

DEVOIR 07 : INTÉGRALES

PSI 1 2025-2026

mardi 14 octobre 2025

QCM

1 Propriétés : soit f et g deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ et F et G leurs primitives qui s'annulent en 0

1.1 $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1.3 $f \leq g \implies F \leq G$

1.2 F est paire si f est impaire

1.4 F est nulle $\iff f$ est nulle

2 Convergence : soit $f, g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux (CV pour converge, DV pour diverge)

2.1 $(\int_0^{+\infty} f DV \text{ et } \int_0^{+\infty} g DV) \implies \int_0^{+\infty} (f+g) DV$

2.3 $\int_1^{+\infty} f CV \iff \int_2^{+\infty} f CV$

2.2 $(\int_0^{+\infty} (f+g) CV \text{ et } \int_0^{+\infty} g CV) \implies \int_0^{+\infty} f CV$

2.4 $\int_0^{+\infty} f CV \iff \int_1^{+\infty} f CV$

3 Critère de RIEMANN et intégration par parties : soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux

3.1 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)dt}{t}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)dt}{t^2}$ ont même nature

3.3 $f(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \implies \int_0^1 f$ converge

3.2 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)dt}{1+t^2}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)dt}{t}$ ont même nature

3.4 $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{3/2}f(t) = 3 \implies \int_1^{+\infty} f$ converge

4 Intégration par parties et changement de variable : soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 intégrable sur $\mathbb{R}_+$; on pose

$F(x) = \int_0^x f(t)dt$ (F est la primitive de f qui s'annule en 0)

4.1 $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx = -F(1) + \int_1^{+\infty} \frac{F(x)}{x^2} dx$

4.3 $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) dt$

4.2 $\int_0^{+\infty} f(x)dx = [xf(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xf'(x)dx$

4.4 $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx$

Définition Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux avec $a < b$ deux réels. Rappeler la définition de la convergence de $\int_a^b f(x)dx$. Dans le cas de la convergence, quelle est par définition la valeur de $\int_a^b f(x)dx$?

Preuve Pour a, b réels et $u, v :]a; b[\rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 , avec le théorème fondamental de l'intégration seconde version, montrer la formule d'intégration par parties : $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$.

Exercice 1 Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_x^{3x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$.

a. Montrer que f est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de $f'(x)$.
En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Étudier la monotonie de $a : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$. En écrivant $\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \times \frac{1}{t}$, montrer l'existence et déterminer la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c. Calculer aussi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle qu'on précisera.

Exercice 2 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$.

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Définition

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1	X	X		X	
2		X	X		
3			X	X	
4	X		X	X	

1.1 Vrai : cours **1.2** Vrai : $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^{-x} f(-u)(-1)du$ en posant $u = -t$ et comme f est impaire : $F(x) = F(-x)$ **1.3** Faux : si $f \leq g$, alors $F \leq G$ sur $\mathbb{R}_+$ mais $G \leq F$ sur $\mathbb{R}_-$ par croissance de l'intégrale **1.4** Vrai : si $f = 0$, on a clairement $F = 0$ et si $F = 0$, on a $f = F' = 0$. **2.1** Faux : $f(x) = -g(x) = \frac{1}{x}$ **2.2** Vrai :

$f = (f + g) - g$ **2.3** Vrai : $\int_1^2 f$ ne pose aucun problème **2.4** Faux : il faut étudier ce qui se passe en 0^+ .

3.1 et **3.2** Faux : la première CV, la seconde DV, $\frac{\cos(t)}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$, les crochets DV dans l'IPP : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos(t)}{t} = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) \operatorname{Arctan}(t) = +\infty$ **3.3** et **3.4** Vrais : RIEMANN avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ en 0 et $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ en $+\infty$.

4.1 Vrai : $x \mapsto \frac{1}{x}$ et F de classe C^1 et F bornée **4.2** Faux : on ne sait rien de $xf(x)$ en $+\infty$ **4.3** Vrai : $x = \frac{1}{t} = \varphi(t)$ et φ bijective C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ **4.4** Vrai : l'intégrale converge et CHASLES par définition.

Définition On dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge s'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent : c'est-à-dire que $y \mapsto \int_c^y f(t)dt$ et $x \mapsto \int_x^c f(t)dt$ ont respectivement des limites finies en b^- et en a^+ .

Dans ce cas, la valeur de l'intégrale est $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^c f(t)dt + \lim_{y \rightarrow b^-} \int_c^y f(t)dt$.

Preuve Les fonctions uv' et $u'v$ sont continues sur le segment $[a; b]$ donc, par linéarité de l'intégrale,

$\int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt = \int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))dt$. Par le théorème fondamental de l'intégration : $\int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b$ donc $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$.

Exercice 1 a. $g : t \mapsto (t^2 + 1)^{-1/2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle y admet au moins une primitive G . Par le

th. fond. de l'intégration, $\forall x > 0$, $f(x) = [G(t)]_x^{3x}$ car $[x; 3x] \subset \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, f est C^1 et strict. croiss. sur $\mathbb{R}_+^*$

car $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{3\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{9x^2 + 1}}{\sqrt{9x^2 + 1}\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{9x^2 + 1}\sqrt{x^2 + 1}(3\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{9x^2 + 1})} > 0$.

b. $a'(t) = \frac{1}{(t^2 + 1)\sqrt{t^2 + 1}} > 0$ donc a strict. croissante sur $\mathbb{R}$. Si $x > 0$, $f(x) = \int_x^{3x} \frac{a(t)}{t}dt$ donc, comme

$\forall t \in [x; 3x]$, $a(x) \leq a(t) \leq a(3x)$, on a $a(x) \int_x^{3x} \frac{dt}{t} = a(x) \ln(3) \leq f(x) \leq a(3x) \ln(3) = a(3x) \int_x^{3x} \frac{dt}{t}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a(3x) = 1$ et $\int_x^{3x} \frac{dt}{t} = \ln(3)$, par encadrement, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(3)$.

c. Si $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \int_x^{3x} \frac{dt}{\sqrt{x^2 + 1}}$ car $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$ est décroissante sur $[x; 3x]$ donc $0 \leq f(x) \leq \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. Par le théorème de la bijection continue, $f : \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{\sim}]0; \ln(3)[$ est bijective.

Exercice 2 Soit $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + \frac{k^2}{n^2})^{1/n} > 0$ pour $n \geq 1$, $v_n = \ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k^2}{n^2})$. Comme

$f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$ est continue sur le segment $[0; 1]$ (sommes de RIEMANN), $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 \ln(1 + x^2)dx = I$

et $I = [x \ln(1 + x^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2(+2-2)}{1+x^2}dx = \ln(2) - 2 + 2[\operatorname{Arctan} x]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$ par IPP car $u : x \mapsto x$

et $v = f$ sont C^1 sur $[0; 1]$. Par continuité de $\exp$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^I = 2e^{(\pi/2)-2} \sim 1,302$ car $u_n = e^{v_n}$.