

# PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 05

PSI 1 2025-2026

du lundi 13/10 au vendredi 17/10

## 1 Intégrales sur un segment :

- révisions de sup sur l'intégrale sur un segment des fonctions continues, égalité et inégalités classiques ;
- relations entre intégrales et primitives, théorème fondamental de l'intégration ;
- intégration par parties, TAYLOR reste intégral, changement de variable, sommes de RIEMANN ;
- définition des fonctions continues par morceaux sur un segment puis sur un intervalle ;
- généralisation de l'intégrale aux fonctions continues par morceaux à valeurs complexes sur un segment ;

## 2 Comparaison locale des fonctions :

- notations de LANDAU, relations entre ces notations ;
- développements limités, intégration, dérivation sous condition, somme, produit, composée, inverse ;
- théorème de TAYLOR-YOUNG, développements limités classiques ;

## 3 Intégrales convergentes et divergentes : $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ avec $I$ intervalle et $f$ continue par morceaux sur $I$

- définition de la convergence de  $\int_{[a;b[} f$  (resp.  $\int_{]a;b]} f$ ) par l'existence d'une limite finie de  $\int_a^x f$  (resp.  $\int_x^b f$ ) quand  $x$  tend vers  $b$  (resp. vers  $a$ ) : définition de la valeur de l'intégrale dans ce cas ;
- définition de la convergence de  $\int_{]a;b[} f$  par l'existence de  $\int_{]a;c]} f$  et de  $\int_{[c;b[} f$  pour un certain  $c \in ]a;b[$  : indépendance de cette définition par rapport à  $c$  et définition de la valeur de l'intégrale dans ce cas ;
- cas particulier des fonctions positives en bornant une "primitive" ;
- convergence des intégrales de RIEMANN sur  $]0;1[$  ou  $[1;+\infty[$ , c'est-à-dire de  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  selon les valeurs de  $\alpha$ , convergence de  $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$  selon les valeurs de  $\lambda$  ;
- Si  $f \in C^0(]a;b[, \mathbb{K})$  et  $\varphi : ]\alpha;\beta[ \rightarrow ]a;b[$  bijection strictement croissante de classe  $C^1$  alors  $\int_a^b f(x)dx$  et  $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt$  sont de même nature et  $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt$  ; calcul en pratique ;
- Si  $f, g : ]a;b[ \rightarrow \mathbb{K}$  de classe  $C^1$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)g(x)$  existent et sont finies,  $\int_a^b f'(x)g(x)dx$  et  $\int_a^b f(x)g'(x)dx$  sont de même nature et  $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$  ; pratique ;
- techniques pour montrer qu'une intégrale converge ou diverge ;
- techniques pour calculer les intégrales généralisées ;

## QUESTIONS DE COURS :

- 1 définir ce qu'est une fonction continue par morceaux sur un intervalle (déf. 3.3 et 3.4)
- 2 définir la convergence de  $\int_a^b f(t)dt$  si  $f : ]a;b[ \rightarrow \mathbb{K}$  est continue par morceaux (déf. 3.10)
- 3 énoncer l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ sur les intégrales (prop. 3.2, th. 3.3)
- 4 énoncer la formule de TAYLOR reste intégral (th. 3.10)
- 5 énoncer le théorème de changement de variable sur des intervalles ouverts (th. 3.26)
- 6 énoncer le théorème d'intégration par parties sur des intervalles ouverts (th. 3.27)
- 7 prouver que pour  $f$  continue sur  $I$ ,  $u, v : J \rightarrow I$  dérivables,  $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$  est dérivable (prop. 3.7)
- 8 prouver que si  $f$  est continue sur  $[a;b[$  et si  $\int_a^b f$  converge, alors  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_x^b f(t)dt = 0$  (prop. 3.19)
- 9 prouver que si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $I$  et si  $\int_I f$  CV et  $\int_I g$  DV, alors  $\int_I (f+g)$  DV (th. 3.25)

**Prévision pour la prochaine semaine :** intégrales et début des probabilités