

TD 07 : INTÉGRATION

PSI 1 2025-2026

vendredi 17 octobre 2025

7.1 La fonction $g : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ est continue, positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, $\forall x \in J = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}$

donc, puisque $\tan(u) \underset{0}{=} u$, on a l'équivalent $g(x) \underset{\pi/2}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - x}}$ donc g est intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par comparaison

aux intégrales de RIEMANN car $\frac{1}{2} < 1$. Ainsi, $\int_0^{\pi/2} g(t)dt$ converge donc I existe.

La fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ est de classe C^1 , bijective et strictement croissante de J dans $\mathbb{R}_+^*$ et on a $\varphi'(x) = \frac{1 + \tan^2(x)}{2\sqrt{\tan(x)}}$. Comme on a $g(x) = \sqrt{\tan(x)} = \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \varphi'(x)$ en posant

$f : u \mapsto \frac{2u^2}{1+u^4}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de changement de variable montre que, en posant

$u = \sqrt{\tan(x)} = \varphi(x)$, on a la relation $I = \int_0^{+\infty} f(u)du$. Il y a maintenant deux méthodes :

(1) Par le changement de variable $u = \frac{1}{v} = \psi(v)$, comme ψ réalise une bijection C^1 strictement décroissante

de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4} du = \int_{+\infty}^0 \frac{2(1/v)^2}{1+(1/v)^4} \left(-\frac{1}{v^2}\right) dv = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+v^4} dv$ après simplifications.

Or $I = \int_0^{+\infty} \frac{2u}{1+u^4} du = \left[\text{Arctan}(u^2)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. De plus, on peut décomposer le dénominateur

avec les identités remarquables car $1 + u^4 = (1 + u^2)^2 - 2u^2 = (u^2 - \sqrt{2}u + 1)(u^2 + \sqrt{2}u + 1)$

ce qui nous incite à écrire $I + \sqrt{2}L + I = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4} du + \int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{2}u}{1+u^4} du + \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+u^4} du$ d'où

$I + \sqrt{2}L + I = \int_0^{+\infty} \frac{2(u^2 + \sqrt{2}u + 1)}{(u^2 - \sqrt{2}u + 1)(u^2 + \sqrt{2}u + 1)} du$ donc, avec des techniques classiques, on obtient

$I + \sqrt{2}L + I = \int_0^{+\infty} \frac{2}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} du = \int_0^{+\infty} \frac{4}{(\sqrt{2}u - 1)^2 + 1} du = 2\sqrt{2} \left[\text{Arctan}(\sqrt{2}u - 1) \right]_0^{+\infty} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$.

On en déduit que $I = \frac{1}{2} \left(\frac{3\sqrt{2}\pi}{2} - \sqrt{2}L \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(2) Par une décomposition en éléments simples classique (mais hors programme en PSI) on arrive à la

relation $\frac{2u^2}{1+u^4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2u - \sqrt{2} + \sqrt{2}}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{2u + \sqrt{2} - \sqrt{2}}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right)$

donc $\frac{2u^2}{1+u^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2u - \sqrt{2}}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{2u + \sqrt{2}}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right) + \frac{1}{2(u^2 - \sqrt{2}u + 1)} + \frac{1}{2(u^2 + \sqrt{2}u + 1)}$ et, après

calculs, $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln \left(\frac{u^2 - \sqrt{2}u + 1}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\text{Arctan}(\sqrt{2}u - 1) + \text{Arctan}(\sqrt{2}u + 1) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

7.2 a. f est continue et 2π -périodique donc bornée sur $\mathbb{R}$ par $M = \max_{x \in [0; 2\pi]} |f(x)|$ et $\forall x \in [1; +\infty[$, $\left| \frac{f(t)}{t^\alpha} \right| \leq \frac{M}{t^\alpha}$.

D'après RIEMANN, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge donc $t \mapsto \frac{f(t)}{t^\alpha}$ est intégrable et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ convergente.

b. Si $f \in E$, ses primitives sont de la forme $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Ces fonctions F sont 2π -périodiques, par périodicité de la fonction f , si et seulement si l'on a, pour tout réel x :

$F(x + 2\pi) = F(x) \iff \int_0^{x+2\pi} f(t)dt = \int_0^{x+2\pi} f(t)dt \iff \int_x^{x+2\pi} f(t)dt = 0 \iff \int_0^{2\pi} f(t)dt = 0 \iff c(f) = 0$.

c. Si $f \in E$, bien sûr $g = f - c(f)$ est encore continue et 2π -périodique donc $g \in E$. Par linéarité de l'intégrale,

on a $c(g) = c(f - c(f)) = c(f) - c(c(f)1) = c(f) - c(f)c(1) = 0$ car $c(1) = 1$ où 1 est la fonction constante.

d. Puisque $c(g) = 0$, g admet une primitive 2π -périodique (elles le sont toutes en fait), par exemple $G : x \mapsto \int_0^x g(t)dt$. On effectue une intégration par parties avec G et $t \mapsto \frac{1}{t}$ qui sont de classe C^1 sur $[1; x]$

si $x > 1$, et on a $\int_1^x \frac{g(t)}{t} dt = \left[\frac{G(t)}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{G(t)}{t^2} dt$. Or G étant périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$ donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x} = 0$. De plus, on a vu à la question **a.** que $\int_1^{+\infty} \frac{G(t)}{t^2} dt$ converge car $\alpha = 2 > 1$ et $G \in E$. Ainsi,

par somme, $\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t} dt$ converge et on a même $\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t} dt = -G(1) + \int_1^{+\infty} \frac{G(t)}{t^2} dt$.

e. Il suffit décrire que $\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{g(t)}{t} dt + \int_1^x \frac{c(f)}{t} dt$. Or $\int_1^x \frac{c(f)}{t} dt = c(f) \ln(x)$ et $x \mapsto \int_1^x \frac{g(t)}{t} dt$

admet une limite finie en $+\infty$ d'après la question précédente. Ainsi, $\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{+\infty}{\sim} c(f) \ln(x)$.

f. Comme $t \mapsto |\sin(t)|$ est continue et 2π -périodique, et que $c(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin(t)| dt = \frac{2}{\pi}$, on a d'après la

question précédente $\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{2 \ln(x)}{\pi} \rightarrow +\infty$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge.

7.3 a. La fonction $y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse donc elle y admet des primitives.

De plus, $y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2 = -2y'^2 - 2yy' - 2yy'' - 2y'y'' = -(y^2)' - (y'^2)' - (2yy')' = -(y + y')^2$. Ainsi, $-(y + y')^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2$.

b. L'inégalité classique $|yy''| \leq \frac{y^2 + y''^2}{2}$ montre, par comparaison, comme $y^2 + y''^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

par hypothèse, que yy'' est aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} yy''$ converge.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, par intégration par parties puisque les fonctions y et y' sont de classe C^1 sur $[0; x]$, on a $\int_0^x y'^2 = [yy']_0^x - \int_0^x yy''$. Or on sait que $\int_0^{+\infty} yy''$ converge et que, par le théorème de la limite monotone, comme $x \mapsto \int_0^x y'^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle admet une limite finie ou elle tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Il en est donc de même pour yy' . Mais si on avait $\lim_{+\infty} yy' = +\infty$, on aurait

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x yy' = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x = +\infty$ ce qui montrerait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y^2(x) = +\infty$, en contradiction avec la convergence de $\int_0^{+\infty} y^2$. Ainsi, par l'absurde, on a prouvé que $\int_0^{+\infty} y'^2$ converge.

c. Comme avant $|yy'| \leq \frac{y^2 + y'^2}{2}$ donc yy' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison car y^2 et y'^2 le sont et, à

nouveau, $\int_0^{+\infty} yy'$ converge. Or $2 \int_0^x y(t)y'(t)dt = [y^2]_0^x = y(x)^2 - y(0)^2$, donc y^2 admet une limite finie en

$+\infty$. Mais comme $\int_0^{+\infty} y^2$ converge par hypothèse, cette limite est forcément nulle donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

d. À nouveau, $|y'y''| \leq \frac{y'^2 + y''^2}{2}$ donc $y'y''$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison car y'^2 et y''^2 le sont

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} y'y''$ converge. Ainsi $2 \int_0^x y'(t)y''(t)dt = [y'^2]_0^x = y'(x)^2 - y'(0)^2$ admet une limite finie

quand x tend vers $+\infty$. Si on note $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x)^2 \in \mathbb{R}_+$, comme $\int_0^{+\infty} y'^2$ converge, on a forcément $\ell = 0$ ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$.

e. Comme y , y' , y'' sont de carrés intégrables d'après ce qui précède, la fonction $y + y' + y''$ l'est aussi donc $y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par somme. De toutes façons, pour $x \geq 0$,

$\int_0^x (y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2) = [-(y + y')^2]_0^x$ d'après la question **a.** et $\lim_{+\infty} (y + y')^2 = 0$ d'après les

questions **c.** et **d.**. En passant à la limite, on a $\int_0^{+\infty} (y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2) = (y(0) + y'(0))^2$.
 $\int_0^{+\infty} y^2 - \int_0^{+\infty} y'^2 + \int_0^{+\infty} y''^2 - \int_0^{+\infty} (y + y' + y'')^2 = (y(0) + y'(0))^2$ par linéarité de l'intégrale d'où
 $\int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2 - \int_0^{+\infty} y'^2 = \int_0^{+\infty} (y + y' + y'')^2 + (y(0) + y'(0))^2 \geq 0$ et l'inégalité attendue.

f. Pour qu'il y ait égalité dans l'inégalité de la question précédente, il est nécessaire et suffisant que l'on ait $y(0) + y'(0) = 0$ et que (E) : $y'' + y' + y = 0$. Comme les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et j^2 , les solutions sur $\mathbb{R}_+$ de (E) sont les fonctions $y : x \mapsto \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) e^{-\frac{x}{2}}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Comme $y(0) = A$ et $y'(0) = -\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}B}{2}$, la condition $y(0) + y'(0) = 0$ équivaut à $\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}B}{2} = 0$ ou $A = -\sqrt{3}B$. Ainsi, les fonctions y telles que $\int_0^{+\infty} y'^2 = \int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2$ sont les fonctions (en posant $\lambda = 2B \in \mathbb{R}$)
 $y : x \mapsto \lambda \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) e^{-\frac{x}{2}} = \lambda \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) e^{-\frac{x}{2}}$.

7.4 a. Si $x = 0$, la fonction $t \mapsto \frac{t \sin(xt)}{1+t^2}$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$ donc y est intégrable et $f(0)$ existe.

L'existence de $f(x)$ et celle de $f(-x)$ sont équivalentes par imparité de la fonction $\sin$ et, en cas de convergence, on aura $f(-x) = -f(x)$ donc f est une fonction impaire sur son ensemble de définition.

Soit $x > 0$, posons $u : t \mapsto -\frac{\cos(xt)}{x}$ et $v : t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$, alors u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, $u(0)v(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées. Ainsi, comme $u'(t) = \sin(xt)$ et $v'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{x(1+t^2)^2} dt$ sont de même nature et, en cas de convergence, on aura $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{x(1+t^2)^2} dt$. Or $g_x : t \mapsto \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{x(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ceci montre l'existence de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, la fonction f est définie et impaire sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{x(1+t^2)^2} dt$.

b. Pour $x > 0$, puisque $f(x)$ existe, on effectue le changement de variable $t = \frac{u}{x} = \varphi(u)$ avec φ strictement croissante, de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u}{x} \cdot \frac{\sin(u)}{1 + \frac{u^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} du = \int_0^{+\infty} \frac{u \sin(u)}{x^2 + u^2} du$.

Ainsi, $f(x) - I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{x^2 + u^2} - \frac{1}{u} \right) \sin(u) du = -x^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u(x^2 + u^2)} du$. Comme on sait que $|\sin(u)| \leq u$ et que la fonction $u \mapsto \frac{1}{x^2 + u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut majorer par inégalité triangulaire et on obtient $0 \leq |I - f(x)| \leq x^2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{x^2 + u^2} = x^2 \left[\frac{1}{x} \operatorname{Arctan}\left(\frac{u}{x}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi x}{2}$. Par théorème d'encadrement, comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi x}{2} = 0$, on obtient la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = I$.

Comme $|\cos(xt)| \leq 1$ et que la fonction $t \mapsto \frac{|1-t^2|}{(1+t^2)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, encore une fois par inégalité triangulaire, avec l'expression vue en **a.**, on a $|f(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{|1-t^2|}{(1+t^2)^2} dt$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge d'après l'énoncé, on peut utiliser CHASLES pour l'écrire sous la forme $I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on effectue le changement de variable $t = u + k\pi = \varphi_k(u)$ dans

$\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$ avec φ_k de classe C^1 sur le segment $[0; \pi]$ pour avoir $\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^\pi \frac{\sin(u+k\pi)}{u+k\pi} du$.

Or $\sin(u+k\pi) = (-1)^k \sin(u)$ ce qui donne bien $\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt = (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+k\pi} du$. Finalement, on a

bien une expression de I sous forme de somme de série numérique, $I = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+k\pi} du$.

Posons, pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+k\pi} du$. Alors $u_k > 0$ car $\sin$ est strictement positive sur $]0; \pi[$ et que

$u \mapsto \frac{\sin(u)}{u+k\pi}$ est continue sur $[0; \pi]$. Comme $\forall u \in [0; \pi]$, $\frac{\sin(u)}{u+(k+1)\pi} \leq \frac{\sin(u)}{u+k\pi}$, on obtient $u_{k+1} \leq u_k$

par croissance de l'intégrale. De plus, si $k \geq 1$, il vient $0 \leq u_k \leq \int_0^\pi \frac{1}{k\pi} du$ en majorant $\sin(u)$ par 1 et

en minorant $u+k\pi$ par $k\pi$. Ainsi, $0 \leq u_k \leq \frac{1}{k}$ donc, par encadrement, $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$. Comme la suite

$(u_k)_{k \geq 0}$ est décroissante et tend vers 0, le critère spécial des séries alternées montre que $\sum_{k \geq 0} (-1)^k u_k$ converge.

On le savait déjà d'après la question précédente. Mais il dit aussi que les sommes partielles consécutives constituent un encadrement de la somme I . Ainsi, pour tout entier n , en notant $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$, on a

la double inégalité $S_{2n+1} \leq I \leq S_{2n}$. En particulier, $u_0 - u_1 \leq I \leq u_0$ donc $I \geq u_0 - u_1$. Or, en écrivant

$u_0 - u_1 = \int_0^\pi \sin(u) \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+\pi} \right) du = \int_0^\pi \frac{\pi \sin(u)}{u(u+\pi)} du$, comme $u \mapsto \frac{\pi \sin(u)}{u(u+\pi)}$ est continue, positive et

non nulle sur $[0; \pi]$, on a $u_0 - u_1 > 0$ donc $I > 0$. On le sait déjà car on connaît l'intégrale de DIRICHLET

$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ mais ce n'est pas au programme et ce qui précède montre bien que $I > 0$.

Comme $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = I > 0$, la fonction f n'est pas continue en 0.

7.5 a. Comme $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $e^{i\theta} \neq 1$ d'où $\forall t \in [0; 1]$, $e^{i\theta} t \neq 1$ et la fonction $t \mapsto e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta} t^n}{1 - e^{i\theta} t}$ est continue sur

le segment $[0; 1]$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta} t^n}{1 - e^{i\theta} t} dt$ est bien définie. Comme $e^{in\theta} t^n = (e^{i\theta} t)^n$ avec

MOIVRE et $e^{i\theta} t \neq 1$, on a la relation $\frac{1 - e^{in\theta} t^n}{1 - e^{i\theta} t} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\theta} t)^k$ donc $e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta} t^n}{1 - e^{i\theta} t} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)\theta} t^k$. Par

linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta} t^n}{1 - e^{i\theta} t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)\theta} \int_0^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)\theta} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i(k+1)\theta}}{k+1}$.

On effectue ensuite le changement d'indice $m = k+1$ et on a bien $\sum_{m=1}^n \frac{e^{im\theta}}{m} = \int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta} t^n}{1 - e^{i\theta} t} dt$.

b. Posons $I = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} t} dt$, qui existe bien car $t \mapsto \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} t}$ est continue sur le segment $[0; 1]$. Pour

$n \in \mathbb{N}^*$, si on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k}$, qui est la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$, on a donc

d'après **a.** et par linéarité de l'intégrale, $S_n - I = - \int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{e^{in\theta} t^n}{1 - e^{i\theta} t} dt$. Par inégalité triangulaire, on

a $|S_n - I| \leq \int_0^1 |e^{i\theta}| \times \frac{|e^{in\theta} t^n|}{|1 - e^{i\theta} t|} dt = \int_0^1 \frac{t^n}{|1 - e^{i\theta} t|} dt$. Il s'agit de minorer le dénominateur en écrivant

$|1 - e^{i\theta} t|^2 = (1 - \cos(\theta)t)^2 + \sin^2(\theta)t^2 = 1 - 2\cos(\theta)t + t^2 = (t - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)$ pour $t \in [0; 1]$. Ainsi,

$|1 - e^{i\theta} t|^2 \geq \sin^2(\theta)$ donc $|1 - e^{i\theta} t| \geq |\sin(\theta)| > 0$ et $|S_n - I| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{|\sin(\theta)|} dt = \frac{1}{(n+1)|\sin(\theta)|}$. Par

encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = I$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} t} dt$.

c. $t \mapsto \frac{\cos(\theta) - t + i \sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1}$ est continue sur $[0; 1]$ car $t^2 - 2t \cos(\theta) + 1 = |1 - e^{i\theta}t|^2 > 0$. Par définition

d'une intégrale complexe, $\int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t + i \sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt = \int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt + i \int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt$.

Or $\int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt = -\frac{1}{2} \left[\ln(t^2 - 2t \cos(\theta) + 1) \right]_0^1$ car $(t^2 - 2t \cos(\theta) + 1)' = 2(t - \cos(\theta))$ donc

$$\int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2 \cos(\theta) + 1) = -\frac{1}{2} \ln(2 - 2 \cos(\theta)).$$

De plus, $\int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt = \int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} dt = \int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{(t - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)} dt$.

Comme $\sin(\theta) \neq 0$, on a donc $\int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt = \int_0^1 \frac{\frac{\sin(\theta)}{1 + \left(\frac{t - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2}}{1 + \left(\frac{t - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2} dt = \left[\operatorname{Arctan} \left(\frac{t - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) \right]_0^1$

donc $\int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt = \operatorname{Arctan} \left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right)$ par imparité de Arctan .

Ainsi, $\int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t + i \sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt = -\frac{1}{2} \ln(2 - 2 \cos(\theta)) + i \operatorname{Arctan} \left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) + i \operatorname{Arctan} \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right)$.

d. Si $\theta \in]0; \pi[$, on a bien $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi \mathbb{Z}$. D'après b., la série $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} dt$. Or,

en multipliant par la quantité conjuguée, $\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} dt = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}(1 - e^{-i\theta}t)}{|1 - e^{i\theta}t|^2} dt = \int_0^1 \frac{e^{i\theta} - t}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt$

est l'intégrale de la question c.. En identifiant parties réelle et imaginaire des séries et des intégrales, on a donc

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = \int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt$. Or $1 - \cos(\theta) = 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$

donc $-\frac{1}{2} \ln(2 - 2 \cos(\theta)) = -\frac{1}{2} \ln \left(4 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) = -\ln \left(2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$. Comme $\sin(\theta) = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$, on

a aussi $\operatorname{Arctan} \left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{2 \sin^2(\theta/2)}{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} \right) = \operatorname{Arctan} \left(\tan(\theta/2) \right) = \frac{\theta}{2}$ car $\frac{\theta}{2} \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

De plus, $\operatorname{Arctan} \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) = \operatorname{Arctan} \left(\tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right) = \frac{\pi}{2} - \theta$ car $\frac{\pi}{2} - \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Ainsi, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = -\ln \left(2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$.

7.6 a. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto e^{-(1-i)t} t^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|f_n(t)| = t^n e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par

croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-(1-i)t} t^n dt$ existe. Pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u(t) = t^n$ et $v(t) = \frac{e^{(i-1)t}}{i-1}$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par

croissances comparées donc $I_n = 0 - \frac{n}{i-1} \int_0^{+\infty} e^{(i-1)t} t^{n-1} dt = \frac{n(i+1)}{2} I_{n-1}$ par intégration par parties.

Par une récurrence très simple, puisque $I_0 = \left[\frac{e^{(i-1)t}}{i-1} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-i} = \frac{i+1}{2}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = n! \left(\frac{i+1}{2} \right)^{n+1}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto e^{-t^{1/4}} \sin(t^{1/4}) t^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|g_n(t)| \leq e^{-t^{1/4}} t^n = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

par croissances comparées donc g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^{1/4}} \sin(t^{1/4}) t^n dt$ existe.

On effectue dans J_n le changement de variable $t = u^4 = \varphi(u)$ avec φ qui est strictement croissante, de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, de sorte que $J_n = 4 \int_0^{+\infty} e^{-u} \sin(u) u^{4n+3} du = 4 \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-u} e^{iu} u^{4n+3} du \right)$

donc $J_n = 4 \operatorname{Im}(I_{4n+3})$. Or $I_{4n+3} = (4n+3)! \left(\frac{i+1}{2} \right)^{4n+4} = (4n+3)! \left(\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \right)^{4(n+1)} = (4n+3)! (-1)^{n+1}$ est

réel donc $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^{1/4}} \sin(t^{1/4}) t^n dt = 0$.

7.7 a. L'ensemble E est inclus dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et il est non vide car la fonction nulle, qui est continue sur $\mathbb{R}_+$, vérifie $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in E^2$, il existe par définition des réels strictement positifs α et β tels que $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $x^\beta g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Supposons par exemple que $\alpha \leq \beta$, comme la fonction $x \mapsto x^{\alpha-\beta}$ est bornée au voisinage de $+\infty$ car $\alpha - \beta \leq 0$, on a $x^\alpha(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda x^\alpha f(x) + \mu x^{\alpha-\beta} x^\beta g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $\lambda f + \mu g \in E$ car cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, E est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ donc est lui-même un espace vectoriel.

b. D'abord, pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $h : t \mapsto e^{-t} f(t)$ est continue sur $[x; +\infty[$. Par définition de E , il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $h(t) = t^{-\alpha} e^{-t} t^\alpha f(t) = o(t^{-\alpha} e^{-t}) = o(e^{-t})$. Par comparaison à une intégrale de référence, h est intégrable sur $[x; +\infty[$ donc g est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Par CHASLES, pour $x \in \mathbb{R}_+$, il vient $g(x) = e^x \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt - e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt$. Comme h est continue sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $H : x \mapsto \int_0^x e^{-t} f(t) dt$ est de classe C^1 sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ et $H(x) = h(x)$. Ainsi, par opérations, g est de classe C^1 et g est solution de (E_f) sur $\mathbb{R}_+$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = e^x \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt - e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt - e^x e^{-x} f(x) = g(x) - f(x)$.

Comme les solutions réelles de l'équation homogène $(E_{f,0}) : y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ sont toutes les fonctions $z_\lambda : x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, par théorème de structure, les solutions réelles de (E_f) sur $\mathbb{R}_+$ sont toutes les fonctions $y_\lambda : x \mapsto \left(\lambda + \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right) e^x$. On a $y_0 = g$, vérifions que $g \in E$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $|x^\alpha g(x)| = \left| x^\alpha e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right| \leq x^\alpha e^x \int_x^{+\infty} t^{-\alpha} e^{-t} |t^\alpha f(t)| dt$ par inégalité triangulaire. Soit $\varepsilon > 0$, comme $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, il existe un réel $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall t \geq A$, $|t^\alpha f(t)| \leq \varepsilon$. Ainsi, dès que $x \geq A$, on a $|x^\alpha g(x)| \leq \varepsilon x^\alpha e^x \int_x^{+\infty} t^{-\alpha} e^{-t} dt \leq \varepsilon x^\alpha e^x x^{-\alpha} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt$ car $\forall t \geq x$, $t^{-\alpha} \leq x^{-\alpha}$ car $\alpha \geq 0$. Comme $\int_x^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_x^{+\infty} = e^{-x}$, on a donc $\forall x \geq A$, $|x^\alpha g(x)| \leq \varepsilon$. Ainsi, $x^\alpha g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $g \in E$. Or $x \mapsto e^x$ n'appartient pas à E car $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$, $x^\alpha e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ par croissances comparées donc y_λ n'appartient à E que si $\lambda = 0$ et on peut donc conclure que $g : x \mapsto e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est l'unique solution de (E_f) appartenant à E .

7.8 a. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $f_x : t \mapsto \sin^x(t)$ est continue sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $f(x) = \int_0^{\pi/2} f_x(t) dt$ existe. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_x : t \mapsto \sin^x(t)$ est continue sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $f_x(t) \sim_0 t^x = \frac{1}{t^{-x}}$ car $\sin(t) \sim_0 t$ donc, comme f_x est positive et par critère de RIEMANN, $\int_0^{\pi/2} f_x(t) t$ converge si et seulement si $-x < 1 \iff x > -1$. Par conséquent, le domaine de définition D_f de f vaut $D_f =]-1; +\infty[$.

b. Pour $x > 0$, les fonctions $u_x : t \mapsto \sin^x(t)$ et $v : t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe C^1 sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u_x(t)v(t) = 0$ donc $f(x+1) = \int_0^{\pi/2} u_x(t)v'(t) dt = [u_x(t)v(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'_x(t)v(t) dt$ par intégration par parties d'où $f(x+1) = x \int_0^{\pi/2} \sin^{x-1}(t) \cos^2(t) dt$. Ainsi, $f(x+1) = x \int_0^{\pi/2} \sin^{x-1}(t)(1 - \sin^2(t)) dt$

ce qui donne $f(x+1) = x(f(x-1) - f(x+1))$ par linéarité de l'intégrale (les deux convergent) donc $(x+1)f(x+1) = xf(x-1)$ ce qui donne $(x+1)f(x+1)f(x) = xf(x)f(x-1)$ d'où $\Phi(x+1) = \Phi(x)$.

c. Pour $(x, y) \in (D_f)^2$ tel que $x < y$, comme $\forall t \in]0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin(t) \leq 1$, on a $\sin^x(t) \geq \sin^y(t)$ donc, par croissance de l'intégrale, $f(x) \geq f(y)$. Ainsi, f est décroissante sur D_f ce qui entraîne, par positivité de f , que $f(x)f(x-1) \geq f(y)f(y-1)$ si $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $x < y$. La fonction $x \mapsto \frac{\Phi(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après la question **b.** et par une récurrence facile, Φ est constante sur les entiers naturels non nuls et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi(n) = \Phi(1) = f(0)f(1) = \frac{\pi}{2} \times [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$. De plus, soit $x > 1$, on a $[x] \leq x \leq [x] + 1$ par définition de la partie entière donc, avec la question **c.**, $\frac{\Phi([x] + 1)}{[x] + 1} \leq \frac{\Phi(x)}{x} \leq \frac{\Phi([x])}{[x]}$ qui devient, comme on a $[x] > 0$, $\frac{x}{[x] + 1} \times \frac{\pi}{2} \leq \Phi(x) \leq \frac{x}{[x]} \times \frac{\pi}{2}$. Or $1 \leq \frac{x}{[x]} \leq 1 + \frac{1}{[x]} = 1 + \frac{1}{x-1}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{[x]} = 1$ par encadrement. De même, il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{[x] + 1} = 1$ donc, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \frac{\pi}{2}$. Enfin, pour un réel $x > 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Phi(x+n) = \Phi(x)$ avec la question **b.** donc, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(x+n) = \frac{\pi}{2}$ par caractérisation séquentielle de la limite, $\Phi(x) = \frac{\pi}{2}$. La fonction Φ est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$ où elle vaut $\frac{\pi}{2}$.

d. Comme f est décroissante sur D_f , pour $x > 0$, on a $f(x+1) \leq f(x) \leq f(x-1)$ donc, comme $f(x) > 0$, on a l'encadrement $f(x+1)f(x) \leq f(x)^2 \leq f(x)f(x-1)$ et, avec la question précédente, $\frac{\pi}{2(x+1)} \leq f(x)^2 \leq \frac{\pi}{2x}$.

Comme $\frac{\pi}{2(x+1)} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2x}$ et que $f(x) > 0$, par encadrement, on a $f(x) \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

7.9 a. Soit $z \in \mathbb{C}$, posons $f_z : t \mapsto e^{-zt}$ pour tout l'exercice. Traitons quatre cas :

- Si $z = 0$, la fonction f_z est constante et vaut 1 donc f_z admet une limite finie $\ell = 1$ en $+\infty$.
- Si $\operatorname{Re}(z) > 0$, comme $|f_z(t)| = e^{-\operatorname{Re}(z)t}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f_z(t)| = 0$ donc f_z admet une limite finie $\ell = 0$ en $+\infty$.
- Si $\operatorname{Re}(z) < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f_z(t)| = +\infty$ car $|f_z(t)| = e^{-\operatorname{Re}(z)t}$ donc f_z n'admet pas de limite finie en $+\infty$.
- Si $\operatorname{Re}(z) = 0$ et $\operatorname{Im}(z) \neq 0$, supposons que f_z admet une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en $+\infty$, par caractérisation séquentielle de la limite, on aurait $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_z\left(\frac{n\pi}{|\operatorname{Im}(z)|}\right) = \ell$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\pi}{|\operatorname{Im}(z)|} = +\infty$, ce qui s'écrit aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\pm i n \pi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = \ell$, et c'est absurde.

Ainsi, $t \mapsto e^{-zt}$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$ ou $z = 0$.

b. Comme $|f_z(t)| = |e^{-\operatorname{Re}(z)t - i \operatorname{Im}(z)t}| = e^{-\operatorname{Re}(z)t}$, qu'on sait, pour $a \in \mathbb{R}$, que $\int_0^{+\infty} e^{at} dt$ converge si et seulement si $a < 0$ d'après le cours, et que f_z est continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f_z est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.

c. Soit $z \in \mathbb{C}$, la fonction $g_z : t \mapsto e^{-zt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Si $z = 0$, g_z est constante et vaut 1 donc $\int_0^{+\infty} g_0(t) dt = \int_0^{+\infty} 1 dt$ diverge.
- Si $z \neq 0$, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^x e^{-zt} dt = \left[-\frac{e^{-zt}}{z} \right]_0^x = \frac{1 - e^{-zx}}{z}$. Ainsi, avec la question **a.**, comme $\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_0^x e^{-zt} dt$ admet une limite finie en $+\infty$ par définition, $\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt$ converge si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.

d. Comme $h : t \mapsto e^{-z_0 t} f(t)$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration,

la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ car c'est la primitive de h qui s'annule en 0. Comme $\int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) dt$ converge par hypothèse, la fonction F admet une limite finie en $+\infty$ par définition. Comme F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et admet une limite finie $I = \int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) dt$ en $+\infty$, il est classique que F est bornée sur $\mathbb{R}_+$. En effet, en prenant $\varepsilon = 1$, il existe un réel $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geq A, |F(x) - I| \leq \varepsilon = 1$ ce qui montre que $|F(x)| = |F(x) - I| + |I| \leq |F(x) - I| + |I| \leq |I| + 1$. Comme F est continue sur le segment $[0; A]$, elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [0; A], |F(x)| \leq M$. Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}_+, |F(x)| \leq \max(|I| + 1, M)$ et F est bien bornée sur $\mathbb{R}_+$.

e. La fonction $a_z : t \mapsto e^{-(z-z_0)t} F(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|a_z(t)| = |e^{-(z-z_0)t}| |F(t)| \underset{+\infty}{=} O(|e^{-(z-z_0)t}|)$ d'après la question précédente donc, d'après la question **b.** et par comparaison car $\operatorname{Re}(z - z_0) > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |a_z(t)| dt$ converge donc a_z est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

f. Comme $z \neq z_0$, en posant $u : t \mapsto -\frac{e^{-(z-z_0)t}}{z - z_0}$ et $v = F$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ d'après **d.** et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ d'après **d.** car F est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(z-z_0)t} = 0$ puisque $\operatorname{Re}(z - z_0) > 0$. Par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-(z-z_0)t}}{z - z_0} \times (e^{-z_0 t} f(t)) dt$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$ ont même nature. Or $t \mapsto e^{-(z-z_0)t} F(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après **e.** et $\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$ converge. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{-e^{-(z-z_0)t}}{z - z_0} \times (e^{-z_0 t} f(t)) dt = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-zt} f(t)}{z - z_0} dt$ converge et on a la relation $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-zt} f(t)}{z - z_0} dt = 0 - \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$ car $F(0) = 0$. Ainsi, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$.

7.10 La fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$ est continue sur $[1; +\infty[$. De plus, $\operatorname{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^3)$

et, en intégrant ce développement limité, on a $\operatorname{Arcsin}(y) \underset{0}{=} y + \frac{y^3}{6} + o(y^4)$ car $\operatorname{Arcsin}(0) = 0$. Ainsi, on obtient $f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ce qui montre que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6x^3}$. Par comparaison aux intégrales de RIEMANN, on en déduit que la fonction f est intégrable sur $[1; +\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Méthode 1 : dans $I = \int_1^{+\infty} \left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right) dx$, on pose $u : x \mapsto x$ et $v = f$ qui sont de classe C^1 sur $]1; +\infty[$ et, comme $\lim_{x \rightarrow 1^+} u(x)v(x) = f(1) = \frac{\pi}{2} - 1$ par continuité de Arcsin en 1 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = 0$ car $xf(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6x^2}$,

on obtient la relation $I = 1 - \frac{\pi}{2} - \int_1^{+\infty} xf'(x) dx = 1 - \frac{\pi}{2} - \int_1^{+\infty} x \left(\frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \right) \right) dx$ ce qui se simplifie

en $I = 1 - \frac{\pi}{2} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) dx$. On pose ensuite $x = \frac{1}{\sin(u)} = \varphi(u)$ avec φ bijection strictement décroissante de classe C^1 de $]0; \frac{\pi}{2}[$ dans $]1; +\infty[$ et $I = 1 - \frac{\pi}{2} - \int_{\pi/2}^0 \sin(u) \left(\frac{\cos(u) - 1}{\cos(u)} \right) \left(-\frac{\cos(u)}{\sin^2(u)} \right) du$.

Ainsi, $I = 1 - \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(u)}{\sin(u)} du = 1 - \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin^2(u/2)}{2 \sin(u/2) \cos(u/2)} du = 1 - \frac{\pi}{2} + \left[-2 \ln(\cos(u/2)) \right]_0^{\pi/2}$

et enfin $I = 1 + \ln(2) - \frac{\pi}{2} \sim 0, 12$.

Méthode 2 : dans $I = \int_1^{+\infty} \left(\operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right) dx$, on pose $\theta = \operatorname{Arcsin}(1/x)$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{\sin(\theta)} = \varphi(\theta)$ avec φ qui est une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $]0; \frac{\pi}{2}]$ dans $[1; +\infty[$. Par changement de variable, il vient $I = \int_{\pi/2}^0 (\theta - \sin(\theta)) \left(-\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) d\theta$. Les deux fonctions $a : \theta \mapsto \frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2}$ et $b : \theta \mapsto \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ ne sont pas intégrables en 0^+ car $a(\theta) \sim b(\theta) \sim \frac{1}{\theta}$. Par contre, on peut écrire $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} d\theta - \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta \right)$ car, pour $\varepsilon \in]0; \frac{\pi}{2}]$, les deux fonctions a et b sont continues sur le segment $[\varepsilon; \frac{\pi}{2}]$. Or $\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta = [\ln(\sin(\theta))]_{\varepsilon}^{\pi/2} = -\ln(\sin(\varepsilon))$ et, en posant les fonctions $u : \theta \mapsto \theta$ et $v : \theta \mapsto -\frac{1}{\sin(\theta)}$ qui sont de classe C^1 sur $[\varepsilon; \frac{\pi}{2}]$, par intégration par parties, $\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} d\theta = \left[-\frac{\theta}{\sin(\theta)} \right]_{\varepsilon}^{\pi/2} + \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(\theta)} d\theta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{\sin(\varepsilon)} + \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right]_{\varepsilon}^{\pi/2}$ ce qui donne $\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} d\theta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{\sin(\varepsilon)} - \ln \left(\tan \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \right)$. Alors, en regroupant les termes, on parvient à $\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} d\theta - \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{\sin(\varepsilon)} - \ln \left(\frac{\tan(\varepsilon/2)}{\sin(\varepsilon)} \right)$. Comme $\sin(\varepsilon) \sim \varepsilon$ et $\tan \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \sim \frac{\varepsilon}{2}$, en passant à la limite quand ε tend vers 0^+ , on a $I = 1 + \ln(2) - \frac{\pi}{2} \sim 0,12$.

7.11 Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, f' est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0 . En prenant $\varepsilon = q > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]-\eta, \eta[, |f'(x) - f'(0)| < \varepsilon = q \implies f'(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $]-\eta; \eta[$. Posons $m = \min(-f(-\eta), f(\eta)) > 0$. Si, par exemple, $m = f(\eta)$ (l'autre cas est similaire), par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel qu'on note $-\alpha \in [-\eta; 0[$ (avec $0 < \alpha < \eta$) tel que $f(-\alpha) = -m$ car f réalise une bijection entre $[-\eta; 0]$ et $[f(-\eta); 0]$ qui contient $-m$ (faire un dessin).

En posant $\beta = \eta > 0$, on a donc $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $m > 0$ tels que f réalise une bijection strictement croissante entre $]-\alpha; \beta[$ et $]-m; m[$. Notons encore f cette restriction de la fonction initiale et posons $\psi = f^{-1} \circ (-f)$. On le peut car $-f$ réalise une bijection strictement décroissante de $]-\alpha; \beta[$ dans $]-m; -(-m)[=]-m; m[$ et que f^{-1} réalise une bijection strictement croissante de $]-m; m[$ dans $]-\alpha; \beta[$. Par conséquent, par composition, ψ réalise une bijection strictement décroissante de $]-\alpha; \beta[$ dans $]-\alpha; \beta[$ et on a $\forall x \in]-\alpha; \beta[, \psi(x) = f^{-1} \circ (-f(x))$ donc $f(\psi(x)) = -f(x)$ et on a bien $f(x) = -f(\psi(x))$.

b. Comme $\forall x \in]-\alpha; \beta[, f'(x) > 0$, la fonction bijective $f^{-1} :]-\alpha; \beta[\rightarrow]-\alpha; \beta[$ est aussi de classe C^1 et ψ est donc de classe C^1 par composition. De plus, $\forall x \in]-\alpha; \beta[, \psi'(x) = -f'(x) \times \frac{1}{f'(f^{-1}(-f(x)))}$.

Enfin, ψ est involutive car $\forall x \in]-\alpha; \beta[, \psi^2(x) = f^{-1} \circ (-f(f^{-1} \circ (-f(x)))) = f^{-1} \circ (-(-f(x))) = f^{-1}(f(x)) = x$.

7.12 a. La fonction $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $g(t) \underset{+\infty}{\sim} 0(e^{-t})$ et l'intégrale de référence $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge. Ainsi, par comparaison, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge pour tout $x > 0$ ce qui montre que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par CHASLES, $\forall x > 0$, $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$. En posant $G : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$, la fonction G est la primitive de g qui s'annule en 1 par le théorème fondamental de l'intégration car g est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, comme $f = G(1) - G$,

par opérations, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = -G'(x) = -g(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$.

b. Méthode 1 : pour $x > 0$, comme $\forall t \geq x$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$ donc $\frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{x}$ car $e^{-t} > 0$, par croissance de l'intégrale, on a $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt = \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{x} [-e^{-t}]_x^{+\infty} = \frac{e^{-x}}{x}$.

Méthode 2 : soit $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{e^{-x}}{x} - f(x)$. D'après **a.**, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + \frac{e^{-x}}{x} = -\frac{e^{-x}}{x^2} < 0$ donc g est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ en tant que reste d'une intégrale convergente, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ donc g reste positive sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui montre que $\forall x > 0$, $f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.

c. Pour $x > 0$, on pose $u : t \mapsto e^{-t}$ et $v : t \mapsto \ln(t)$. Comme les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[x; +\infty[$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on obtient, par intégration par parties, la relation $f(x) = \int_x^{+\infty} u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} u'(t)v(t) dt = -e^{-x} \ln(x) + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.

d. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après **b.**, $f(x) = o(e^{-x})$ donc, comme en **a.**, f est intégrable en $+\infty$. Soit $h : t \mapsto e^{-t} \ln(t)$, la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h(t) = o(e^{-t/2})$ par croissances comparées donc h est intégrable en $+\infty$. De plus, $h(t) \sim_0 \ln(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et l'intégrale de RIEMANN $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge donc, par comparaison, h est intégrable en 0^+ . Par conséquent, h est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, $\forall x > 0$, $\left| \int_x^{+\infty} h(t) dt \right| \leq \int_x^{+\infty} |h(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} |h(t)| dt$ ce qui montre que $x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit avec **c.** que $f(x) = -e^{-x} \ln(x) + O(1) = -e^{-x} \ln(x) + o(e^{-x} \ln(x))$ qui s'écrit aussi $f(x) \sim_0 -e^{-x} \ln(x) \sim_0 -\ln(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et f est donc intégrable en 0^+ . Ainsi, $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v = f$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)v(x) = 0$ car $u(x)v(x) = xf(x) \sim_0 x \ln(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ par croissances comparées et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = 0$ car $0 \leq u(x)v(x) = xf(x) \leq e^{-x}$ avec la question **b.** et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ (encadrement). Ainsi, par intégration par parties, on obtient la valeur

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(x)v'(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1.$$

Avec FUBINI (HP), $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t \frac{e^{-t}}{t} dx \right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$