J = J_1 \cup J_2$, J est encore une partie finie de I (qui contient J_1 et J_2) et, par croissance de la somme, on a les deux encadrements $\sum_{i \in I} x_i^+ - \varepsilon \leq \sum_{i \in J} x_i^+ \leq \sum_{i \in I} x_i^+$ et $\sum_{i \in I} x_i^- - \varepsilon \leq \sum_{i \in J} x_i^- \leq \sum_{i \in I} x_i^-$. En soustrayant ces deux inégalités (attention), on obtient

$\sum_{i \in I} x_i - \varepsilon \leq \sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i + \varepsilon$ ce qui assure la majoration $\left| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} x_j \right| \leq \varepsilon$.

(x) Il suffit de décomposer $\mathbb{N}^2$ en réunion dénombrable de "diagonales finies" : $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \{(i, n-i) \mid i \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$ et

d'utiliser la sommation par paquets.

PROPOSITION DE COMPARAISON 4.18 :

Soit I un ensemble, $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(y_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. Si on suppose que $\forall i \in I, |x_i| \leq y_i$ et que $(y_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $(x_i)_{i \in I}$ l'est aussi.

DÉMONSTRATION : Il suffit d'écrire que $\sum_{i \in I} |x_i| \leq \sum_{i \in I} y_i < +\infty$.