

ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 3

INTÉGRALES

3.1 Intégrales sur un segment et développements limités

- 3.1** Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall x \in [a; b], f(a + b - x) = f(x)$.
Calculer $\int_a^b x f(x) dx$ en fonction de $\int_a^b f(x) dx$. Application : calculer $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.
- 3.2** Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$
- 3.3** Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos \alpha \cos x + 1} dx$ pour $\alpha \in [0; \pi[$.
- 3.4** On pose, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2, J(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$.
a. Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, trouver une relation entre $J(p, q)$ et $J(q, p)$, puis entre $J(p+1, q)$ et $J(p, q+1)$.
b. Calculer $J(p, 0)$ pour $p \in \mathbb{N}$; en déduire, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2, J(p, q)$.
- 3.5** Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive telle que : $\exists k \geq 0, \forall t > 0, f(t) \leq k \int_0^t f(u) du$. On pose, pour $t \geq 0$, $F(t) = \int_0^t f(u) du$; montrer que $t \rightarrow e^{-kt} F(t)$ est décroissante. Que peut-on en déduire sur F ? Et sur f ?
- 3.6** CCP PSI 2007 d'après RMS Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$.
- 3.7** Mines PSI 2011 d'après RMS Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq p \leq n$.
En écrivant de deux façons le $DL_n(0) \ x \mapsto (e^x - 1)^n$ en 0, montrer $\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \delta_{p,n} n!$.
- 3.8** ENSIIE PSI 2008 d'après RMS Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dérivable, strictement croissante et telle que $f(0) = 0$.
a. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^+, x f(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt$.
b. En déduire : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, xy \leq \int_0^x f(t) dt + \int_0^y f^{-1}(t) dt$. Cas d'égalité ?
- 3.9** CCP PSI 2008 d'après RMS
a. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}}$.
b. Donner un équivalent en $+\infty$ de $\int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}}$ puis de $\int_n^{2n} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}}$.
- 3.10** Existence de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$ et équivalent de $\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$ quand x tend vers $+\infty$.
- 3.11** Compléments OdIT 2016/2017 Centrale PSI planche 208
Montrer que si $\alpha > 1$, la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+k)^\alpha}$, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$, converge vers 0.
Discuter de la limite de la suite suivant α quelconque.

3.12 Compléments OdIT 2016/2017 EIVP PSI planche 528I *abordable dès la 1^{re} année*

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [n; +\infty[, g_n(x) = \int_n^x e^{t^2} dt$. Montrer que $\forall n \geq 1, \exists! x_n > n, g_n(x_n) = 1$.

Montrer que $n \leq x_n \leq n+1$ puis que $0 \leq x_n - n \leq e^{-n^2}$; qu'en déduit-on ?

3.13 Compléments OdIT 2016/2017 EIVP PSI planche 533II

Pour $n > 0$, on pose $I_n = \int_1^e \ln^n(t) dt$ et $a_n = (-1)^n (n!) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} . Déterminer b_n tel que $I_n = ea_n + b_n$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

3.2 Fonctions intégrables

3.14 Étudier l'existence de $I_{\alpha, \beta} = \int_0^1 \frac{|\ln(t)|^\beta dt}{(t-t^2)^\alpha}$ selon les valeurs de α et β .

3.15 Étudier selon les valeurs de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'intégrabilité sur $[1; +\infty[$ de la fonction $f_{x,y} : t \mapsto \frac{\ln(1+t^x e^{-ty})}{1+t^x}$.

3.16 Mines PSI 2008 d'après RMS Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Existence et calcul de $\int_a^b \ln\left(\frac{b-t}{t-a}\right) dt$.

3.17 Mines PSI 2008 d'après RMS Donner le domaine de définition, puis calculer : $p \in \mathbb{R} \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^{2p+1}+1}}$.

3.18 Étudier l'existence de $I_{\alpha, \beta} = \int_0^1 |1-t^\alpha|^\beta dt$ selon les valeurs de α et β .

3.19 Étudier l'existence de $I_{\alpha, \beta} = \int_0^1 \frac{|\ln(t)|^\beta dt}{(t-t^2)^\alpha}$ selon les valeurs de α et β .

3.20 Centrale PSI 2012 Étudier l'existence de $I_{\alpha, \beta} = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha) dt}{t^\beta}$ selon les valeurs de α et β .

3.21 CCP PSI 2008 d'après RMS Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'application $x \mapsto \frac{1-\tanh x}{x^\alpha}$ est-elle intégrable sur $]0; +\infty[$?

3.22 Existence et calcul de $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{t \ln(t)}{(1+t^2)^2} dt$ et de $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{t \ln(t)}{(1+t^2)^2} dt$.

3.23 Existence et calcul de $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$ et de $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$.

3.24 Centrale PSI 2012 Existence et calcul de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \ln(\tan(\theta)) d\theta$

3.25 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable. On pose, pour $x \in \mathbb{R}, \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt$.

a. Justifier que $\widehat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $\widehat{h}$ si $h : t \rightarrow e^{-|t|}$.

b. Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sont intégrables et bornées, justifier l'existence, pour $x \in \mathbb{R}$ de $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt$ (produit de convolution). Calculer $(h * h)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

c. On admet pouvoir intervertir à loisir les 2 variables d'intégration..., "établir" : $\widehat{(f * g)}(x) = \widehat{f}(x) \times \widehat{g}(x)$.

3.26 Établir que $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^3+1}$. En déduire la valeur exacte de I .

3.27 Existence et calcul de $\int_{]0;1]} \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \right) dt$.

3.28 Compléments OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 101II

Existence de $I_\alpha = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \tan^\alpha(t)}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ (on pourra faire deux changements de variable).
Commenter le choix de α .

3.29 Compléments OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 102I

Soit f de classe C^∞ de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f \geq 0 \iff \forall g \in C^\infty([a; b], \mathbb{R}_+)$, $\int_a^b fg \geq 0$.
En déduire que $f > 0 \iff \exists m \in \mathbb{R}_+^*, \forall g \in C^\infty([a; b], \mathbb{R}_+^*)$, $\int_a^b fg > m \int_a^b g$.

3.30 Compléments OdIT 2016/2017 ENSAM PSI planche 521II et compléments Mines-Télécom PSI 550II

Existence et calcul de $I = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$.

3.31 Compléments OdIT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 566II abordable dès la 1^{re} année incomplet

Montrer que $I = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$ puis la calculer.

3.32 Classique a. Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$.

b. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$. Séparez cette intégrale en deux pour trouver I .

3.33 Étudier l'existence de $I_{\alpha, \beta} = \int_0^1 |1 - t^\alpha|^\beta dt$ selon les valeurs des réels α et β .

3.34 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \ln(t) + a \ln(t+1) + c \ln(t+2)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que $\int_0^{+\infty} f$ converge et calculer alors la valeur exacte de cette intégrale.

3.35 Centrale PSI 2013 Déterminer un équivalent de $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k) + \cos^2(n)}$ ($n \geq 2$) quand $n \rightarrow +\infty$.

3.3 Intégrales impropres convergentes

3.36 Centrale PSI 2013 Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n^a} \int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt$ quand elle existe.

- a. Déterminer les réels b tels que u_n existe pour tout entier $n \geq 1$.
b. Dans les cas précédents, déterminer la nature de la série numérique $\sum_{n \geq 1} u_n$.

3.37 Intégrale de DIRICHLET Soit $\varphi : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in]0; \pi]$, $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin(x/2)}$ et $\varphi(0) = 0$.

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ et $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ pour $x > 0$.

- a. Montrer que φ est de classe C^1 sur $[0; \pi]$.
b. Justifier que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. On note I sa valeur.
c. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est constante si $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin(\frac{x}{2})} dx$.
d. Trouver une relation entre $F((n + \frac{1}{2})\pi)$, φ et I_n .
e. En se rappelant le lemme de LEBESGUE, déterminer la valeur exacte de I .

3.38 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\sin^3 t}{t^2}$. On pose $I(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$.

- Justifier l'existence $\int_0^{+\infty} f(t) dt$. On note I sa valeur.
- Exprimer $\sin^3 t$ en fonction de $\sin t$ et $\sin(3t)$.
- Montrer que $I(x) = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$.
- Justifier que $\psi : t \mapsto \frac{\sin t}{t^2} - \frac{1}{t}$ est bornée au voisinage de 0. En déduire la valeur exacte de I .

3.39 *Intégrales de GAUSS* Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ et $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^n d\theta$ pour $n \geq 0$.

- Justifier que f est bien définie, de classe C^∞ , strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle admet une limite finie en $+\infty$ qu'on note I et qu'on appelle intégrale de GAUSS.
- Établir que $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$. Puis que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0; \sqrt{n}]$, : $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}$.
- Prouver : $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} I_{2n+1}$ à l'aide du changement de variable à justifier $t = \sqrt{n} \cos(\theta)$.
- À l'aide d'un changement de variable à trouver et à justifier, prouver que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} dt = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \sin^{2n}(\theta) \times \left(\frac{-\sqrt{n}}{\sin^2(\theta)}\right) d\theta \leq \sqrt{n} I_{2n-2}.$$

- Déduire de ce qui précède et de l'équivalent classique des intégrales de WALLIS la valeur exacte de I .

3.40 *Centrale PSI 2013*

Soit $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, décroissante et telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.

- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$. En déduire l'existence de $\int_1^{+\infty} x(f(x) - f(x+1)) dx$ et calculer sa valeur.
- Déterminer, pour $\alpha > 1$, la valeur de $\int_1^{+\infty} x \left(\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{(x+1)^\alpha} \right) dx$.

3.41 Montrer l'existence de $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} dx$ et déterminer sa valeur exacte par les changements de variable $x = \sin(\theta)$ puis $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et enfin par IPP.

3.4 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

3.42 *Mines PSI 2013* Jordan Diby I

Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un unique réel y tel que $\int_x^y e^{t^2} dt = 1$.

On pose alors $y = f(x)$ ce qui définit f . Étudier f .

3.43 *Centrale PSI 2013* Mathieu Brandy

Soit $F : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = \int_0^{1/x} \frac{dt}{x + \sin^2(t)}$.

- Montrer que F est bien définie, étudier sa monotonie.
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$. Puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
- Donner un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers 0.

Indication : on pourra utiliser le changement de variable $u = \tan(t)$ sur des intervalles convenables.

3.44 Centrale PSI 2014 et CCP PSI 2014 Tanguy Cazalets et Nicolas Bourbon

Pour $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, de carré intégrable, on définit $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

a. g est-elle prolongeable en 0 ? Soit $0 < a < b$, établir une relation entre $\int_a^b g(t)^2 dt$ et $\int_a^b f(t)g(t) dt$.

b. Établir dans un premier temps que $\int_a^b g(t)^2 dt \leq ag(a)^2 + 2\sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt}$ puis en déduire ensuite la nouvelle majoration : $\sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt} \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt} + \sqrt{ag(a)^2 + \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt}$.

c. Montrer que g^2 et fg sont intégrables. Trouver une inégalité entre $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$.

Déterminer aussi une relation simple entre $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt$.

3.45 Centrale PSI 2015 Agatha Courtenay

Soit $a \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit f une solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation (E) : $y'' + (1+a)y = 0$. Posons $g : x \mapsto f(x) + \int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t) dt$.

a. Est-ce que $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = 0$?

b. Montrer que $g'' + g = 0$.

c. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq C + \int_0^x |a(t)f(t)| dt$.

d. Conclure quant aux solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

3.46 Centrale PSI 2015 Marie Trarieux

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} dt$ et $J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}} dt$.

a. Quelles sont les valeurs de α telles que $I(\alpha)$ converge ? Et pour $J(\alpha)$?

b. Calculer $J(\alpha)$. Donner un équivalent en l'infini pour $I(\alpha)$.

3.47 CCP PSI 2015 Marin de Bonnières

Soit $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si $f \in E$, soit $u(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, u(f)(x) = \int_0^x \cos(x-t)f(t) dt$.

a. Montrer que u est un endomorphisme de E .

b. u est-elle surjective ?

c. Étudier le noyau de u .

3.48 CCP PSI 2015 Arthur Lacombe

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall t \geq 0, |f(t)| \leq Ce^{at}$.

a. Montrer que : $\forall x > a, F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ converge.

b. On suppose ici que $a \leq 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} xF(x) = 1$.

3.49 E3A PSI 2015 Charlotte Sapaly

Existence et calcul de $I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(x)} dx$. Indication : poser $\tan(x) = u^2$.

3.50 ENS Cachan PSI 2016 Charly Castes

Soit $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante continue par morceaux telle que $\int_0^{+\infty} h(t) dt$ converge.

- a. Montrer que h est à valeurs positives.
- b. Montrer que $\sum_{n \geq 0} h(nt)$ converge pour tout réel $t > 0$.

3.51 Centrale PSI 2016 Émilien Ouzeri

Étudier la convergence simple et absolue de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t \ln(1+t)} dt$.

3.52 Centrale PSI 2016 Marine Saint-Mézard

Soit a et b des réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe C^1 sur $[a; b]$.

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$.

- a. Montrer que cette suite tend vers 0.
- b. Montrer l'existence de $A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. On admettra que cette intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$.
- c. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)^2}{\sin(t)^2} dt$.

Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calcul de son éventuelle limite.

3.53 Mines PSI 2016 Owain Biddulph III

Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} \left(\frac{1 - \sin(x)}{1 + \sin(x)} \right)$.

- a. Domaine de définition de f .
- b. Donner une expression simplifiée de f .

3.54 Mines PSI 2016 Pauline Bourda, Marie Rebière et Sébastien Sequeira I

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

- a. Montrer que f est bien définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}_+^*$. Donner l'expression de $f'(x)$.
- b. Donner des équivalents simples de $f(x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$.
- c. Montrer que f est intégrable sur I et calculer $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

3.55 Mines PSI 2016 Matthieu Cadiot I

Montrer que l'équation (E) : $y' - y = \frac{1}{x}$ admet une unique solution bornée sur $[1; +\infty[$.

3.56 Mines PSI 2016 Arthur Robbe I

Soit $p \in \mathbb{R}_+$, montrer que : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, |x^p - y^p| \leq |x - y|^p) \iff p \leq 1$.

3.57 CCP PSI 2016 Rogelio Escalona I

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(1) = 0$. Montrer que $\int_0^1 f(t)^2 dt \leq 4 \int_0^1 t^2 f'(t)^2 dt$.

3.58 Centrale PSI 2017 Élio Garnaoui

Soit $h > 0$, on définit l'ensemble $W_h = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \int_{x+h}^{x+2h} f(t) dt = 2 \int_x^{x+h} f(t) dt \right\}$.

a. Montrer que W_h est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$.

a. W_h est-il de dimension finie ?

c. Montrer que $\bigcap_{h>0} W_h = \{0\}$.

Question de cours : inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, preuve et cas d'égalité.

3.59 Mines PSI 2017 Manon Bové I

Résoudre l'équation (E) : $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1-x}\right) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

3.60 Mines PSI 2017 Adrien Cassagne I

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th}(2x)}{x} dx$.

3.61 Mines PSI 2017 Alexandre Chamley II

On définit f par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$. Justifier que f se prolonge par continuité en 0 et en 1.

Tracer le graphe de f . Montrer l'existence et trouver la valeur de $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx$.

3.62 Mines PSI 2017 Bastien Lamagnère II

Soit $\alpha > 1$ et $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x) = \frac{(\ln(x))^\alpha}{x} e^{i \ln(x)}$.

a. Que dire de la convergence de $\int_1^{+\infty} f(t) dt$?

b. Que dire de la nature de $\sum_{n \geq 1} f(n)$?

3.63 Mines PSI 2017 Clément Maurel II

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Montrer que $\int_0^x t f(t) dt \underset{+\infty}{=} o(x)$.

3.64 Mines PSI 2017 Grégoire Verdès II

Soit $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x^3 + t^3}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f .

b. Trouver la limite, puis un équivalent de f en $+\infty$.

c. Trouver la limite, puis un équivalent de f en -1 .

3.65 CCP PSI 2017 Maxime Lacourcelle II

Soit E l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et 2π -périodiques.

On pose $c(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$ et $g : t \mapsto f(t) - c(f)$ si $f \in E$.

- Étudier la convergence, pour $\alpha > 1$ et $f \in E$, de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$.
- Si $f \in E$, montrer que f a ses primitives 2π -périodiques si et seulement si $c(f) = 0$.
- Si $f \in E$, est-ce que $g \in E$? Calculer $c(g)$.
- Montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t} dt$.
- Trouver, si $c(f) \neq 0$, un équivalent en $+\infty$ de $\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$.
- Déduire des questions précédentes la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$.

3.66 E3A PSI 2017 Élio Garnaoui

Pour tout entier n , on note $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$.

- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
- Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
- Trouver une relation entre u_n et u_{n+1} .
- Montrer que $(n+1)u_n \leq 2 \ln^{n+1}(2) \leq (n+2)u_n$.
- Trouver un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.
- Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{\ln^n(2)}$.

3.67 ENS Ulm/Cachan PSI 2018 Cassandra Dailedouze

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall t \in \mathbb{R}, tf'(t) = f(t) - f(t-1)$.

- Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et que $\forall t \geq 1, f(t) = t \left[f(1) - \int_1^t s^{-2} f(s-1) ds \right]$.

On suppose dorénavant que $\int_1^{+\infty} u^{-2} f(u-1) du$ converge.

- Montrer que $f(t) = t \int_t^{+\infty} s^{-2} f(s-1) ds$.
- Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t)$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^k f'(t) = 0$.
- Montrer que f possède une limite ℓ en $+\infty$ et que $\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{t \rightarrow +\infty} t^k (f(t) - \ell) = 0$.

3.68 Mines PSI 2018 Colin Baumgard et Marion Lebrun I

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

- Montrer que f est bien définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}_+^*$. Donner l'expression de $f'(x)$.
- Donner des équivalents simples de $f(x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$.
- Montrer que f est intégrable sur I et calculer $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

3.69 Mines PSI 2018 Victor Bourdeaud'hui II

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(n!)^{1/n}}$.

3.70 Mines PSI 2018 Maëlle Casas I

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in [0; 1], f(x) > 0$.

a. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une subdivision $\sigma_n = (x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1)$ telle que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt = \frac{A}{n}$ avec $A = \int_0^1 f$.

b. Soit $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(x_k)$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\int_0^1 fg}{\int_0^1 f}$.

3.71 Mines PSI 2018 Mathilde Dutreuilh I

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx)$.

a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

b. Montrer que $\forall \varphi \in C^1([0; \pi], \mathbb{R})$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.

c. Écrire $\int_0^\pi x D_{2n}(x) dx$ sous la forme d'une somme et en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

3.72 Mines PSI 2018 Adrien Sarrade I

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n} \left(\prod_{k=1}^n (k+n) \right)^{\frac{1}{n}}$.

a. Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite ℓ .

b. Trouver un équivalent de $u_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

3.73 Mines PSI 2018 Nicolas Ziegler II

On définit, pour tout $x > 0$, le réel $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

a. Montrer que F est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que $\int_0^{+\infty} F(x) dx$ converge et déterminer sa valeur.

3.74 CCP PSI 2018 Mathilde Dutreuilh I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a. Déterminer un équivalent simple de S_n quand n tend vers $+\infty$.

b. Proposer une autre méthode pour trouver cet équivalent.

3.75 CCP PSI 2018 Adrien Sarrade II

On définit le réel $\alpha = \ln(1 + \sqrt{2})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $I_n = \int_0^\alpha (\operatorname{sh} t)^n dt$.

- a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{sh}(x) = 1$.
- b. Trouver la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.
- c. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.
- d. Montrer que $\forall n \geq 2, nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.
- e. En déduire un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

3.76 E3A PSI 2018 Peio Betbeder

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$.

- a. Calculer I_0 et I_1 . Étudier le sens de variation de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{n}{3} \int_0^1 x^{n-1} (1-x^2)^{3/2} dx$. En déduire une relation entre I_{n+1} et I_{n-1} .
- c. Montrer que $\forall n \geq 1, 0 < \frac{n}{n+3} I_{n-1} < I_n < I_{n-1}$. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n-1}$.

On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $u_n = n(n+1)(n+2)I_n I_{n-1}$.

- d. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

3.77 E3A PSI 2018 Julien Langlais

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, on définit $f[0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

- a. Justifier que f est un polynôme. Donner son coefficient dominant et son degré.
- b. Étudier f sur $[0; 1]$. Trouver une symétrie de son graphe pour $n = 2k$.
- c. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \in]0; 1[$ et n tend vers $+\infty$. Et si k tend vers $+\infty$?
- d. Calculer $I_{n,k} = \int_0^1 f(x) dx$.

3.78 Petites Mines PSI 2018 Baptiste Egretau I

Existence et signe de $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2 - \pi t} dt$.

3.79 ICNA PSI 2018 Quentin Meynieu I

Soit F définie par $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} dt$.

- a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_F$ de F .
- b. Calculer $F(1)$. Indication : on pourra poser $u = \frac{1}{t}$.
- c. En déduire la valeur de $F(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_F$.

3.80 Centrale Maths1 PSI 2019 Carla Chevillard

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} dt$.

- a. Montrer que J_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer J_0, J_1, J_2, J_3 .
- b. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $J_{n+2} - J_n$ en fonction de n . En déduire une expression de J_n .
- c. Soit $f \in C^1([a; b], \mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(xt) dt = 0$.
- d. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_{n+1} - J_n)$. En déduire la nature de la suite $(J_n)_{n \geq 0}$.

3.81 Centrale Maths1 PSI 2019 Pierre Fabre

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$.

- Déterminer des équivalents de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ en $+\infty$. Montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- Montrer que u_n existe pour tout entier $n \geq 1$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation entre u_n et u_{n+1} .
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $v_n = \alpha \ln(n) + \ln(u_n)$ pour $n \geq 1$. Déterminer la valeur de α pour que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ . Donner un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

3.82 Mines PSI 2019 Axel Brulavoine I

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \frac{1}{n^a} \int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt$.

- Si $b > 0$ et $b \neq 1$, à quelles conditions sur a et b est-ce que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge ?
- Si $b \leq 0$, à quelles conditions sur a et b est-ce que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge ?
- Si $b = 1$, à quelle condition sur a est-ce que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge ?

3.83 Mines PSI 2019 Tanguy Sommet II

Soit $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose que y^2 et y''^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

- Trouver une primitive de $y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2$.
- Montrer que $\int_0^{+\infty} yy''$ converge. En déduire que $\int_0^{+\infty} y'^2$ converge.
- Établir que $\int_0^{+\infty} yy'$ converge. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$.
- Montrer que $\int_0^{+\infty} y'^2 \leq \int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2$.
- Quelles sont les fonctions pour lesquelles $\int_0^{+\infty} y'^2 = \int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2$.

Questions de cours :

- démonstration de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ pour les intégrales.
- exemple de fonction continue, intégrable et positive sur $\mathbb{R}_+$ qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

3.84 CCP PSI 2019 Elaia Mugica I

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, une fonction continue $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\forall x \in [a; b], f(x) = f(a + b - x)$.

- Montrer que $\int_a^b tf(t)dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t)dt$.
- En déduire la valeur exacte de $\int_0^\pi \frac{t \sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt$.

3.85 Petites Mines PSI 2019 Thibault Maury I

a. Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x^3)^{1/3}}$.

b. On admet que $I = \int_0^1 \frac{du}{u^2 - u + 1}$. Calculer une valeur exacte de I .

3.86 ICNA PSI 2019 Léa Deveyneix I

- a. Pour quels réels a et b l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}) dt$ converge ?
- b. Si cette condition est réalisée, calculer $I = \int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}) dt$.

3.87 X PSI 2020 Victor Barberteguy I

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient les conditions suivantes :

- $f(0) = 0$,
- f' croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$,
- $\forall x \geq 0, \int_0^x f'(t)^2 dt \geq f(x + f(x)) - f(x)$.

3.88 X PSI 2021 Antoine Greil I

Soit une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, de classe C^1 et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ telle que f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

3.89 ENS Cachan PSI 2021 Baptiste Pozzobon I

Déterminer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha dt}{1+t}$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.90 Centrale Maths1 PSI 2021 Clotilde Cantini

On admet la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. On note I sa valeur.

On définit, en cas de convergence, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt$.

- a. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = I$ et calculer la limite de f en $+\infty$.
- c. Montrer que $I = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + k\pi} du$.
- d. En déduire que f n'est pas continue en 0.

3.91 Mines PSI 2021 Aloïs Doucet II

- a. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t} dt$ converge.
- Soit $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique.
- b. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge.

3.92 Mines PSI 2021 Esteban Poupinet I

- a. Montrer que la fonction $\cos$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.
- b. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.
- c. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$.

3.93 *Mines PSI 2021* Adèle Robert I

On pose $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{\omega x} dx$.

a. Calculer I_n . En déduire une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ non nulle telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} g(t)t^n dt = 0$.

b. Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue (avec $a < b$ réels) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f(t)t^n dt = 0$.

Montrer que $f = 0$. Indication : on admet que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathbb{C}[X]$, $\forall t \in [a; b]$, $|f(t) - P(t)| \leq \varepsilon$.

3.94 *Mines PSI 2021* Arthur Sureau II

Soit $m \in \mathbb{R}_+$, calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + m \sin^2(t)}$ en posant $u = \tan(t)$.

3.95 *Centrale Maths1 PSI 2022* Jade Mirassou

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x \sqrt{t(1+t)}}$.

a. Montrer que le domaine de définition de f est $I =]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$.

b. Montrer que f est paire.

On admet que f est de classe C^2 sur I et que $f''(x)$ s'obtient par la formule de LEIBNIZ.

c. Montrer que $\forall x \in I$, $f(x) \geq \pi$.

d. Montrer que $\forall x \in I \cap \mathbb{R}_+$, $\left| \int_0^1 \frac{dt}{t^x \sqrt{t(1+t)}} - \frac{1}{(1/2) - x} \right| \leq 1$.

e. En déduire que $f(x) \underset{\frac{1}{2}^-}{\sim} \frac{1}{(1/2) - x}$.

3.96 *Mines PSI 2022* Tony Géréaud II

Soit une fonction continue $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in]0; +\infty[^2$, $f(xy) = f(x) + f(y)$ (1).

a. Calculer $f(1)$. Pour $x \in]0; +\infty[$, comparer $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

b. Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} f(t)dt - \int_1^2 f(t)dt$.

c. Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et en déduire f .

3.97 *Mines PSI 2022* Colin Herviou-Laborde I

a. Montrer que la fonction $\cos$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

c. Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$.

3.98 *Mines PSI 2022* Thomas Lanne II

Étudier les convergences des intégrales $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$ et $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$.

3.99 *Mines PSI 2022* Anatole Rousset I

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

- Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta t} \times \frac{1 - e^{in\theta t}}{1 - e^{i\theta t}} dt$.
- En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge et montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta t}}{1 - e^{i\theta t}} dt$.
- Établir $\int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t + i \sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt = -\frac{1}{2} \ln(2 - 2 \cos(\theta)) + i \operatorname{Arctan}\left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + i \operatorname{Arctan}\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$.
- En déduire que si $\theta \in]0; \pi[$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = -\ln\left(2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$.

3.100 *Mines PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche II

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer l'existence et donner la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-(1-i)t} t^n dt$.
- Trouver la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^{1/4}} \sin(t^{1/4}) t^n dt$.

3.101 *X PSI 2023* Raphaël Dénier II

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paire et de classe C^4 .

Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x^2) = f(x)$.

3.102 *ENS Cachan PSI 2023* Mathys Bureau

On se donne un réel $p \geq 1$. Si $p > 1$, on lui associe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement positive et continue telle que $\int_0^{+\infty} (f(t))^p e^t dt$ converge.

En cas de convergence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} t^n f(t) dt$.

- Soit $t \in]0; 1[$, $(u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$, montrer que $u^t v^{1-t} \leq tu + (1-t)v$. Indication : on pourra utiliser une convexité ou montrer que $\forall u \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \in]0; 1[$, $u^t \leq tu + (1-t)$.
- Soit $A \in \mathbb{R}_+$, $g, h : [0; A] \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Montrer que $\int_0^A |g(t)h(t)| dt \leq \frac{1}{p} \int_0^A |g(t)|^p dt + \frac{1}{q} \int_0^A |h(t)|^q dt$ si $p > 1$. En déduire que $\int_0^A |g(t)h(t)| dt \leq \left(\int_0^A |g(t)|^p dt\right)^{1/p} \times \left(\int_0^A |h(t)|^q dt\right)^{1/q}$.
- Si $p > 1$, montrer que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq K \left(\frac{p}{q}\right)^n ((nq)!)^{1/q}$. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} |u_n|^{-1/n}$ diverge.
- Si $p = 1$, montrer que $\sum_{n \geq 1} |u_n|^{-1/n}$ diverge.

3.103 *ENS Cachan PSI 2023* Alban Dujardin II

Soit $a > 0$ et, en cas de convergence, $I(a) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) dt$ et $J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{a}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) dt$.

On rappelle la valeur de l'intégrale de GAUSS : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- Montrer l'existence de $I(a)$ et $J(a)$.
- Montrer que $I(a) = J(a)$.
- Montrer que $I(a) = \frac{e^{-2a}}{2} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{a}{t^2}\right) \exp\left(-\left(t - \frac{a}{t}\right)^2\right) dt$.
- En déduire que $I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$.

3.104 Centrale Maths1 PSI 2023 Elae Terrien

a. Pour tout réel $x \in]-1; +\infty[$, montrer la convergence de $\int_0^1 \frac{t^x \ln(t) dt}{t-1}$.

On définit $H :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $H(x) = \int_0^1 \frac{t^x \ln(t) dt}{t-1}$.

b. Montrer que H est décroissante sur $] - 1; +\infty[$.

c. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 0$.

d. Donner un équivalent simple de $H(x)$ quand x tend vers -1^+ . Indication : considérer $H(x) - H(x+1)$.

e. Donner un équivalent simple de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Indication : considérer $H(x) - H(x+1)$.

3.105 Mines PSI 2023 Maddie Bisch I

a. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

b. Montrer que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$.

3.106 Mines PSI 2023 Marius Desvalois II

a. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue. Montrer que $\left(\int_0^1 f^3 \right)^2 \leq \int_0^1 f^5 \times \int_0^1 f$. Cas d'égalité ?

b. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0; 1], f'(x) \in [0; 1]$. Montrer $\int_0^1 f^3 \leq \left(\int_0^1 f \right)^2$.

c. Quel est le cas d'égalité dans l'inégalité de la question précédente ?

3.107 Mines PSI 2023 Jonathan Filocco II

a. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t} dt$ converge.

Soit $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique.

b. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge.

3.108 Mines PSI 2023 Clément Gallice I et Chloé Vagner I

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement positive.

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ du segment $[a; b]$ qui vérifient les conditions $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt = \frac{1}{n} \int_a^b f(t) dt$.

b. Montrer la convergence de $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(x_k) \right)_{n \geq 1}$ et calculer sa limite.

3.109 Mines PSI 2023 Gabriel Hofman I

On pose $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{\omega x} dx$.

a. Calculer I_n . En déduire une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ non nulle telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} g(t) t^n dt = 0$.

b. Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue (avec $a < b$ réels) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b f(t) t^n dt = 0$.

Montrer que $f = 0$. Indication : on admet que $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{C}[X], \forall t \in [a; b], |f(t) - P(t)| \leq \varepsilon$.

Question subsidiaire : montrer que si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et positive et que $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors $f = 0$.

3.110 Mines PSI 2023 Marie-Lys Ruzic I

On pose, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \int_0^x \frac{|\sin(t)|}{t} dt$.

Trouver un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3.111 CCINP PSI 2023 Paul Bats II

En cas de convergence, on pose $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x) \cos(x)) dx$.

- a. Montrer que I existe.
- b. Montrer que $J = 2I$.
- c. Calculer I .

3.112 CCINP PSI 2023 Pierre Dobeli I

Pour $n \in \mathbb{N}$, en cas de convergence, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}} dt$.

- a. Montrer l'existence de I_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
 - b. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $I_n = \frac{1}{n2^n} + \frac{n-1}{n} I_{n-1}$.
- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = nI_n$.
- c. Trouver une relation entre J_n et J_{n-1} .
 - d. Calculer J_1 . En déduire que $\forall n \geq 1$, $I_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.
 - e. Déterminer un équivalent de I_n en $+\infty$.

3.113 X PSI 2024 Jules Campistron II

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = q > 0$.

- a. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\psi :]-\alpha; \beta[\rightarrow]-\alpha; \beta[$ tels que $\forall x \in]-\alpha; \beta[$, $f(x) = -f(\psi(x))$.
- b. Montrer que ψ est de classe C^1 .

3.114 Centrale Maths1 PSI 2024 Jules Campistron

Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0\}$. Pour $f \in E$, on définit $(E_f) : y' - y + f(x) = 0$.

- a. Montrer que E est un espace vectoriel.
- b. Montrer que la fonction $g : x \mapsto e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est l'unique solution de (E_f) appartenant à E .

3.115 Centrale Maths1 PSI 2024 Mathis Laruelle

On définit la fonction f par $f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x(t) dt$.

- a. Déterminer le domaine de définition de f .
- On pose maintenant $\Phi(x) = xf(x)f(x-1)$.
- b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Phi(x+1) = \Phi(x)$.
 - c. Montrer que $x \mapsto \frac{\Phi(x)}{x}$ est décroissante.
 - d. Montrer que Φ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - e. En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

3.116 *Centrale Maths1 PSI 2024* Arya Tabrizi

- a. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $t \mapsto e^{-zt}$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$ ou $z = 0$.
- b. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.
- c. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt$ converge si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Soit $(z, z_0) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$, une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) dt$ converge. On définit $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ par $F(x) = \int_0^x e^{-z_0 t} f(t) dt$.

- d. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et qu'elle y est bornée.
- e. Montrer que $t \mapsto e^{-(z-z_0)t} F(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- f. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$ converge et qu'on a $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$.

Questions supplémentaires :

- rappeler la formule de TAYLOR reste intégral.
- rappeler l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE.

3.117 *Mines PSI 2024* Armand Dépée II

Montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} \left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right) dx$ et calculer sa valeur.

3.118 *Mines PSI 2024* Jonathan Filocco I

- a. Montrer que $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f'(x)$.
- b. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ converge. On pose $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$.
- c. Trouver un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+ .
- d. Montrer que $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$.
- e. Effectuer une intégration par parties pour améliorer la majoration de la question précédente.
- f. Est-ce que f est intégrable sur $]0; +\infty[$?
- g. Calculer $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ en fonction de J .

3.119 *Mines PSI 2024* Nathan Jung I

- a. Montrer que la fonction $I : x \mapsto \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos(\theta) + 1) d\theta$ est bien définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- b. Donner une expression simplifiée de $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1 \right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- c. En déduire la valeur de $I(x)$ pour $x \in D$.

3.120 *Mines PSI 2024* Antoine Métayer II

Soit $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N(s) = \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s} \right) - \frac{N^{1-s}}{1-s}$ et, en cas d'existence, $\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(s)$.

- a. Montrer que $\zeta(s)$ est bien définie si $\operatorname{Re}(s) > 1$.
- b. Montrer que $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s} = \int_1^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt$.
- c. Si $\operatorname{Re}(s) > 0$, après avoir justifié l'existence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^s} - \frac{1}{[t]^s} \right) dt$, montrer que $\zeta(s)$ existe et qu'on a $\zeta(s) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{[t]^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt + \frac{1}{s-1}$.

3.121 *CCINP PSI 2024 Yasmine Azzaoui I*

- a. Montrer que f définie par $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f'(x)$.
- b. Montrer que $\forall x > 0, f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.
- c. Montrer que $\forall x > 0, f(x) = -e^{-x} \ln(x) + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.
- d. Calculer $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

3.5 Officiel de la Taupe**3.122** *OdT 2012/2013 X-Cachan PSI planche 73*

Soit f et g de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, g étant 1-périodique.

Montrer que $\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 f\left(\frac{s+k}{n}\right)g(s)ds$.

Montrer que si f est lipschitzienne sur $[0; 1]$, en déduire que $\int_0^1 f(x)g(nx)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 f\left(\frac{k}{n}\right)g(s)ds = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$. Puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \frac{f(1) - f(0)}{2}$.

3.123 *OdT 2012/2013 Centrale PSI planche 122 I*

À quelle condition sur $\alpha > 0$, l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^\alpha(\sin(x^2))^2} dx$ est-elle convergente ?

3.124 *OdT 2012/2013 CCP PSI planche 219 I*

Intégrabilité sur $]0; +\infty[$ de $f : x \mapsto \frac{(x+1)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{3}}} \ln(x)$?

3.125 *OdT 2013/2014 X-Cachan PSI planche 76*

- a. Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}}$.
- b. Montrer que f y est de classe C^1 . Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}}$.
- c. Donner les limites et un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

3.126 *OdT 2013/2014 Centrale PSI planche 123 II*

On note F l'ensemble des fonctions continues de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$ et G celui des fonctions g de classe C^2 de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $g(a) = g(b) = g'(a) = g'(b) = 0$.

Soit $f \in F$, montrer qu'il existe $g \in G$ telle que $f = g''$ si et seulement si $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = 0$.

Soit h affine, montrer que : $\forall g \in G, \int_a^b h(x)g''(x)dx = 0$.

Soit $h \in F$ telle que $\forall g \in G, \int_a^b h(x)g''(x)dx = 0$. Montrer que : $\exists (u, v) \in \mathbb{R}^2, \int_a^b (h(x) - u - vx)dx = 0$ et $\int_a^b x(h(x) - u - vx)dx = 0$. En déduire que h est affine.

3.127 *OdIT 2013/2014 Mines PSI planche 199 II*

Montrer que $(E) : y' - y = f$, où f est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, admet une unique solution F bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}$ et trouver une relation entre $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} F$.

3.128 *OdIT 2013/2014 CCP PSI planche 261 II*

Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $d(t) = t + \cos(t)$ et $f(t) = \frac{1}{d(t)}$. Pour $x > 0$, on pose aussi $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

a. Montrer que g admet une limite finie en 0^+ . On prolonge alors g par continuité en 0 .

b. Montrer que pour $x \in]0; +\infty[$, on a $\int_0^x g(t)^2 dt = 2 \int_0^x f(t)g(t) dt - xg(x)^2$.

c. En déduire que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3.129 *OdIT 2014/2015 X-Cachan PSI planche 59*

a. Montrer que $f : x \mapsto \sin(2\pi x\sqrt{2}) + \sin(2\pi x)$ n'est pas périodique.

b. Pour $q > 0$, construire $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p - q\sqrt{2} < 1$, puis, avec le principe des tiroirs, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, |p - q\sqrt{2}| < \frac{1}{n}$.

c. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de couples $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $|p - q\sqrt{2}| < \varepsilon$.

d. Soit $\varepsilon > 0$ et $N_\varepsilon = \{q \in \mathbb{N}^* \mid \exists p \in \mathbb{N}^*, |p - q\sqrt{2}| < \varepsilon\}$.

Montrer l'existence d'un réel ℓ strictement positif tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, N_\varepsilon \cap [n; n + \ell]$ soit non vide.

e. On note $R_\varepsilon = \{r \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x \in \mathbb{R}, |f(x+r) - f(x)| < \varepsilon\}$.

Soit $a > 0$, montrer l'existence d'un réel ℓ strictement positif tel que $R_\varepsilon \cap [a; a + \ell]$ soit non vide.

3.130 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 155 I*

Soient M l'ensemble des parties minorées non vides de $\mathbb{R}$, et Φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Montrer que : Φ est croissante $\iff \forall P \in M, \Phi(\inf(P)) \leq \inf(\Phi(P))$.

b. Montrer que : Φ croît et est continue à droite $\iff \forall P \in M, \Phi(\inf(P)) = \inf(\Phi(P))$.

3.131 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 162 I*

a. Justifier l'existence de $A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$.

b. En écrivant $A = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ où la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est à termes strictement positifs, montrer que $A > 0$.

3.132 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 165 II*

a. Existence et domaine de définition de $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} e^{-tx} dt$.

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3.133 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 173 II*

a. Existence et domaine de définition de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} dt$.

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3.134 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 228 I*

Soit $\alpha > -1$ et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , décroissante, telle que $t \mapsto t^\alpha f(t)$ soit intégrable sur $[1; +\infty[$.

a. Montrer que $t \mapsto t^\alpha f(t)$ et $t \mapsto t^{\alpha+1} f'(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que $\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} f'(t) dt = -(\alpha+1) \int_0^{+\infty} t^\alpha f(t) dt$.

3.135 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 229 I*

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

a. Montrer que si $\int_0^1 f(t)dt = 0$, f s'annule au moins une fois sur $]0; 1[$.

b. Montrer que si $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$, f admet au moins un point fixe sur $]0; 1[$.

3.136 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 283 II*

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0.

Étudier la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

3.137 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 288 I*

Trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sin^2(t)dt$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x |\sin(t)|dt$.

3.138 *OdIT 2014/2015 ENTPE-EIVP PSI planche 325 I*

Montrer que : $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, \left| \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) \right| = \alpha + \beta \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$.

3.139 *OdIT 2014/2015 Télécom Sud Paris PSI planche 331 II*

Vérifier que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) - \ln(1 - e^{-x})}{x} e^{-\alpha x} dx$ existe pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

3.140 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 118I*

Montrer que $I_n = \int_0^\pi \ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) \cos(nx)dx$ et $J_n = \int_0^\pi \sin(nx) \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx$ existent pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation entre I_n et J_n . Pour $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre J_n et J_{n+1} .

Calculer I_0 . Indication : on montrera que $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx$. Calculer I_n .

3.141 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 119II*

Pour f continue de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}_+^*$, étudier la suite de terme général $u_n = \left(\int_0^1 f(t)^n dt\right)^{\frac{1}{n}}$.

3.142 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 120II*

Domaine de définition de $f(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos t + x^2)dt$. Expliciter f .

3.143 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 122II*

Montrer que (E) : $y' - y = f$ où f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, admet une unique solution h bornée.

Montrer que h est intégrable sur $\mathbb{R}$ et exprimer cette intégrale en fonction de celle de f .

3.144 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 128I* Convergence et calcul de $I(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1}{\sin(2\theta)} - 1} d\theta$.

3.145 OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 130I

Montrer que $\tan(x) = x$ admet une solution unique sur $I_n =]-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi[$. Trouver un équivalent de x_n en $+\infty$ puis en calculer le développement asymptotique avec une précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

3.146 OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 133I

Justifier l'existence et l'unicité d'une suite réelle vérifiant $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.

Étudier cette suite et en donner un développement asymptotique à deux termes.

3.147 OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 249I Montrer que $\Phi(x) = \int_{1/x}^x e^{-t^2} dt$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Montrer que Φ est C^1 , étudier sa parité et calculer sa limite en $+\infty$.

Justifier que Φ n'est pas prolongeable par continuité en 0 puis donner son signe sur $]0; 1]$ et $[1; +\infty[$.

3.148 OdIT 2015/2016 ENSAM PSI planche 276II

Soit f de classe C^2 sur $[0; a]$ telle que $f'(0) = f(0) = 0$.

Montrer que $\int_0^a |f(t)f''(t)| dt \leq \frac{a^2}{2} \int_0^a f''^2(t) dt$.

Peut-on obtenir une meilleure majoration ?

3.149 OdIT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 277II

Soit $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

a. Montrer que $G : x \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 |x - t|g(t) dt$ est de classe C^2 sur $[0; 1]$ et calculer G'' .

b. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) = G(x) + ax + b$ vérifie $f'' = g$ et $f(0) = f(1) = 0$.

c. Existe-t-il d'autres fonctions f vérifiant ces conditions ?

3.150 OdIT 2015/2016 Télécom SudParis planche 285I Montrer que $(e^{-x^2})^{(n)} = P_n(x)e^{-x^2}$ avec $P_n \in \mathbb{C}[X]$.

Montrer la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)P_m(x)e^{-x^2} dx$ et la calculer.

3.151 OdIT 2015/2016 Télécom SudParis planche 287I Convergence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

3.152 OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 105I abordable dès la 1^{ère} année

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan } x + \text{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2}$.

3.153 OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 109I

Existence et valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\text{th}(3x) - \text{th } x}{x} dx$.

3.154 OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 111I abordable dès la 1^{ère} année

Montrer que $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer qu'elle est alors de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R}_+$.

3.155 OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 112I

Déterminer la nature puis la valeur de $I_{\alpha,n} = \int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n dt$ où a, b et α sont réels et $n \in \mathbb{N}$.

3.156 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 116I*

Nature et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right) dx$.

3.157 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 120I abordable dès la 1^{ère} année*

Montrer que si une fonction f est de classe C^n sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et s'annule n fois, $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $f^{(n-k)}$ s'annule au moins k fois.

Qu'en déduit-on, au mieux, en fonction du degré de $P \in \mathbb{R}[X]$, sur le nombre de fois où $P(x) = e^x$?

3.158 *OdIT 2016/2017 Centrale PSI planche 161 abordable dès la 1^{ère} année*

Montrer que pour, $n \geq 3$, $P_n(X) = X^n - nX + 1$ admet une unique racine $x_n \in]0; 1[$.

Trouver un équivalent a_n de x_n de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$; puis un équivalent simple de $x_n - a_n$.

3.159 *OdIT 2016/2017 Centrale PSI planche 164*

Montrer que (E) : $y'' = (x^4 + 1)y$ admet une unique fonction f solution telle que $f(0) = f'(0) = 1$.

On admet que $\frac{1}{f^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$; montrer que $g(x) = f(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2}$ est solution de (E).

Montrer que $\frac{1}{f^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3.160 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 205I abordable dès la 1^{ère} année*

Montrer que, pour $n \geq 3$, l'équation $e^x = nx$ admet deux solutions $0 \leq x_n < y_n$.

Étudier la monotonie de $(x_n)_{n \geq 3}$ et $(y_n)_{n \geq 3}$. En déduire qu'elles convergent vers une limite à déterminer.

Montrer que $x_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$. Trouver un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$ et en déduire un développement asymptotique à deux termes de x_n . Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; montrer qu'à partir d'un certain rang, $y_n \leq (1 + \varepsilon) \ln(n)$.

3.161 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 209I*

Nature de $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$ et $J = \int_0^{+\infty} \sin t \sin \frac{1}{t} dt$.

3.162 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 218I*

Trouver a , b et c tels que $\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$.

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; montrer que $I = \int_0^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$ existe et la calculer.

3.163 *OdIT 2016/2017 EIVP PSI planche 245III abordable dès la 1^{ère} année*

Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$.

3.164 *OdIT 2017/2018 Mines PSI planche 124III, abordable dès la première année*

Calculer $I = \int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^3(x)} dx$.

3.165 *OdIT 2017/2018 Centrale PSI planche 163, abordable dès la première année*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2}\right)$. Si $\alpha = 2$, convergence et limite de $(u_n^{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$. Limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $\alpha \in [0; 1]$, convergence et limite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha}{n^2}$. Et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Et si $\alpha > 1$?

3.166 *OdIT 2017/2018 CCP PSI planche 209II, abordable dès la première année*

Montrer que $\forall n \geq 3$, $e^x = nx$ admet deux solutions $0 \leq x_n < y_n$.

Étudier la monotonie des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire qu'elles admettent une limite à déterminer.

Montrer que $x_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$, trouver un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$ en $+\infty$ et donner un développement asymptotique de x_n à deux termes. Soit $\varepsilon > 0$; montrer qu'à partir d'un certain rang, $y_n \leq (1 + \varepsilon) \ln n$.

3.167 *OdIT 2017/2018 EIVP PSI planche 250I, abordable dès la première année*

Montrer que la suite de terme général $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$ converge et donner sa limite.

Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} et en déduire un équivalent de nI_n en $+\infty$.

Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

3.168 *OdIT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 252II*

Montrer que les suites de terme général $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \ln n$ et $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \ln n$ (pour $n \geq 2$) sont adjacentes.

3.169 *Compléments OdIT 2017/2018 Mines PSI planche 181II*

Domaine de définition de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

Donner un équivalent de $F(x)$ en 0.

3.170 *Compléments OdIT 2017/2018 CCP PSI planche 447I*

Montrer que $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ converge et en déduire que $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$ converge aussi ; montrer que $I = J$. Calculer $I + J$, en déduire la valeur de I et J .

3.171 *Compléments OdIT 2017/2018 ENSAM PSI planche 544II*

Convergence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x(1+x^2)\operatorname{Arctan} x} dx$.

Décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(x^2+1)x}$ sous la forme $\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$ et calcul de I .

3.172 *Compléments OdIT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 562I*

Domaine de définition de $f(x) = x^2 + \lfloor \frac{1}{1-\lfloor x \rfloor} \rfloor$. Étudier la continuité de f en ± 2 et ± 1 .

Expliciter f sur les intervalles où elle est définie.

3.173 *Compléments OdIT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 563I*

Déterminer les fonctions continues sur $[0; 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 (f(x^2))^2 dx$ (on pourra écrire $\frac{1}{3}$ de manière naturelle).

3.174 *Compléments OdIT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 565II*

Soit f de classe C^1 sur $[a; b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a) = 0$.

Montrer que $\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(x) dx$.

3.175 Compléments OdIT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 575I

Convergence et calcul de $f(x) = \int_0^{+\infty} \min(x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2}) dt$.

Montrer la continuité et la dérivabilité de f .

3.176 OdIT 2018/2019 Mines PSI planches 108I et 114I

Étudier, en fonction de $\alpha > 0$, l'existence de $\int_0^{+\infty} (e^{\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}} - 1) dt$.

3.177 OdIT 2018/2019 Centrale PSI planche 167

On note $E = \{f \in C^2([0; 1], \mathbb{C}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$, $F = C^0([0; 1], \mathbb{C})$ et $\phi : f \mapsto f''$.

a. Montrer que ϕ est un isomorphisme de E dans F .

b. Si $g \in F$, montrer que $G : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $G(x) = \int_0^1 \frac{|x-t|}{2} g(t) dt$ est C^2 et calculer G'' .

c. Montrer qu'il existe une fonction $k : [0; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall g \in F, \phi^{-1}(g)(x) = \int_0^1 k(x, t) g(t) dt$.

d. Calculer $\sup_{[0; 1]^2} |k|$. En déduire la continuité de ϕ^{-1} si on munit E et F de la norme infinie.

3.178 OdIT 2018/2019 Centrale PSI planche 168

a. Étudier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$.

b. Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Étudier l'existence de $I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha u) - \cos(\beta u)}{u} du$. En donner la valeur.

3.179 Compléments OdIT 2018/2019 Mines PSI planche 107I

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\text{th}(3x) - \text{th}(x)}{x} dx$.

3.180 Compléments OdIT 2018/2019 CCP PSI planche 348I

a. Montrer que $f :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x + \ln(1+x)$ est une bijection et que $g = f^{-1}$ est C^∞ .

b. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

c. Justifier que g admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 et le calculer.

3.181 Compléments OdIT 2018/2019 CCP PSI planche 350II

a. Montrer que $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ est convergente. Montrer que $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$ aussi et que $I = J$.

b. Déterminer la valeur de I .

3.182 Compléments OdIT 2018/2019 E3A PSI planche 402II

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $I_n = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\tan^n x}$.

b. Réécrire I_n à l'aide d'un changement de variable "logique".

c. Trouver des réels a, b, c, d tels que $\frac{1}{t^2(1+t^2)} = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + \frac{ct+d}{1+t^2}$.

d. En déduire le calcul de I_2 puis celui de I_3 et celui de I_4 .

3.183 Compléments OdIT 2018/2019 ENTPE PSI planche 431I

a. Montrer que $I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ et $I_2 = \int_0^1 \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}}$ existent et les calculer.

b. Montrer que $I_3 = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$ existe puis la calculer en effectuant le changement de variable $t = \sin u$.