

DM 3 : DIRICHLET ET COMPAGNIE

PSI1 2025/2026

pour vendredi 29 septembre 2023

PARTIE 1 : ÉTUDE DE φ

1.1 Par opérations, d est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et, si $t \geq 0$, $d'(t) = 1 - \sin t \geq 0$ donc d est croissante sur l'intervalle \mathbb{R}_+ . Comme $d(0) = 0$, la fonction d est positive sur \mathbb{R}_+ ce qui donne $1 - \cos t \leq t$ et comme $\cos \leq 1$, on a l'inégalité attendue avec $\alpha = 1$: $\forall t > 0, 0 \leq \frac{1 - \cos t}{t} \leq 1$. De même, δ est clairement C^2 sur \mathbb{R}_+ et, si $t \geq 0$, $\delta'(t) = t - \sin t$ puis $\delta''(t) = 1 - \cos t \geq 0$. Comme $\delta'(0) = 0$, on a $\delta' \geq 0$ car δ' est croissante sur \mathbb{R}_+ .

À nouveau, $\delta \geq 0$ car $\delta(0) = 0$ et que δ est croissante sur \mathbb{R}_+ . On a donc : $\forall t > 0, 0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \frac{1}{2}$.

Pour ces deux fonctions, on pouvait aussi dire qu'elles étaient prolongeables par continuité en 0 (par DL) et de limite nulle en $+\infty$ donc classiquement bornées. On conclut en remarquant qu'elles sont évidemment positives. Mais ceci ne donnait pas les valeurs exactes de α et β .

1.2 $h : t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , bornée sur $]0; 1]$ d'après **1.1.2** (et même prolongeable par continuité en 0) donc intégrable sur $]0; 1]$. Pour $t > 0$, on a $0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ donc $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ par comparaison. Ainsi $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}^{+*} .

Si $x \geq 0$ alors $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} et $\left| \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} \right| \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} = h(t)$ donc, par comparaison, $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt}$ est intégrable sur \mathbb{R}^{+*} , ce qui signifie que $\varphi(x)$ existe si $x \geq 0$.

1.3 Si $0 \leq x_1 \leq x_2$, $\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} (e^{-x_1 t} - e^{-x_2 t}) dt \leq 0$ car $\frac{1 - \cos t}{t^2} \geq 0$ et $x \mapsto e^{-xt}$ est décroissante si $t \geq 0$. Ainsi, φ est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème de la limite monotone, la fonction φ admet une limite finie (notée λ) en $+\infty$.

D'après **1.1.2**, on a $\forall t > 0, 0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} \leq \frac{1}{2} e^{-xt}$ donc comme, pour $x > 0$, $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ , pour $x > 0, 0 \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{2x}$. On en déduit par encadrement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$.

1.4.1 La fonction f_t est de classe C^2 sur $[a/2; +\infty[$ et $|f_t''(x)| = t^2 e^{-xt} \leq t^2 e^{-at/2}$ donc l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE (ou TAYLOR avec reste intégral) donne $|f_t(x) - f_t(a) - (x - a)f_t'(a)| \leq \frac{|x - a|^2}{2} \times t^2 e^{-at/2}$, d'où

l'inégalité voulue : $|e^{-tx} - e^{-at} + (x - a)te^{-at}| \leq \frac{(x - a)^2}{2} t^2 e^{-at/2}$.

1.4.2 $\varphi(x) - \varphi(a) + (x - a) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-at} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} (e^{-xt} - e^{-at} + (x - a)te^{-at}) dt$ donc, avec la question précédente et l'inégalité de la moyenne (en vérifiant que $t \mapsto (1 - \cos t)e^{-at/2}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ car $a > 0$), on a bien $\left| \varphi(x) - \varphi(a) + (x - a) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-at} dt \right| \leq \frac{(x - a)^2}{2} \int_0^{+\infty} (1 - \cos t)e^{-at/2} dt$.

Ainsi, si $x \neq a$, on a l'inégalité $\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-at} dt \right| \leq \frac{|x - a|}{2} \int_0^{+\infty} (1 - \cos t) e^{-at/2} dt$.
 Or $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|x - a|}{2} \int_0^{+\infty} (1 - \cos t) e^{-at/2} dt = 0$ car $\int_0^{+\infty} (1 - \cos t) e^{-at/2} dt$ est une constante vis-à-vis de x .

On en déduit que φ est dérivable en a et que $\varphi'(a) = - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{-at} dt$.

1.4.3 Pour $x > 0$, les fonctions $t \mapsto e^{-xt}$ et $t \mapsto e^{-(x-i)t}$ sont intégrables sur \mathbb{R}_+^* donc on a :

$$\varphi''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt - \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t} dt \right) = \frac{1}{x} - \operatorname{Re} \left(\frac{1}{x-i} \right) \text{ donc } \varphi''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

On en déduit en primitivant sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* que $\forall x > 0$, $\varphi'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

On a $\varphi'(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) + C$ donc $\lim_{+\infty} \varphi' = C$. Par la majoration de 1.1, on a $|\varphi'(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$

ce qui donne $C = \lim_{+\infty} \varphi' = 0$ puis $\varphi'(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)$ car $\ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) = -\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \rightarrow 0$ en $+\infty$.

1.5.1 $x \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) = -x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) = 0$.

La fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est continue sur \mathbb{R}^+ donc admet des primitives (calculons la primitive nulle en 0) : les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(1+t^2)$ sont de classe C^1 sur $[0; x]$ donc, par intégration par parties : $\int_0^x \ln(1+t^2) dt = \left[t \ln(1+t^2) \right]_0^x - \int_0^x t \times \frac{2t}{1+t^2} dt = x \ln(1+x^2) - 2 \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt$ donc

une primitive de $x \mapsto \ln(1+x^2)$ sur \mathbb{R}_+ est la fonction $x \mapsto x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \operatorname{Arctan}(x)$.

1.5.2 Comme $\forall x > 0$, $\varphi'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$, en primitivant sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* , il existe une constante C' telle que $\forall x > 0$, $\varphi(x) = x \ln(x) - x - \frac{x}{2} \ln(1+x^2) + x - \operatorname{Arctan}(x) + C' = \frac{x}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) - \operatorname{Arctan}(x) + C'$.

Comme $\lim_{+\infty} \varphi = 0$ et grâce à 1.5.1, on a $\varphi(x) = \frac{x}{2} \ln \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) - \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$.

Si $x > 0$, $\varphi(x) = x \ln(x) - \frac{x}{2} \ln(1+x^2) - \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}$, on en déduit $\lim_0 \varphi = \frac{\pi}{2}$. Reste à prouver que

φ est continue en 0 : on a $0 \leq 1 - e^{-xt} \leq xt$ si $x \geq 0$ et $t > 0$ mais la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0; +\infty[$. Si $A > 0$, on a, en majorant $1 - e^{-xt}$ par xt sur $[0; A]$ et par 1 sur $[A; +\infty[$: $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq x \int_0^A \frac{1 - \cos t}{t} dt + \int_A^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, il existe A tel que $\int_A^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour un tel A , on a $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \varepsilon + x \int_0^A \frac{1 - \cos t}{t} dt$ donc il existe $r > 0$ tel que si $0 \leq x < r$, on ait $0 \leq x \int_0^A \frac{1 - \cos t}{t} dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui donne, pour $0 \leq x < r$, $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \varepsilon$ donc $\lim_0 \varphi = \varphi(0)$.

Par continuité de φ en 0, on a $\varphi(0) = \lim_0 \varphi = \frac{\pi}{2}$.

On remarque que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi'(x) = -\infty$. Comme φ est continue sur \mathbb{R}^+ , un corollaire des accroissements finis

indique que φ n'est pas dérivable en 0 mais que sa courbe présente en 0 une demi-tangente verticale.

PARTIE 2 : ÉTUDE DE L'EXISTENCE DE J_m

2.1 La fonction $h_m : t \mapsto \frac{\sin^m t}{t}$ est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ et prolongeable par continuité en 0 car $\frac{\sin^m t}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{m-1}$

(avec $m \geq 1$ donc $h_1(0) = 1$ et $h_m(0) = 0$ si $m \geq 2$) donc $t \mapsto \frac{\sin^m t}{t}$ est intégrable sur $]0; \frac{\pi}{2}]$.

2.2 Les fonctions $t \mapsto (1 - \cos t)$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont C^1 sur $]0; +\infty[$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$ donc, par

intégration par parties, $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge et $J_1 = \varphi(0) = \frac{\pi}{2}$.

2.3 Pour $x > 0$ et $k \neq 0$, les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto \frac{e^{ikt}}{ik}$ sont C^1 sur $[\frac{\pi}{2}; +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{ikt}}{ikt} = 0$ donc, par

intégration par parties, on a l'équivalence I_k converge $\iff \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{ikt^2} dt$ converge. De plus, $t \mapsto \frac{e^{ikt}}{t^2}$ est

continue sur $[\frac{\pi}{2}; +\infty[$, $\left| \frac{e^{ikt}}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ donc $t \mapsto \frac{e^{ikt}}{t^2}$ est intégrable sur $[\frac{\pi}{2}; +\infty[$ par comparaison : I_k converge.

Pour $k = 0$, $t \mapsto \frac{1}{t}$ est positive et non intégrable sur $[\frac{\pi}{2}; +\infty[$ donc I_0 diverge. I_k converge $\iff k \neq 0$.

2.4.1 Par la formule d'EULER, $\sin^m t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^m = \frac{1}{(2i)^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} e^{ikt} e^{-i(m-k)t}$ donc, par

linéarité de l'intégrale : $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin^m t}{t} dt = \frac{1}{(2i)^m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} I_{2k-m}(x)$.

2.4.2 Si $m = 2p + 1$ alors pour tout $k \in \llbracket 0; m \rrbracket$, $2k - m \neq 0$ donc toutes les intégrales I_{2k-m} convergent. Par

combinaison linéaire, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^{2p+1} t}{t} dt$ converge. Comme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2p+1} t}{t} dt$ converge, J_{2p+1} converge.

2.4.3 Si $m = 2p$ alors toutes les intégrales I_{2k-m} convergent sauf si $k = p$. $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin^{2p} t}{t} dt$ est la somme de $2p$

intégrales convergentes et une intégrale divergente. Ainsi,

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2p} t}{t} dt$ est divergente.

2.4.4 Soit $p \in \mathbb{N}$, $\frac{|\sin t|^{2p+1}}{t} \geq \frac{|\sin t|^{2p+2}}{t} = \frac{(\sin t)^{2p+2}}{t} \geq 0$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2p+2} t}{t} dt$ est divergente avec **2.4.3**

donc $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|^{2p+1}}{t} dt$ est divergente par minoration et $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p+1}}{t} dt$ est semi-convergente.

PARTIE 3 : CALCUL DE J_{2p+1}

3.1.1 f étant continue sur le segment $[-1; 1]$, elle y est bornée et en notant $\|f\|_\infty = \text{Max}_{[-1; 1]} |f|$, on a par inégalité

de la moyenne et majoration de $|f|$ par $\|f\|_\infty$: $|\gamma_n| \leq \|f\|_\infty \int_{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2} + n\pi} \frac{dt}{t} = \|f\|_\infty \ln \left(\frac{n\pi + \pi/2}{(n-1)\pi + \pi/2} \right)$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{n\pi + \pi/2}{(n-1)\pi + \pi/2} \right) = 0$, on trouve par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = 0$.

Le changement de variable $u = t - n\pi$ donne $\gamma_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f((-1)^n \sin(u))}{u + n\pi} du = (-1)^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin(u))}{u + n\pi} du$ par imparité de f . Par ailleurs, en posant $v = -u$, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{f(\sin(u))}{u + n\pi} du = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin(v))}{-v + n\pi} du$. On en déduit que

$$\gamma_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{f(\sin(u))}{u + n\pi} - \frac{f(\sin(u))}{-u + n\pi} \right) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2(-1)^n u f(\sin(u))}{(u + n\pi)(-u + n\pi)} du = \mu_n.$$

3.1.2 Soit $x \geq \frac{\pi}{2}$ et n_x l'unique entier tel que $x \in \left[\frac{\pi}{2} + (n_x - 1)\pi, \frac{\pi}{2} + n_x\pi \right]$ (ce qui revient à $n_x = \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$).

On a alors, par relation de Chasles, $\int_{\pi/2}^x \frac{f(\sin(t))}{t} dt = \sum_{k=1}^{n_x} \gamma_k + \int_{\frac{\pi}{2} + (n_x - 1)\pi}^x \frac{f(\sin(t))}{t} dt$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $n_x \rightarrow +\infty$ et $\sum_{k=1}^{n_x} \gamma_k \rightarrow \int_0^{\pi/2} S(t) dt$ d'après **3.1.1** et ce qu'on a admis. Par ailleurs,

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2} + (n_x - 1)\pi}^x \frac{f(\sin(t))}{t} dt \right| \leq \|f\|_{\infty} \int_{\frac{\pi}{2} + (n_x - 1)\pi}^x \frac{dt}{t} = \|f\|_{\infty} \ln \left(\frac{(\pi/2) + n_x\pi}{(\pi/2) + (n_x - 1)\pi} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit par encadrement et somme que $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{f(\sin(t))}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\pi/2}^x \frac{f(\sin(t))}{t} dt = \int_0^{\pi/2} S(t) dt$.

3.1.3 $\psi_1 : t \mapsto \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}$ est continue sur $]0; \pi/2[$ et prolongeable par continuité en 0 (en posant $\psi_1(0) = f'(0)$

car $\frac{f(u)}{u} = \frac{f(u) - f(0)}{u - 0} \rightarrow f'(0)$ quand $u \rightarrow 0$ par hypothèse). Ainsi ψ_1 est intégrable sur $]0; \pi/2[$.

$\psi_2 : t \mapsto \frac{f(\sin(t))}{t}$ est continue sur $]0; \pi/2[$ et prolongeable par continuité en 0 (en posant à nouveau $\psi_2(0) = f'(0)$ car $t \sim \sin(t)$). Cette fonction ψ_2 est donc intégrable sur $]0; \pi/2[$.

3.1.4 Si $g : t \mapsto S(t) + \frac{f(\sin(t))}{t} - \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)}$, avec ce qui précède, g est continue sur $]0; \pi/2[$ avec $g(0) = S(0)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\sin(t))}{t} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{t} dt + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{f(\sin(t))}{t} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin(t))}{\sin(t)} dt = \int_0^{\pi/2} g = 0.$$

3.2.1 Pour $f = \text{Id}_{[-1,1]}$ (qui vérifie les hypothèses de **3.1**), $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(t)}{t}$ pour

$$t \in]0; \pi/2[. \text{ Avec } \mathbf{3.1.4}, J_1 - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{\sin(t)} dt = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{\sin(t)}{t} + \frac{\sin(t)}{t} - \frac{\sin(t)}{\sin(t)} \right) dt = 0, \text{ donc } J_1 = \frac{\pi}{4}.$$

3.2.2 Avec $f(t) = t^3$ (qui convient aussi), on obtient $S(t) = \sin^2(t) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} = \sin^2(t) - \frac{\sin^3(t)}{t}$ puis

$$\text{avec } \mathbf{3.1.4} \text{ (comme en } \mathbf{3.2.1}, \text{ les termes se simplifient) } J_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) dt = \left[\frac{2t - \sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

3.2.3 Plus généralement $S(t) = \sin^{2p}(t) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2t \sin(t)}{t^2 - n^2\pi^2} = \sin^{2p}(t) - \frac{\sin^{2p+1}(t)}{t}$ avec $f : t \mapsto t^{2p+1}$ qui

est continue, impaire, dérivable en 0 puis, avec la question **3.1.4** (comme en **3.2.1**, les termes se simplifient) : $J_{2p+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2p}(t) dt$. Une dernière intégration par parties (assez facile à justifier) donne alors

$$J_{2p+1} = (2p - 1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^{2p-2}(t) dt = (2p - 1)(J_{2p-1} - J_{2p+1}) \text{ ou encore } J_{2p+1} = \frac{2p - 1}{2p} J_{2p-1}.$$

Une récurrence simple montre enfin que $\forall p \in \mathbb{N}, J_{2p+1} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2}$.