

TD 06 : INTÉGRATION

PSI 1 2025-2026

vendredi 10 octobre 2025

6.1 a. Bien sûr que non, on a vu dans le cours un contre-exemple d'une fonction continue par morceaux, positive, intégrable et qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

b. Avec $\sin(x-t) = \sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t)$ et la linéarité de l'intégrale, comme les fonctions sont toutes continues sur le segment $[0; x]$, $\forall x \geq 0$, $g(x) = f(x) + \sin(x) \int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt - \cos(x) \int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt$. Comme $\cos \circ f$ et $\sin \circ f$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration, la dérivée de fonction $x \mapsto \int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt$ est $x \mapsto \cos(x)a(x)f(x)$, et $\left(\int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt\right)' = \sin(x)a(x)f(x)$. Par opérations et simplifications, $g'(x) = f'(x) + \cos(x) \int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt + \sin(x) \int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt$. Puis, $g''(x) = f''(x) - \sin(x) \int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt + \cos(x) \int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt + \cos^2(x)a(x)f(x) + \sin^2(x)a(x)f(x)$ donc $g''(x) = f''(x) + f(x) - g(x) + a(x)f(x) = -g(x)$ donc $g'' + g = 0$ (E) sur $\mathbb{R}_+$.

c. Les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}_+$ de cette équation différentielle (E) sont les fonctions g telles que $\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \geq 0$, $g(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$ donc $|g| \leq |A| + |B| = C$ par exemple et g est bornée. Comme $f(x) = g(x) - \int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t)dt$, en passant aux valeurs absolues avec l'inégalité triangulaire, on obtient, $\forall x \geq 0$, $|f(x)| \leq |g(x)| + \int_0^x |\sin(x-t)||a(t)||f(t)|dt \leq C + \int_0^x |a(t)f(t)|dt$ car $|\sin| \leq 1$.

d. Posons $h : x \mapsto \int_0^x |a(t)f(t)|dt$, comme la fonction $|a||f|$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $h'(x) = |a(x)||f(x)| \leq C|a(x)| + |a(x)|h(x)$ d'après la question c.. En notant $A(x) = \int_0^x |a(t)|dt$, on a $(e^{-A(x)}h(x))' \leq C|a(x)|e^{-A(x)} = C(-e^{-A(x)})'$. On intègre cette inégalité entre 0 et x pour avoir $e^{-A(x)}h(x) \leq C(1 - e^{-A(x)}) \leq C$. Alors, on peut majorer $\forall x \geq 0$, $h(x) \leq Ce^{A(x)}$ et comme a est intégrable, A est croissante (car $A' = |a| \geq 0$) et possède une limite finie $C \exp\left(\int_0^{+\infty} |a(t)|dt\right)$ en $+\infty$ donc A est bornée sur $\mathbb{R}_+$, d'où h est bornée sur $\mathbb{R}_+$ car $|h| \leq Ce^A$. Enfin, f est aussi bornée sur $\mathbb{R}_+$ car $|f| \leq C + h$.

Toutes les solutions sur $\mathbb{R}_+$ de (E) sont des fonctions bornées sur $\mathbb{R}_+$ si a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

6.2 a. G est bien définie car $t \mapsto |x-t|g(t)$ est continue sur le segment $[0; 1]$ pour tout $x \in [0; 1]$. Pour justifier la régularité de G , on écrit $G(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x-t|g(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)g(t)dt + \frac{1}{2} \int_x^1 (t-x)g(t)dt$ par CHASLES car $|x-t| = x-t$ si $t \in [0; x]$ et $|x-t| = t-x$ si $t \in [x; 1]$. On en déduit par linéarité de l'intégrale que $G(x) = \frac{x}{2} \int_0^x g(t)dt - \frac{1}{2} \int_0^x tg(t)dt + \frac{1}{2} \int_x^1 tg(t)dt - \frac{x}{2} \int_x^1 g(t)dt$. Comme les fonctions $t \mapsto g(t)$ et $t \mapsto tg(t)$ sont continues sur $[0; 1]$, le théorème fondamental de l'intégration montre que G est de classe C^1 sur $[0; 1]$ avec $G'(x) = \frac{1}{2} \int_0^x g(t)dt + \frac{x}{2}g(x) - \frac{xg(x)}{2} - \frac{xg(x)}{2} - \frac{1}{2} \int_x^1 g(t)dt + \frac{x}{2}g(x) = \frac{1}{2} \int_0^x g(t)dt - \frac{1}{2} \int_x^1 g(t)dt$. Sous cette forme, G' est aussi de classe C^1 car g est continue, donc G est de classe C^2 , avec $G''(x) = \frac{g(x)}{2} + \frac{g(x)}{2} = g(x)$.

b. Si on pose $f(x) = G(x) + ax + b$, alors $f(0) = G(0) + b$ donc $f(0) = 0 \iff b = -G(0)$. De plus $f(1) = G(1) + a + b$ d'où $f(1) = 0 \iff a = -b - G(1) = G(0) - G(1)$. Par conséquent la fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = G(x) - (G(1) - G(0))x - G(0)$ vérifie bien $f(0) = f(1) = 0$ et $f'' = G'' = g$.

c. Si $h : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie aussi h de classe C^2 sur $[0; 1]$, $h'' = g$ et $h(0) = h(1) = 0$, alors $f'' - h'' = (f - h)'' = 0$ ce qui prouve, comme $[0; 1]$ est un intervalle, que $(f - h)'$ est constante puis que $f - h$ est affine. Or $(f - h)(0) = 0 - 0 = 0$ et $(f - h)(1) = 0 - 0 = 0$. Ainsi, la fonction affine $f - h$ s'annulant en deux points distincts, on a $f - h = 0$ donc $h = f$.

Conclusion : il existe une unique $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f'' = g$, $f(0) = f(1) = 0$ et on a $f(x) = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 |x - t| g(t) dt - \left(\int_0^1 (1 - t) g(t) dt - \int_0^1 t g(t) dt \right) x - \int_0^1 t g(t) dt \right) = \int_0^1 \frac{|x - t| - x + 2tx - t}{2} g(t) dt$.

6.3 a. Par intégration par parties, comme f est de classe C^1 sur $[a; b]$ et que $\cos$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout entier $n \geq 1$, la relation $I_n = \left[-\frac{1}{n} \cos(nt) f(t) \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt$. Comme f' est continue sur le segment $[a; b]$, il existe $M \geq 0$ tel que $\forall t \in [a; b]$, $|f'(t)| \leq M$. Par inégalités triangulaires, on obtient $|I_n| \leq \frac{1}{n} (|f(a)| + |f(b)| + (b - a)M)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ (lemme de RIEMANN-LEBESGUE).

b. Tout d'abord, $g : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$ car $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$. En posant $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto 1 - \cos(t)$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0$ car $1 - \cos(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par $1 - \cos(t) = O(1)$. Les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ sont donc de même nature. Or $g : t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = \frac{1}{2}$ toujours car $1 - \cos(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$ et $|g(t)| \leq \frac{2}{t^2}$ ce qui garantit son intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ converge car elle converge absolument, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge aussi et on admet que $A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$ (DIRICHLET).

c. La fonction $f_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)^2}{n \sin(t)^2}$ est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f_n(0) = n$ car $\sin(nt) \underset{0}{\sim} nt$ et $\sin(t) \underset{0}{\sim} t$ donc $f_n(t) \underset{0}{\sim} \frac{n^2 t^2}{t^2} = n^2$. Ainsi, J_n est bien définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Or on sait que $\cotan'(t) = -\frac{1}{\sin^2(t)}$ et $\cotan(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$ donc, en posant $u = -\cotan$ et $v : t \mapsto \sin(nt)^2$, les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ et comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} \cotan(t) \sin(nt)^2 = 0$, par intégration par parties, on a $J_n = \left[-\frac{\cotan(t) \sin(nt)^2}{n} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2 \sin(nt) \cos(nt) \cotan(t) dt = \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) \cotan(t) dt$. L'équivalent de $\cotan$ en 0 nous incite à écrire $J_n = \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) \left(\cotan(t) - \frac{1}{t} \right) dt + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt$ (les deux intégrales convergent car $\frac{\sin(2nt)}{t} \underset{0}{\sim} 2n$). Comme on se rappelle que $\tan(t) \underset{0}{=} t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$, on a $\cotan(t) - \frac{1}{t} \underset{0}{=} \frac{1}{t} \frac{1}{1 + \frac{t^2}{3} + o(t^2)} - \frac{1}{t} \underset{0}{=} \frac{1}{t} \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{3} + o(t^2)} - 1 \right) \underset{0}{=} \frac{1}{t} \left(1 - \frac{t^2}{3} - 1 + o(t^2) \right) \underset{0}{=} -\frac{t}{3} + o(t)$. Ainsi, la fonction $h : t \mapsto \cotan(t) - \frac{1}{t}$ se prolonge par continuité (avec $h(0) = 0$) en une fonction dérivable sur le segment $[0; \frac{\pi}{2}]$ avec $h'(0) = -\frac{1}{3}$. Comme $h'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sin^2(t)}$, le calcul analogue $\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sin^2(t)} \underset{0}{=} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)} \underset{0}{=} \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{t^2}{3} + o(t^2)} \right) \underset{0}{=} \frac{1}{t^2} \left(1 - (1 + \frac{t^2}{3}) + o(t^2) \right) \underset{0}{=} -\frac{1}{3} + o(1)$ nous

permet de conclure que h est de classe C^1 sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ car $\lim_{t \rightarrow 0^+} h'(t) = -\frac{1}{3} = h'(0)$. La première question nous apprend alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \left(\cotan(t) - \frac{1}{t}\right) \sin(2nt) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} h(t) \sin(2nt) dt = 0$. De plus, par le changement de variable $t = \varphi(u) = \frac{u}{2n}$, comme φ réalise une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0; n\pi]$ dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a la relation $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt = \int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{u} du$ et cette quantité tend vers A quand n tend vers $+\infty$ d'après la question **b.**. Au final, en sommant, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$. En fait, la suite $(J_n)_{n \geq 1}$ est constante et elle vaut $\frac{\pi}{2}$, mais c'est une autre histoire !

6.4 On a $\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{x+x+1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$. On peut bien sûr aussi appliquer les techniques usuelles ou procéder par identification.

La fonction $f : t \mapsto t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0; 1]$ (c'est-à-dire continue par morceaux sur tout segment inclus dans $]0; 1]$) car ses seuls points de discontinuité sont les réels $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et tout segment inclus dans $]0; 1]$ ne contient qu'un nombre fini de tels points.

De plus, f est positive et majorée par 1 car $\forall t \in]0; 1]$, $0 \leq \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leq \frac{1}{t} < \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor + 1$ donc $0 \leq t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leq 1$, ainsi, par comparaison, f est intégrable sur $]0; 1]$. On en déduit que $\int_0^1 f(t) dt$ converge d'où l'existence de I .

Or $I = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$. D'après CHASLES, en coupant aux points de discontinuité de f , on a $\int_{1/n}^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt = \sum_{k=1}^{n-1} k \int_{1/(k+1)}^{1/k} t dt$ car $\forall t \in \left] \frac{1}{k+1}; \frac{1}{k} \right]$, $\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor = k$.

Or, $\int_{1/(k+1)}^{1/k} t dt = \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{2k^2(k+1)^2}$. Ainsi, $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{2k(k+1)^2}$. La série $\sum_{k \geq 1} \frac{2k+1}{2k(k+1)^2}$ converge car $\frac{2k+1}{2k(k+1)^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{k^2}$ (on le savait déjà car $\int_0^1 f(t) dt$ converge) donc $I = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1}{2k(k+1)^2}$.

Mais $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k(k+1)^2}$ vérifie $S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2}$ et, avec la classique valeur de $\zeta(2)$, on a $I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) = \frac{\pi^2}{12} \sim 0,82$.

6.5 Comme la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue (et même de classe C^∞) sur $D =]0; 1[\cup]1; +\infty[$, la fonction f

est bien définie sur D car pour tout réel x appartenant à D , le segment $\widetilde{[x; x^2]}$ est inclus dans D .

Soit G une primitive de g sur D , alors $f(x) = [G(t)]_x^{x^2} = G(x^2) - G(x)$ donc f est C^∞ sur D car G l'est.

Si $x \in]0; 1[$, on a $0 < x^2 < x < 1$, g est décroissante sur $[x^2; x]$ et $u \mapsto \frac{1}{u}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc on

peut encadrer $\int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(x^2)} dt = \frac{x-x^2}{2 \ln(x)} \leq \int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln(t)} = -f(x) \leq \frac{x-x^2}{\ln(x)} = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)} dt$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-x^2}{\ln(x)} = 0$ donc, par encadrement, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Comme $g(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{t-1}$, on est conduit à transformer $f(x)$ en $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt + \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right) dt$. Or $\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt = \ln \left(\frac{x^2-1}{x-1} \right) = \ln(x+1)$ tend vers $\ln(2)$ quand x tend vers 1. En posant $h : t \mapsto \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}$,

on a $h(1+u) = \frac{1}{u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)} - \frac{1}{u} \underset{0}{=} \frac{1}{u} \left(\frac{1}{1 - \frac{u}{2} + o(u)} - 1 \right) \underset{0}{=} \frac{1}{u} \left(1 + \frac{u}{2} + o(u) - 1 \right) \underset{0}{=} \frac{1}{2} + o(1)$ donc h se prolonge par continuité en 1 en posant $h(1) = \frac{1}{2}$. Ceci signifie que h étant maintenant continue sur le segment

$\left[\frac{1}{4}; 4\right]$ (par exemple), y est bornée (par M). Pour $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$, on a donc $\left|\int_x^{x^2} h(t)dt\right| \leq M|x^2 - x| \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} h(t)dt = 0$ puis, par somme, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln(2)$. Par conséquent, la fonction f prolongée par $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(2)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Plus simplement, en écrivant $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{t dt}{t \ln(t)}$, on pouvait aussi encadrer par exemple pour $x \in]0; 1[$, $x^2 \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} \leq f(x) \leq x \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}$ car on a l'inégalité $\forall t \in [x^2; x]$, $\frac{x^2}{t} \leq 1 \leq \frac{x}{t}$, $\ln(t) < 0$ et $x > x^2$. Si $x > 1$, comme $\forall t \in [x; x^2]$, $\frac{x^2}{t} \geq 1 \geq \frac{x}{t}$, l'inégalité devient $x^2 \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} \geq f(x) \geq x \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}$. Par encadrement, on peut prolonger f par continuité en 1 (à gauche et à droite) avec $f(1) = \ln(2)$ car $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} = [\ln |\ln(t)|]_x^{x^2} = \ln |\ln(x^2)| - \ln |\ln x| = \ln(2)$.

D'après ce qui précède, f est C^1 sur D avec $f'(x) = 2xg'(x^2) - g'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ donc, classiquement, $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1$. Par le théorème de prolongement C^1 , f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(1) = 1$. De même, comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(0) = 0$.

Puisque $f' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x > 1$, $f(x) \geq \frac{x^2 - x}{\ln(x^2)}$ donc, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. La fonction f' est donc continue sur $[0; 1]$ et vérifie $f'(0) = 0$, $f'(1) = 1$ et $\forall x \in]0; 1[$, $f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$. Ainsi, f est une primitive de la fonction continue $g : x \rightarrow \frac{x-1}{\ln(x)}$ sur $[0; 1]$ telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Donc $\int_0^1 g = f(1) - f(0) = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx = \ln(2)$.

6.6 a. $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ est l'aire d'un quart de cercle de rayon 1 donc $I_0 = \frac{\pi}{4}$. Ou alors on pose le changement de variable $x = \sin(t)$ d'où $I_0 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{2t+\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$ ($\sin$ est C^1 de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[0; 1]$). Plus simplement, $I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Pour $x \in]0; 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 < x^{n+1}\sqrt{1-x^2} < x^n\sqrt{1-x^2}$ qu'on intègre sur $[0; 1]$ pour avoir $0 < I_{n+1} < I_n$ (l'inégalité stricte vient du fait que les deux fonctions ne sont pas constamment égales).

Ainsi $(I_n)_{n \geq 0}$ est strictement positive et strictement décroissante.

b. Si $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $u : x \mapsto -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$ et $v : x \mapsto x^n$ sont de classe C^1 sur $[0; 1]$ donc, par intégration par parties, puisque $u'(x) = x\sqrt{1-x^2}$ et $v'(x) = nx^{n-1}$, on a la relation :

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^n(x\sqrt{1-x^2})dx = \left[-\frac{x^n}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 + \frac{n}{3} \int_0^1 x^{n-1}(1-x^2)^{3/2}dx = \frac{n}{3} \int_0^1 x^{n-1}(1-x^2)^{3/2}dx.$$

En écrivant $(1-x^2)^{3/2} = (1-x^2)\sqrt{1-x^2}$ et par linéarité : $I_{n+1} = \frac{n}{3}I_{n-1} - \frac{n}{3}I_{n+1}$ donc $I_{n+1} = \frac{n}{n+3}I_{n-1}$.

c. On en déduit donc, d'après **a.**, que $0 < I_{n+1} = \frac{n}{n+3}I_{n-1} < I_n < I_{n-1}$ donc $\frac{n}{n+3} < \frac{I_n}{I_{n-1}} < 1$. Ainsi, par encadrement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$ donc $I_n \sim I_{n-1}$.

d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3)I_{n+1}I_n = (n+1)(n+2)nI_{n-1}I_n$ d'après **b.** donc $u_{n+1} = u_n$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante. Comme $u_1 = 6I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$, on a donc $\forall n \geq 1$, $(n+1)(n+2)(n+3)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.

D'après **c.**, $I_n^2 \sim I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n(n+1)(n+2)} \sim \frac{\pi}{2n^3}$. En passant à la racine, comme $I_n > 0$, $I_n \sim \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

6.7 a. La fonction $g : t \mapsto tf(t)$ est continue sur le segment $[a; b]$ ce qui justifie l'existence de l'intégrale $\int_a^b tf(t)dt$ dans laquelle on effectue le changement de variable $t = \varphi(u) = a + b - u$ avec φ qui est bien de classe C^1 sur le segment $[a; b]$ et qui vérifie $\varphi(a) = b$ et $\varphi(b) = a$. Ainsi, d'après le cours et d'après l'hypothèse faite sur f , on a $\int_a^b tf(t)dt = \int_b^a (a + b - u)f(a + b - u)(-1)du = \int_a^b (a + b - u)f(u)du$. Par linéarité de l'intégrale, on a donc $I = (a + b) \int_a^b f(t)dt - I$ ce qui prouve que $I = \int_a^b tf(t)dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t)dt$.

b. La fonction $g : t \mapsto \frac{t \sin(t)}{1 + \cos^2(t)} = tf(t)$ est continue sur le segment $[0; \pi]$ donc $J = \int_0^\pi \frac{t \sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt$ existe. On vérifie bien que $\forall t \in [0; \pi]$, $f(\pi - t) = \frac{\sin(\pi - t)}{1 + \cos^2(\pi - t)} = f(t)$ ce qui montre avec la question **a.** que $\int_0^\pi \frac{t \sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt = \frac{\pi}{2} [-\text{Arctan}(\cos(t))]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$.

6.8 a. La fonction $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{(x^2 - x^3)^{1/3}} = x^{-2/3}(1 - x)^{-1/3}$ est continue sur $]0; 1[$. De plus, $f(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1 - x)^{1/3}}$ et $f(x) \sim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^{2/3}}$ donc, d'après RIEMANN puisque $\frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$, f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$ et $]0; \frac{1}{2}]$ donc sur $]0; 1[$. Par conséquent, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x^3)^{1/3}}$ converge donc I existe.

Même si ce n'est pas demandé, on peut transformer l'intégrale I en posant $x = \varphi(u) = \frac{u^3}{1 + u^3}$ car la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow]0; 1[$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 dont la bijection réciproque est la fonction $\varphi^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}$. Par changement de variable, $I = \int_0^{+\infty} f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^3}$ (après calculs).

On effectue ensuite le changement de variable $u = \psi(v) = \frac{1}{v}$ dans $\int_1^{+\infty} \frac{du}{1 + u^3}$ car $\psi :]0; 1] \rightarrow [1; +\infty[$ est une bijection strictement décroissante de classe C^1 donc $\int_1^{+\infty} \frac{du}{1 + u^3} = -\int_1^0 \frac{v dv}{1 + v^3}$ (après calculs). On obtient donc, puisque v est une variable muette qu'on remplace avantageusement par u et que l'on factorise $1 + u^3 = (1 + u)(u^2 - u + 1)$, $I = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^3} = \int_0^1 \frac{du}{1 + u^3} + \int_0^1 \frac{u du}{1 + u^3} = \int_0^1 \frac{(1 + u) du}{1 + u^3} = \int_0^1 \frac{du}{u^2 - u + 1}$.

b. Avec cette expression de I , et en mettant $u^2 - u + 1$ sous la forme $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(1 + \left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$, on trouve $I = \int_0^1 \frac{du}{u^2 - u + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} du}{\left(1 + \left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\text{Arctan} \left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ par imparité de Arctan . Or $\text{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{6}$ donc $I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

6.9 Analyse : soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. On peut ré-écrire la troisième condition, puisque f' est continue de primitive f , sous la forme $\forall x \geq 0$, $\int_0^x f'(t)^2 dt \geq f(x + f(x)) - f(x) = \int_x^{x+f(x)} f'(t) dt$. Dans cette dernière intégrale, on effectue le changement de variable $t = x + f(u) = \varphi(u)$, licite puisque φ est strictement croissante, de classe C^1 et réalise une bijection de $[0; x]$ dans $[x; x + f(x)]$, et on obtient $\int_x^{x+f(x)} f'(t) dt = f(x + f(x)) - f(x) = \int_0^x f'(x + f(u))f'(u)du$. Par linéarité de l'intégrale, comme on a $\forall x \geq 0$, $\int_0^x f'(t)^2 dt \geq \int_0^x f'(x + f(u))f'(u)du$, il vient $\forall x \geq 0$, $\int_0^x f'(t)(f'(t) - f'(x + f(t))) dt \geq 0$. Or, par hypothèse, $\forall t \in [0; x]$, $f'(t) > 0$ et $f'(t) - f'(x + f(t)) \leq 0$ car $t \leq x < x + f(t)$ puisque f' est croissante.

La fonction $g : t \mapsto f'(t)(f'(t) - f'(x + f(t)))$ est continue et négative donc $\int_0^x f'(t)(f'(t) - f'(x + f(t))) dt \leq 0$ et on conclut que $\int_0^x f'(t)(f'(t) - f'(x + f(t))) dt = 0$. Un théorème du cours nous apprend, pour $x > 0$, que g étant continue et négative et d'intégrale nulle sur $[0; x]$ ne peut être que la fonction nulle. On a donc $\forall x > 0, \forall t \in [0; x], f'(t)(f'(t) - f'(x + f(t))) = 0$ donc $f'(t) - f'(x + f(t)) = 0$ car $f'(t) > 0$. Pour $x > 0$ fixé, on prend $t = 0$ et on obtient $f'(x) = f'(0)$ donc f' est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+$ puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) = 0$, il existe donc une constante $a \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \geq 0, f(x) = ax$. Mais f est supposée strictement croissante ce qui impose $a > 0$.

Synthèse : Soit $a > 0$ et $f : x \mapsto ax$, alors $f(0) = 0$, f' est croissante et $f' = a$ est strictement positive et, pour tout réel $x \geq 0, \int_0^x f'(t)^2 dt = \int_0^x a^2 dt = a^2 x = af(x) = a(x + f(x)) - ax = f(x + f(x)) - f(x)$.

En conclusion : par double implication, on a montré que les fonctions f vérifiant les conditions de l'énoncé sont exactement les fonctions linéaires $f : x \mapsto ax$ avec $a > 0$.

6.10 a. En prenant $x = y = 1$ dans la relation (1), on a $f(1) = 2f(1)$ donc $f(1) = 0$.

Pour $x > 0$, en prenant $y = \frac{1}{x}$ dans (1), on obtient $f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

b. Soit $x > 0$, les intégrales $\int_x^{2x} f(t) dt$ et $\int_1^2 f(t) dt$ sont bien définies car f est continue sur les segments $[x; 2x]$ et $[1; 2]$. Dans l'intégrale $\int_x^{2x} f(t) dt$, on pose $t = \varphi(u) = ux$ qui est de classe C^1 sur le segment $[1; 2]$ et on a donc par changement de variable (version sup.) $\int_x^{2x} f(t) dt = \int_1^2 f(ux)x du$. Or $f(ux) = f(u) + f(x)$ donc, par linéarité de l'intégrale, $\int_x^{2x} f(t) dt = x \int_1^2 f(u) du + xf(x)$. En divisant par $x > 0$, on a bien la relation attendue, $f(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} f(t) dt - \int_1^2 f(t) dt$.

c. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle y admet une primitive F et, par le théorème fondamental de l'intégration, il vient $f(x) = \frac{F(2x) - F(x)}{x} - (F(2) - F(1))$, ce qui prouve par opérations que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc dériver (1) par rapport à y , ce qui donne $\forall (x, y) \in]0; +\infty[^2, xf'(xy) = f'(y)$ (2). En prenant maintenant $y = 1$ dans (2), on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$. Ainsi, comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0, f(x) = f'(1) \ln(x) + C$ (3). En prenant $x = 1$ dans (3), comme $f(1) = 0$, on a $C = 0$ donc $\forall x > 0, f(x) = f'(1) \ln(x)$.

Les $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\forall (x, y) \in]0; +\infty[^2, f(xy) = f(x) + f(y)$ sont proportionnelles à $\ln$.

6.11 a. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x - \cos(x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 1 + \sin(x) \geq 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est croissante sur $\mathbb{R}$. Si elle n'était pas strictement croissante, il existerait deux réels $a < b$ tels que $h(a) = h(b)$ et on aurait $\forall x \in [a; b], h'(x) = 0$, ce qui est impossible car f' ne s'annule qu'en les réels de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ainsi, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $h(0) = -1$ et $h(1) = 1 - \cos(1) > 0$. Par le théorème de la bijection, il existe un unique réel $c \in]0; 1[$ tel que $h(c) = 0$ donc un unique point fixe c de $\cos$ sur $\mathbb{R}$. On trouve numériquement $c \sim 0,74$.

b. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$. En appliquant f , on obtient $f \circ f \circ f = f \circ \cos$ donc $\cos \circ f = f \circ \cos$ ce qui, en c , devient $f(c) = \cos(f(c))$. D'après l'unicité montrée à la question a., on en déduit que $f(c) = c$. Si on dérive $f \circ f = \cos$, on obtient $f' \times (f' \circ f) = -\sin$ ce qui, en c ,

devient $f'(c)^2 = -\sin(c) < 0$ car, comme $c \in]0; 1[\subset]0; \pi[$, on a $\sin(c) > 0$. NON !

Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existait aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

c. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$. Comme en b., on a $f(c) = c$.

Si f n'était pas injective sur $[0; 1]$, alors il existerait deux réels x et y tels que $0 \leq x < y \leq 1$ et $f(x) = f(y)$ et on aurait $f \circ f(x) = f \circ f(y) = \cos(x) = \cos(y)$ et la fonction $\cos$ ne serait pas injective sur $[0; 1]$. NON !

Ainsi, f est injective sur $[0; 1]$ donc, par continuité, elle y est strictement croissante ou strictement décroissante.

Comme f est continue en c , il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [c - \alpha; c + \alpha]$, $0 \leq f(x) \leq 1$ (il suffit de prendre $\varepsilon = \min(c, 1 - c) \sim 0,26 > 0$ dans $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$). On aurait donc, comme f est strictement monotone sur $[c - \alpha; c + \alpha]$ et que $f([c - \alpha; c + \alpha]) \subset [0; 1]$, intervalle sur lequel f est aussi strictement monotone (la même monotonie) et, par composée, la fonction $f \circ f = \cos$ serait strictement croissante sur $[c - \alpha; c + \alpha]$. NON !

Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existait aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$.

6.12 a. Pour $x \in D$, comme $x^2 - 2x \cos(\theta) + 1 = (x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}) = |x - e^{i\theta}|^2 > 0$

car $x \neq \pm 1$, la fonction $f_x : \theta \mapsto \ln(x^2 - 2x \cos(\theta) + 1)$ est continue sur le segment $[0; 2\pi]$ donc $I(x)$ existe.

b. Comme $x^2 - 2x \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1 = \left(x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(x - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, et que les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ sont les n racines n -ièmes de l'unité, comme les $e^{-\frac{2ik\pi}{n}}$, on peut factoriser $P_n = (x^n - 1)^2$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons la somme de RIEMANN $R_n(x) = \frac{2\pi - 0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_x\left(0 + \frac{k(2\pi - 0)}{n}\right)$ associée à la fonction f_x continue sur le segment $[0; 2\pi]$. D'après le cours, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = \int_0^{2\pi} f_x(\theta) d\theta$. Avec la question précédente,

$$R_n(x) = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left((x - e^{\frac{2ik\pi}{n}})(x - e^{-\frac{2ik\pi}{n}})\right) = \frac{2\pi}{n} \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} (x^2 - 2x \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1)\right) = \frac{4\pi}{n} \ln(|x^n - 1|).$$

• Si $|x| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4\pi}{n} \ln(|x^n - 1|) = 0 \times 0 = 0$. Ainsi, $I(x) = 0$.

• Si $|x| > 1$, on a $R_n(x) = \frac{4\pi}{n} \ln(|x|^n |1 - x^{-n}|) = 4\pi \ln(|x|) + \frac{4\pi}{n} \ln(|1 - x^{-n}|)$ donc $I(x) = 4\pi \ln(|x|)$.

6.13 Petit rappel ou pas : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$x^z = e^{(a+ib) \ln(x)} = e^{a \ln(x)} e^{ib \ln(x)} = x^a (\cos(b \ln(x)) + i \sin(b \ln(x))). \text{ Ainsi, } |x^z| = x^a = x^{\operatorname{Re}(z)} > 0.$$

a. Si $\operatorname{Re}(s) > 1$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|\frac{1}{k^s}\right| = \frac{1}{k^{\operatorname{Re}(s)}}$ et la série de RIEMANN $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\operatorname{Re}(s)}}$ converge d'après le cours donc la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$ converge absolument donc elle converge, ce qui assure que la suite des sommes

partielles $\left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s}\right)_{N \geq 1}$ converge. De plus, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{N^{1-s}}{1-s}\right| = \frac{N^{1-\operatorname{Re}(s)}}{|1-s|} = \frac{1}{|1-s| N^{\operatorname{Re}(s)-1}}$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{|1-s| N^{\operatorname{Re}(s)-1}} = 0$ car $\operatorname{Re}(s) > 1$. Par différence de suites convergentes, la suite $(S_N(s))_{N \in \mathbb{N}^*}$

converge, ce qui assure l'existence de $\zeta(s)$ (la fonction de RIEMANN définie dans le cours si $s > 1$ est réel).

b. Avec $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, la fonction $g_s : t \mapsto \frac{1}{[t]^s}$ est continue par morceaux sur le segment $[1; N+1]$ donc

$\int_1^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt$ existe. Avec la relation de CHASLES, et comme g_s est constante sur l'intervalle $[k; k+1[$ et vaut $\frac{1}{k^s}$ pour $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$, on a $\int_1^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \frac{1}{[t]^s} dt = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \frac{1}{k^s} dt = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s}$.

c. On suppose $a = \operatorname{Re}(s) > 0$ et on pose $b = \operatorname{Im}(s)$, la fonction $h_s : t \mapsto \frac{1}{t^s} - \frac{1}{[t]^s}$ est continue

par morceaux sur $[1; +\infty[$ puisqu'elle l'est sur tout segment inclus dans $[1; +\infty[$. Pour $t \in [1; +\infty[$, il vient $h_s(t) = \frac{1}{t^{a+ib}} - \frac{1}{[t]^{a+ib}} = \frac{[t]^{a+ib} - t^{a+ib}}{t^{a+ib} [t]^{a+ib}}$ donc $|h_s(t)| = \frac{|[t]^a e^{ib \ln([t])} - t^a e^{ib \ln(t)}|}{t^a [t]^a}$ qu'on

peut écrire $|h_s(t)| = \frac{|[t]^a e^{ib \ln(\frac{[t]}{t})} - t^a|}{t^a [t]^a} = \frac{|(\frac{[t]}{t})^a e^{ib \ln(\frac{[t]}{t})} - 1|}{[t]^a}$. De plus, par définition de la partie entière, pour un réel $t > 1$, on a $0 < t - 1 < [t] \leq t$ donc $[t] \underset{+\infty}{\sim} t$ d'où $[t]^a \underset{+\infty}{\sim} t^a$ et, en posant $\{t\} = t - [t] \in [0; 1[$ la partie fractionnaire de t , on a $\frac{[t]}{t} = \frac{t - \{t\}}{t} = 1 - y \underset{+\infty}{\sim} 1 + O\left(\frac{1}{t}\right)$

en notant $y = \frac{\{t\}}{t} \in \left[0; \frac{1}{t}\right[$ et $|h_s(t)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{|(\frac{[t]}{t})^a e^{ib \ln(\frac{[t]}{t})} - 1|}{t^a} = \frac{|(1-y)^a e^{ib \ln(1-y)} - 1|}{t^a}$ et on arrive à $|h_s(t)| \underset{+\infty}{=} \frac{|(1-ay + o(y))e^{ib(-y+o(y))} - 1|}{t^a} \underset{+\infty}{=} \frac{|(1-ay + o(y))(1-iby + o(y)) - 1|}{t^a} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{a+1}}\right)$. Alors,

par critère de RIEMANN, h_s est intégrable sur $[1; +\infty[$ car $a+1 > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^s} - \frac{1}{[t]^s}\right) dt$ existe.

Si s était un réel différent de 1, on aurait directement $\frac{N^{1-s}-1}{1-s} = \int_1^N t^{-s} dt = \left[\frac{t^{1-s}}{1-s}\right]_1^N$. Vérifions que cette relation est vraie même si s est complexe. Pour $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $f_z : t \mapsto t^z = t^\alpha e^{i\beta \ln(t)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et $\forall t > 0$, $f'_z(t) = \alpha t^{\alpha-1} e^{i\beta \ln(t)} + t^\alpha \left(\frac{i\beta}{t}\right) e^{i\beta \ln(t)} = \frac{\alpha + i\beta}{t} t^\alpha e^{i\beta \ln(t)}$ donc $f'_z(t) = z f_{z-1}(t)$ donc, par le théorème fondamental de l'intégration, en prenant $z = 1-s \in \mathbb{C}^*$, on obtient $\int_1^N t^{-s} dt = \int_1^N f_{z-1} dt = \left[\frac{f_z(t)}{z}\right]_1^N = \left[\frac{t^{1-s}}{1-s}\right]_1^N = \frac{N^{1-s}-1}{1-s}$.

Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(s) = \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s}\right) - \frac{N^{1-s}}{1-s} = \int_1^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt - \int_1^N t^{-s} dt - \frac{1}{1-s}$ qui s'écrit aussi, par linéarité de l'intégrale et CHASLES, $S_N(s) = \int_N^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt + \int_1^N \left(\frac{1}{[t]^s} - \frac{1}{t^s}\right) dt - \frac{1}{1-s}$.

Comme $\left|\int_N^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt\right| = \left|\int_N^{N+1} \frac{1}{N^s} dt\right| = \left|\frac{1}{N^s}\right| = \frac{1}{N^{\operatorname{Re}(s)}}$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_N^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt = 0$ car $\operatorname{Re}(s) > 0$ et, avec la convergence précédente, $(S_N(s))_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge donc $\zeta(s)$ existe et, comme $\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(s)$, on obtient la relation $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{[t]^s} - \frac{1}{t^s}\right) dt$.