TD 07 : INTÉGRATION

PSI 1 2025-2026 **vendredi 17 octobre 2025**

7.1 *E3A PSI 2015* Charlotte Sapaly Calcul de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(x)}\,dx$. Indication : poser $\tan(x) = u^2$.

7.2 *CCP PSI 2017* Maxime Lacourcelle II Soit E l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et 2π-périodiques.

On pose $c(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt$ et $g : t \mapsto f(t) - c(f)$ si $f \in E$.

a. Étudier la convergence, pour $\alpha > 1$ et $f \in E$, de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}dt$.

b. Si $f \in E$, montrer que f a ses primitives 2π-périodiques si et seulement si $c(f) = 0$.

c. Si $f \in E$, est-ce que $g \in E$? Calculer $c(g)$.

d. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}dt$.

e. Trouver, si $c(f) \neq 0$, un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\int_1^{x} \frac{f(t)}{t}dt$.

f. Déduire des questions précédentes la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}dt$.

7.3 *Mines PSI 2019* Tanguy Sommet II Soit $y \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que y^2 et y''^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

a. Trouver une primitive de $y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2$.

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} yy''$ converge. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} y'^2$ converge.

c. Établir que $\displaystyle\int_0^{+\infty} yy'$ converge. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

d. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0$.

e. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} y'^2 \leqslant \int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2$.

f. Quelles sont les fonctions pour lesquelles $\displaystyle\int_0^{+\infty} y'^2 = \int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2$.

7.4 *Centrale Maths1 PSI 2021* Clotilde Cantini

On admet la convergence $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$, on note I sa valeur. On définit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt$.

a. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = \mathrm{I}$ et calculer la limite de f en $+\infty$.

c. Montrer que $\mathrm{I} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u + k\pi}du$. En déduire que f n'est pas continue en 0.

7.5 *Mines PSI 2022* Anatole Rousset I Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

a. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta}t^n}{1 - e^{i\theta}t}dt$.

b. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge et montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t}dt$.

c. Établir $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t + i\sin(\theta)}{t^2 - 2t\cos(\theta) + 1}dt = -\frac{1}{2}\ln\big(2 - 2\cos(\theta)\big) + i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$.

d. En déduire que si $\theta \in]0;\pi[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$.

7.6 *Mines PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche II Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(1-i)t} t^n \mathrm{d}t$.

b. Trouver la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^{1/4}} \sin(t^{1/4}) t^n \mathrm{d}t$.

7.7 *Centrale Maths1 PSI 2024* Jules Campistron

Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ x^\alpha f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}$. Pour $f \in E$, on définit $(E_f)\ :\ y' - y + f(x) = 0$.

a. Montrer que E est un espace vectoriel.

b. Montrer que la fonction $g : x \mapsto e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) \mathrm{d}t$ est l'unique solution de (E_f) appartenant à E.

7.8 *Centrale Maths1 PSI 2024* Mathis Laruelle Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^x(t) \mathrm{d}t$ et $\Phi(x) = x f(x) f(x-1)$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Phi(x+1) = \Phi(x)$.

c. Montrer que $x \mapsto \dfrac{\Phi(x)}{x}$ est décroissante. En déduire que Φ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

7.9 *Centrale Maths1 PSI 2024* Arya Tabrizi

a. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $t \mapsto e^{-zt}$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) > 0$ ou $z = 0$.

b. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) > 0$.

c. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt} \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Soit $(z, z_0) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Re}(z_0)$, une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) \mathrm{d}t$ converge. On définit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-z_0 t} f(t) \mathrm{d}t$.

d. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle y est bornée.

e. Montrer que $t \mapsto e^{-(z-z_0)t} F(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

f. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) \mathrm{d}t$ converge et qu'on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) \mathrm{d}t = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) \mathrm{d}t$.

7.10 *Mines PSI 2024* Armand Dépée II

Montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ et calculer sa valeur.

7.11 *X PSI 2024* Jules Campistron II Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = q > 0$.

a. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\psi :]-\alpha; \beta[\to]-\alpha; \beta[$ tels que $\forall x \in]-\alpha; \beta[,\ f(x) = -f(\psi(x))$.

b. Montrer que ψ est de classe C^1.

7.12 *Mines PSI 2016 (3) et CCINP PSI 2024* Pauline Bourda, Marie Rebière, Séb. Sequeira, Yasmine Azzaoui I

a. Montrer que f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f'(x)$.

b. Montrer que $\forall x > 0,\ f(x) \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x}$.

c. Montrer que $\forall x > 0,\ f(x) = -e^{-x} \ln(x) + \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} \ln(t) \mathrm{d}t$.

d. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$.