

SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 3

INTÉGRALES

3.1 Intégrales sur un segment et développements limités

3.1 On effectue dans $I = \int_a^b x f(x) dx$ le changement de variables $x = \varphi(t) = a + b - t$ et on trouve par linéarité que $I = (a + b) \int_a^b f(x) dx - I$ d'où $\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$. L'application $f : x \rightarrow \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$ est continue et $f(\pi - x) = f(x) : \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \left[-\operatorname{Arctan}(\cos x) \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$.

3.2 $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$ donc $v_n = \ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)$. Or $x \rightarrow \ln(1 + x^2)$ est continue sur $[0; 1]$, par somme de RIEMANN et IPP : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \frac{e^{\pi/2}}{e^2}$.

3.3 Pour $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos \alpha \cos x + 1 > 1 + \cos \alpha > 0$ ce qui justifie l'existence de l'intégrale, on pose alors $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ pour avoir $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos \alpha \cos x + 1} dx = \frac{2}{1 + \cos \alpha} \int_0^1 \frac{du}{1 + \left(u \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2} = \frac{\alpha}{\sin \alpha}$ avec quelques formules de trigonométrie de derrière les fagots comme $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

3.4 a. Par le changement de variables $x = 1 - t$ on trouve $J(p, q) = J(q, p)$ et par intégration par parties ($u = (1 - x)^{q+1}$ et $v' = x^p$) : $J(p, q + 1) = \frac{q+1}{p+1} J(p+1, q)$.

b. On a $J(p, 0) = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$ donc, par récurrence et en utilisant la question a., on trouve la formule finale : $J(p, q) = \frac{q}{p+1} J(p+1, q-1) = \dots = \frac{p!q!}{(p+q+1)!} J(p+q, 0) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

3.5 On pose $\varphi : t \rightarrow e^{-kt} F(t)$. Alors $\varphi'(t) = (f(t) - kf(t))e^{-kt} \leq 0$ par hypothèse.

Ainsi φ est décroissante et comme $\varphi(0) = 0$, on a φ est négative.

Mais φ est positive par construction donc elle est nulle ; et comme $f = F'$, on a f nulle.

3.6 On a $\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right)$ grâce au DL_1 de la fonction $\ln$; d'où le développement $\ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right)$ d'où $x \ln x \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x}\right) \underset{+\infty}{=} 1 + o(1)$ et on a $\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x \ln x} \underset{+\infty}{=} \exp(1 + o(1)) \underset{+\infty}{=} e + o(1)$: la limite est donc égale à e .

3.7 On sait que $e^x - 1 \underset{0}{=} x + o(x)$ donc le $DL_n(0)$ de $(e^x - 1)^n$ est $(e^x - 1)^n \underset{0}{=} x^n + o(x^n)$. De plus, on a $(e^x - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} e^{kx}$ par le binôme de NEWTON ; or le $DL_n(0)$ de e^{kx} est $e^{kx} \underset{0}{=} \sum_{p=0}^n \frac{k^p x^p}{p!} + o(x^n)$ en composant celui de e^x par kx (qui tend bien vers 0 quand x tend vers 0). Alors, en sommant ces DL, on obtient $(e^x - 1)^n \underset{0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{p=0}^n \frac{k^p x^p}{p!} \underset{0}{=} \sum_{p=0}^n \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p \right) \frac{x^p}{p!} + o(x^n)$ et en identifiant les coefficients dans les deux expressions (unicité) : $\forall p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0$ et $\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!$.

3.8 a. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par : $\forall x \geq 0, \varphi(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x)$; alors φ est dérivable car f est dérivable et f^{-1} continue et : $\forall x \geq 0, \varphi'(x) = f(x) + f'(x)f^{-1}(f(x)) - f(x) - xf'(x) = 0$ donc, comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle, φ est constante sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(0) = 0$ donc φ est nulle sur $\mathbb{R}_+$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, on définit $\psi_x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall y \in \mathbb{R}_+, \psi_x(y) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(t) - xy$. ψ_x est encore dérivable et $\psi'_x(y) = f^{-1}(y) - x$ et comme f^{-1} est strictement croissante, ψ_x est décroissante sur $[0; f(x)]$ et croissante sur $[f(x); +\infty[$, elle est par ailleurs nulle en $f(x)$ d'après la question **a.** donc elle est positive sur $\mathbb{R}_+$ et nulle seulement en $f(x)$.

3.9 a. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}}$; f est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

et $\frac{3}{2} > 1$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par critère de RIEMANN.

b. Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a, pour $n \in \mathbb{N}$: $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}} \leq f(n)$; or $f(n+1) \underset{+\infty}{\sim} f(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ donc $\int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

C'est plus délicat pour le second équivalent : on constate que pour $x \in [n; 2n]$, $\frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ car

$x^3 + x^2 + x + 1 \leq x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. Ainsi : $\left[\frac{-2}{\sqrt{x+1}}\right]_n^{2n} \leq \int_n^{2n} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}} \leq \left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_n^{2n} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$. Or on

a aussi $\left[\frac{-2}{\sqrt{x+1}}\right]_n^{2n} = \frac{2}{\sqrt{n}} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/2} - \left(2+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}\right] \underset{+\infty}{\sim} \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$ donc $\int_n^{2n} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$.

3.10 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$, alors f est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$

et $2 > 1$: f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par critère de RIEMANN. Pour $x \geq 0$, on encadre, sur l'intervalle $[x; 2x]$: $\frac{1}{\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^4}}$, la croissance de l'intégrale donne la double inégalité :

$\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}} = \text{Arctan}(2x) - \text{Arctan}(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \leq \frac{1}{2x} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}\right) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4}}$. Comme,

$\text{Arctan}(2x) - \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x}\right) - \frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$, on a enfin : $\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

3.11 Si $\alpha > 0$, on a $\frac{n+1}{(2n)^\alpha} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^\alpha}$ car $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante.

Si $\alpha > 1$, par encadrement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Si $\alpha = 1$, avec les sommes de RIEMANN : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(2)$.

Si $\alpha \in]0; 1[$, la minoration montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Si $\alpha \leq 0$, $u_n \geq n+1$, on a encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3.12 g_n réalise une bijection strictement croissante C^∞ de $[n; +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ d'où l'existence et l'unicité de x_n .

$g_n(n+1) = \int_n^{n+1} e^{t^2} dt \geq 1$ car $e^{t^2} \geq 1$ donc $g_n(n) = 0 \leq 1 = g_n(x_n) \leq g_n(n+1) \implies n \leq x_n \leq n+1$.

On se sert ensuite de la croissance de $t \mapsto e^{t^2}$ pour obtenir par croissance de l'intégrale $x_n - n \leq e^{-n^2}$.

On peut en déduire par exemple par un nouvel encadrement que $x_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-n^2}$.

3.13 On justifie que l'existence des intégrales I_n , puis on obtient par IPP la relation $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$. Par récurrence, on arrive à $b_n = (-1)^{n+1}n!$. On conclut à la convergence souhaitée par le CSSA. On pouvait bien sûr utiliser le théorème de convergence dominée pour avoir le même résultat plus rapidement.

3.2 Fonctions intégrables

3.14 $f : t \mapsto \frac{|\ln(t)|^\beta dt}{(t-t^2)^\alpha}$ est continue et positive sur $]0; 1[$. On a $\frac{|\ln(t)|^\beta dt}{(t-t^2)^\alpha} \sim \frac{1}{1-t} \frac{1}{(1-t)^{\alpha-\beta}}$ donc f est intégrable sur $[\frac{1}{2}; 1[$ si et seulement si $\alpha - \beta < 1$ d'après RIEMANN. "En 0" : $\frac{|\ln(t)|^\beta dt}{(t-t^2)^\alpha} \sim \frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^{-\beta}}$ et d'après les intégrales de BERTRAND, f est intégrable sur $]0; \frac{1}{2}]$ si et seulement si $\alpha < 1$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta < 1)$.

3.15 D'abord, la fonction $f_{x,y}$ est continue et positive sur $[1; +\infty[$ pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Si $y > 0$, par croissances comparées, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^x e^{-ty} = 0^+$ donc, puisque $\ln(1+u) \sim u$, on obtient l'équivalent $f_{x,y}(t) \sim \frac{t^x e^{-ty}}{1+t^x}$ donc, encore par croissances comparées, $f_{x,y}(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ce qui prouve que $f_{x,y}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN.

- Si $y = 0$ et $x > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^x = +\infty$ et $\ln(1+t^x) = x \ln(t) + \ln(1+t^{-x})$ donc $f_{x,0}(t) \sim \frac{x \ln(t)}{t^x}$:

Si $x > 1$, avec $1 < a < x$, $f_{x,0}(t) = o\left(\frac{1}{t^a}\right)$ par croissances comparées donc $f_{x,0}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Si $x \leq 1$, on a $f_{x,0}(t) \geq \frac{1}{t}$ pour t assez grand donc $f_{x,0}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

- Si $y = 0$ et $x = 0$, $f_{0,0}(t) = \frac{\ln(2)}{2}$ donc $f_{0,0}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.

- Si $y = 0$ et $x < 0$, $f_{x,0}(t) \sim t^x = \frac{1}{t^{-x}}$ donc $f_{x,0}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $x < -1$.

- Si $y < 0$ et $x > 0$, $f_{x,y}(t) = \frac{-ty + x \ln(t) + \ln(1+t^{-x}e^{ty})}{1+t^x} \sim \frac{-ty}{1+t^x}$ et on a trois cas :

Si $x < 0$, $f_{x,y}(t) \sim -yt$ donc $f_{x,y}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_{x,y}(t) = +\infty$.

Si $x = 0$, $f_{x,y}(t) \sim -\frac{yt}{2}$ donc $f_{x,y}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_{x,y}(t) = +\infty$.

Si $x > 0$, $f_{x,y}(t) \sim -\frac{y}{t^{x-1}}$ donc $f_{x,y}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $x > 2$.

En conclusion : $f_{x,y}$ est intégrable sur $[1; +\infty[\iff ((y > 0) \text{ ou } (y = 0 \text{ et } |x| > 1) \text{ ou } (y < 0 \text{ et } x > 2))$.

3.16 Soit $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \ln\left(\frac{b-t}{t-a}\right)$; f est continue sur $]a; b[$, positive sur $]\frac{a+b}{2}; b[$ puis négative sur $]a; \frac{a+b}{2}[$ donc de signe constant au voisinage des deux bornes. Posons $c = \frac{a+b}{2}$, f est intégrable sur $]a; b[$ si et seulement si elle l'est sur $]a; c[$ et sur $]c; b[$. Or $f(t) \sim -\ln(t-a)$ or $\ln$ est intégrable sur $]0; 1[$ donc $t \mapsto \ln(t-a)$ l'est sur $]a; a+1[$. Ainsi f est intégrable sur $]a; c[$. De même f est intégrable sur $]c; b[$ et par conséquent sur $]a; b[$. Reste à effectuer le changement de variable $u = a+b-t$ et on trouve $\int_a^b \ln\left(\frac{b-t}{t-a}\right) dt = \int_b^a \ln\left(\frac{u-a}{b-u}\right) (-du) = -\int_a^b \ln\left(\frac{b-t}{t-a}\right) dt$ donc $\int_a^b \ln\left(\frac{b-t}{t-a}\right) dt = 0$.

3.17 La fonction $f_p : t \mapsto \frac{dx}{x\sqrt{x^{2p+1}+1}}$ est continue et positive sur $[1; +\infty[$, et $f_p(x) \sim \frac{1}{x^{p+\frac{3}{2}}}$ donc f_p est intégrable si et seulement si $p > -\frac{1}{2}$ d'après le critère de RIEMANN. On pose $x = \varphi(t) = \left(\tan t\right)^{\frac{2}{2p+1}}$ qui est un C^1 -difféomorphisme de $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $[1; +\infty[$ donc, si $p > -\frac{1}{2}$, comme une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sin(t)}$ est $t \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$ et que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1 : \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^{2p+1}+1}} = \frac{2}{2p+1} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin(t)} = \frac{2}{2p+1} \ln(\sqrt{2}+1)$.

3.18 Posons $f : t \mapsto |1 - t^\alpha|^\beta$, alors f est positive et continue sur $]0; 1[$. Si $\alpha = 0$, on a $f = 0$ si $\beta > 0$, $f = 1$ si $\beta = 0$ et f non définie si $\beta < 0$. Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable sur $]0; \frac{1}{2}[$. Si $\alpha < 0$, on a $\forall t \in]0; 1[$, $f(t) \sim_0 t^{\alpha\beta}$ car $|1 - t^\alpha| = t^\alpha - 1 \sim_0 t^\alpha$. Alors, par le critère de RIEMANN, f est intégrable sur $]0; \frac{1}{2}[$ si et seulement si $-\alpha\beta < 1 \iff \alpha\beta > -1$.

Voyons ce qui se passe au voisinage de 1 si $\alpha \neq 0$ en posant $t = 1 - h$ (avec $h \in]0; 1[$), alors on a le calcul $f(t) = f(1 - h) = \exp(\beta \ln |1 - (1 - h)^\alpha|) \underset{0}{=} \exp(\beta \ln |\alpha h + o(h)|) \underset{0}{=} \exp(\beta \ln(h) + \beta \ln |\alpha| + o(1)) \underset{0}{\sim} (|\alpha|h)^\beta$ donc toujours d'après RIEMANN : f est intégrable sur $[\frac{1}{2}; 1[$ si et seulement si $\beta > -1$.

(f est intégrable sur $]0; 1[$) $\iff (\alpha = 0 \text{ et } \beta \geq 0)$ ou $(\alpha > 0 \text{ et } \beta > -1)$ ou $(\alpha < 0 \text{ et } \beta < -1 \text{ et } \alpha\beta > -1)$.

3.19 $f : t \mapsto \frac{|\ln(t)|^\beta dt}{(t - t^2)^\alpha}$ est continue et positive sur $]0; 1[$. On a $\frac{|\ln(t)|^\beta dt}{(t - t^2)^\alpha} \underset{1}{\sim} \frac{1}{(1 - t)^{\alpha - \beta}}$ donc f est intégrable sur $[\frac{1}{2}; 1[$ si et seulement si $\alpha - \beta < 1$ d'après RIEMANN. "En 0" : $\frac{|\ln(t)|^\beta dt}{(t - t^2)^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^{-\beta}}$ et d'après les intégrales de BERTRAND, f est intégrable sur $]0; \frac{1}{2}[$ si et seulement si $\alpha < 1$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta < 1)$.

3.20 On a $f_{\alpha, \beta}(t) \sim_0 \frac{t^\alpha}{t^\beta}$ si $\alpha > 0$; $f_{\alpha, \beta}(t) \sim_0 \frac{\ln(2)}{t^\beta}$ si $\alpha = 0$ et $f_{\alpha, \beta}(t) \sim_0 \frac{\alpha \ln(t)}{t^\beta}$ si $\alpha < 0$.

De même $f_{\alpha, \beta}(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^\alpha}{t^\beta}$ si $\alpha < 0$; $f_{\alpha, \beta}(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{t^\beta}$ si $\alpha = 0$ et $f_{\alpha, \beta}(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\alpha \ln(t)}{t^\beta}$ si $\alpha > 0$.

Ainsi, avec les critères de RIEMANN et le fait que $\frac{\alpha \ln(t)}{t^\beta} \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{1+\beta}{2}}}\right)$ si $\beta < 1$ et $\frac{\alpha \ln(t)}{t^\beta} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{1+\beta}{2}}}\right)$ si $\beta > 1$, on a intégrabilité de $f_{\alpha, \beta}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi $(\alpha > 0 \text{ et } 1 < \beta < \alpha + 1)$ ou $(\alpha < 0 \text{ et } \alpha + 1 < \beta < 1)$.

3.21 La fonction $f : x \mapsto \frac{1 - tx}{x^\alpha}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x^{-\alpha} e^{-2x} \underset{+\infty}{=} o(e^{-x})$ et $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^\alpha}$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha < 1$ d'après le critère de RIEMANN.

3.22 Posons $f : t \mapsto \frac{t \ln(t)}{(1 + t^2)^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$; on a $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0. De plus $f(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $2 > 1$ donc f est intégrable sur $[1; +\infty[$ (car positive sur $[1; +\infty[$) et donc sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $t = \varphi(u) = \frac{1}{u}$ avec φ de classe C^1 , strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} \frac{u^3 \ln(1/u) du}{(1 + u^2)^2} = -I_1$ donc $I_1 = 0$.

Comme f intégrable sur $[1; +\infty[$, $I_2 = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a f(t) dt$ et on pose $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \frac{-1}{2(1 + t^2)}$ qui sont C^1 sur $[1; a]$: $\int_1^a f(t) dt = \left[\frac{-\ln(t)}{2(1 + t^2)} \right]_1^a + \frac{1}{2} \int_1^a \frac{dt}{t(1 + t^2)} = \frac{-\ln(a)}{2(1 + a^2)} + \frac{1}{2} \int_1^a \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1 + t^2} \right) dt$ ce qui donne $\int_1^a f(t) dt = \frac{-\ln(a)}{2(1 + a^2)} + \frac{1}{4} (2 \ln(a) - \ln(1 + a^2) + \ln(2))$. On passe à la limite quand a tend vers $+\infty$ et on trouve $I_2 = \frac{\ln(2)}{4}$. On aurait pu poser le changement de variable $t = \sqrt{u}$ pour simplifier un peu !

3.23 Posons $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{(1 + t)^2}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$; on a $f(t) \underset{0}{\sim} \ln(t)$ or $\ln$ est intégrable sur $]0; 1[$ donc f est intégrable sur $]0; 1[$ (car négative sur $]0; 1[$). De plus $f(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ et $\frac{3}{2} > 1$ donc f est intégrable sur $[1; +\infty[$ (car positive sur $[1; +\infty[$) et donc sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $t = \varphi(u) = \frac{1}{u}$ avec φ de classe C^1 , strictement

décroissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} \frac{u^2 \ln(1/u) du}{1+u^2} = -I_1$ donc $I_1 = 0$.

f intégrable sur $[1; +\infty[$, $I_2 = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a f(t) dt$ et on pose $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \frac{-1}{1+t}$ qui sont C^1 sur $[1; a]$:
 $\int_1^a f(t) dt = \left[\frac{-\ln(t)}{1+t} \right]_1^a + \int_1^a \frac{dt}{t(1+t)} = \frac{-\ln(a)}{1+a} + \int_1^a \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt = \frac{-\ln(a)}{1+a} + \ln(a) - \ln(1+a) + \ln(2)$.
 On passe à la limite quand a tend vers $+\infty$ et on trouve $I_2 = \ln(2)$.

3.24 On a $\ln(\tan(\theta)) \underset{\frac{\pi}{2}^-}{\sim} -\ln(\cos(\theta))$ donc comme $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos(\theta) = 0^+$ et $\lim_{y \rightarrow 0^+} y \ln(y) = 0$: prolongement par continuité en $\frac{\pi}{2}$. De plus, $\cos(\theta) \ln(\tan(\theta)) \underset{0^+}{\sim} \ln(\theta) = o(\sqrt{\theta}^{-1})$ intégrable d'après RIEMANN.

Si $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, on a $\int_a^b \cos(\theta) \ln(\tan(\theta)) d\theta = \left[\sin(\theta) \ln(\tan(\theta)) \right]_a^b - \int_a^b \frac{d\theta}{\cos(\theta)}$ par IPP donc
 $I_b = \int_0^b \cos(\theta) \ln(\tan(\theta)) d\theta = \sin(b) \ln(\tan(b)) - \int_0^b \frac{d\theta}{\cos(\theta)} = \sin(b) \ln(\tan(b)) - \ln\left(\tan\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$
 $-\cos(b) \ln(\tan(b)) + \ln\left(\tan\left(\frac{b}{2}\right)\right) = -(1+o(h)) \ln(h+o(h)) + \ln\left(\frac{h}{2}+o(h)\right)$ avec $b = \frac{\pi}{2} - h$: $I = -\ln(2)$.

3.25 a. $\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)e^{-ixt}| = |f(t)|$ or f est intégrable donc $\widehat{f}(x)$ existe car $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} e^{-itx} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(1-ix)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{(-1-ix)t} dt = \frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix} = \frac{2}{1+x^2}$.

b. Par exemple, pour $t \in \mathbb{R}$, on a $|f(x-t)g(t)| \leq \|f\|_{\infty} |g(t)|$ d'où l'intégrabilité. Si par exemple $x \geq 0$, on a
 $(h * h)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-t|} e^{-|t|} dt = \int_{-\infty}^0 e^{2t-x} dt + \int_0^x e^{-x} dt + \int_x^{+\infty} e^{x-2t} dt = (x+1)e^{-x}$. On effectue ensuite le changement de variable $u = -t$ pour constater la parité de $h * h$.

c. On calcule ensuite en utilisant le théorème de FUBINI : $\widehat{(f * g)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-u)g(u) du \right) e^{-ixt} dt =$
 $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-u) e^{-ixt} dt \right) g(u) du$ qui devient avec le changement de variable (facile à justifier) $v = t-u$:
 $\widehat{(f * g)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(v) e^{-ixt} dt \right) e^{-ixu} g(u) du = \left(\int_{\mathbb{R}} f(v) e^{-ixt} dt \right) \times \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ixu} g(u) du \right) = \widehat{f}(x) \times \widehat{g}(x)$.

3.26 La fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$ avec $3 > 1$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après le critère de RIEMANN. On effectue ensuite le changement de variable $x = \frac{1}{u}$ (les bonnes hypothèses sont vérifiées) car $I = \int_{\mathbb{R}_+} f = \int_{\mathbb{R}_+^*} f = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) du = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^3+1}$.

Alors $I = \frac{1}{2}(I+I) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^3+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

3.27 On vérifie que $]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0; 1]$ (ce qui par définition signifie que f est continue par morceaux sur tout segment inclus dans $]0; 1]$) : c'est le cas car f admet en $\frac{1}{n}$

($n \in \mathbb{N}^*$) des limites à gauche, à droite. f est intégrable car positive et majorée par 1 et $\int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^1 f$.

Or $\int_{1/n}^1 f = \sum_{k=2}^n \int_{1/k}^{1/(k-1)} f = \sum_{k=2}^n \left(\ln(k) - \ln(k-1) - \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) (k-1) \right) = \ln(n) - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$ par CHASLES.

Or on sait que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ donc $\int_{]0;1]} \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \right) dt = 1 - \gamma$ avec $\gamma \simeq 0,577$.

3.28 Continuité sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par prolongement par continuité donc intégrabilité. Puis changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ et somme. Réponse : $I_\alpha = \frac{\pi}{4}$. Si $\alpha = 0$, $\frac{1}{1 + \tan^\alpha(t)} = \frac{1}{2}$, I_0 converge et vaut $\frac{\pi}{4}$.

Si $\alpha < 0$, on prolonge encore par continuité sur le segment ; $\frac{1}{1 + \tan^\alpha(t)} + \frac{1}{1 + \tan^{-\alpha}(t)} = 1$ donc $I_\alpha = \frac{\pi}{4}$.

3.29 Par l'absurde, s'il existe $x \in [a; b]$ tel que $f(x) < 0$, alors on construit g de classe C^∞ positive telle que g soit strictement positive sur $]x - h; x + h[$ et nulle ailleurs (on l'a vu en cours avec la fonction h telle que $h(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $h(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$) d'où la contradiction. Ensuite, il suffit de prendre $m = \frac{1}{2} \min_{[a; b]} f$ qui existe car f est continue sur un segment et qui est strictement positif car il existe $c \in [a; b]$ tel que $\min_{[a; b]} f = f(c) > 0$.

3.30 Continuité sur $]a; b[$ et équivalent simple en a^+ et b^- donc intégrabilité avec RIEMANN : $\frac{1}{2} < 1$.

Changement de variable $u = \sqrt{\frac{t-a}{b-t}}$ ou $t = a + (b-a) \sin \theta$. Réponse : $I = \pi$.

3.31 Changement de variable $u = \pi - x$ sur la seconde intégrale pour avoir $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \int_{\pi/2}^\pi \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$. Puis $u = \tan(x)$ et décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples. Résultat : $I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

3.32 a. $f(t) = \frac{t-1}{\ln(t)}$ se prolonge par continuité à $[0; 1]$: $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ d'où la convergence de I .

b. On effectue le changement de variable $t = \varphi(x) = e^{-x}$ avec φ qui est bien une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0; 1[$ et on a $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$. On ne peut pas séparer directement l'intégrale en deux car $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ diverge. Par contre, pour $a > 0$, $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_a^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} dx$ ce qui en posant $u = 2x$ dans la dernière intégrale se ramène à $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \int_a^{2a} \frac{e^{-x}}{x} dx$. On a vu que ceci tendait vers $\ln(2)$ lundi dernier. Ainsi, $I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \ln(2)$.

3.33 Si $\alpha = 0$, on a $f = 0$ si $\beta > 0$, $f = 1$ si $\beta = 0$ et f non définie si $\beta < 0$.

On suppose dorénavant que $\alpha \neq 0$. Posons $f : t \mapsto |1 - t^\alpha|^\beta$, alors f est positive et continue sur $]0; 1[$.

• Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

• Si $\alpha < 0$, on a $\forall t \in]0; 1[, f(t) \sim t^{\alpha\beta}$ car $|1 - t^\alpha| = t^\alpha - 1 \sim t^\alpha$. Alors, par le critère de RIEMANN, f est intégrable sur $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ si et seulement si $-\alpha\beta < 1 \iff \alpha\beta > -1$.

• $f(t) = f(1-h) = \exp(\beta \ln |1 - (1-h)^\alpha|) = \exp(\beta \ln |\alpha h + o(h)|) = \exp(\beta \ln(h) + \beta \ln |\alpha| + o(1)) \sim (|\alpha|h)^\beta$ en posant $t = 1-h$ (avec $h \in]0; 1[$). Toujours d'après RIEMANN : f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ ssi $\beta > -1$.

(f est intégrable sur $]0; 1[$) $\iff (\alpha = 0 \text{ et } \beta \geq 0) \text{ ou } (\alpha > 0 \text{ et } \beta > -1) \text{ ou } (\alpha < 0 \text{ et } \beta < -1 \text{ et } \alpha\beta > -1)$.

3.34 $f(t) \sim \ln(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc f est intégrable sur $]0; 1[$ (référence ou RIEMANN). Par développements limités (ou asymptotiques) : $f(t) = (1+a+b) \ln(t) + \frac{a+2b}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Si $1+a+b \neq 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \pm\infty$ donc f n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$. De même, si $1+a+b = 0$ et $a+2b \neq 0$, on a $f(t) \sim \frac{a+2b}{t}$ donc f n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$ avec le critère de RIEMANN. Si $1+a+b = a+2b = 0$, alors $f(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable sur $[1; +\infty[$ par ce même critère. La CNS cherchée est donc $(a = -2 \text{ et } b = 1)$.

• Si $0 < x$, on a $F(x) = \int_1^x f(t)dt = [t \ln(t) - t - 2(t+1) \ln(t+1) + 2t + (t+2) \ln(t+2) - t]_1^x = [G(t)]_1^x$ (la valeur $G(1)$ disparaît). On sait que $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = [F(x)]_0^{+\infty} = [G(x)]_0^{+\infty}$. Mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = 2 \ln(2)$ alors que par DL, $G(x) = o(1)$ en écrivant $(x+1) \ln(x+1) = (x+1) \left(\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right)$.

Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt = -2 \ln(2)$. Une autre méthode ci-dessous.

• $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{t(t+2)}{(t+1)^2}\right)dt$. Avec $u(t) = \ln\left(\frac{t(t+2)}{(t+1)^2}\right)$ et $v(t) = t$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ (classique) : $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(t+1)(t+2)}$ qui se calcule aisément.

3.35 $\forall n \geq 2$, $v_n \leq u_n \leq w_n$ avec $v_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k) + 1}$ et $w_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$. $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ étant décroissante, continue sur $[2; +\infty[$: $\forall n \geq 3$, $f(2) + \int_3^{n+1} f(t)dt \leq w_n \leq f(2) + \int_2^n f(t)dt$ par comparaison série/intégrale. Or si $a \geq 2$: $\int_a^n f(t)dt = \left[\ln(\ln(t)) \right]_a^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(a))$ donc $w_n \sim \ln(\ln(n))$. De plus $\frac{1}{k \ln(k)} - \frac{1}{k \ln(k) + 1} \sim \frac{1}{k^2 \ln^2(k)} = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$, ainsi la série $\sum_{k \geq 2} \left(\frac{1}{k \ln(k)} - \frac{1}{k \ln(k) + 1} \right)$ converge ce qui se traduit par $w_n - v_n \sim O(1)$. Mais comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$, on a $u_n \sim w_n$; puis $v_n \sim \ln(\ln(n))$.

3.3 Intégrales impropres convergentes

3.36 a. Posons $f(t) = \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}$ pour $t > 0$, alors $f(t) \sim_{0^+} \frac{1}{t^{b-1}}$ donc u_n existe (et ceci indépendamment de la valeur de n) si et seulement si $b < 2$ par le critère de RIEMANN.

b. • Soit maintenant $b < 2$, alors comme $f(t) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2t^b}$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $b > 1$ et nous poserons dans ce cas $I_b = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt > 0$ (si $b \in]1; 2[$ donc).

• Si $b < 1$, par IPP, $\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt = \frac{\text{Arctan}(n)}{(1-b)n^{b-1}} - \int_0^n \frac{dt}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}}$ et $g : t \mapsto \frac{dt}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi $b > 0$ et dans ce cas, on note $J_b = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}} > 0$ (si $b \in]0; 1[$ donc).

• Si $b \leq 0$, comme $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt$ diverge, on a $\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt \sim_{+\infty} \int_1^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt$ et on encadre $\frac{\pi}{4} \int_1^n \frac{dt}{t^b} \leq \int_1^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt \leq \frac{\pi}{2} \int_1^n \frac{dt}{t^b}$ donc $\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt$ est "de l'ordre de" $\int_1^n \frac{dt}{t^b}$ donc de $\frac{1}{n^{b-1}}$.

• Si $b = 1$, $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$ diverge aussi, et comme $\int_1^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \int_1^n \frac{1}{t} dt - \int_1^n \frac{\text{Arctan}(1/t)}{t} dt$, on a $\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \sim_{+\infty} \frac{\pi \ln(n)}{2}$ car la fonction $t \mapsto \frac{\text{Arctan}(1/t)}{t}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

• Si $b \in]1; 2[$, on a donc $u_n \sim_{+\infty} \frac{I_b}{n^a}$ et $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si $a > 1$.

• Si $b \in]0; 1[$, on a donc $u_n \sim_{+\infty} \frac{\pi}{(1-b)n^{a+b-1}}$ et $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si $a + b > 2$.

• Si $b \in]-\infty; 0]$, on a donc (par majoration ou minoration) $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si $a + b > 2$.

• Si $b = 1$, on a $u_n \sim_{+\infty} \frac{\pi \ln(n)}{2n^a}$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si $a > 1$ (BERTRAND).

3.37 a. Par opérations, φ est de classe C^1 sur $]0; \pi]$. Par DL, on montre qu'on peut prolonger φ par $\varphi(0) = 0$ puis, par le théorème de prolongement C^1 , φ de classe C^1 sur $[0; \pi]$ avec $\varphi'(0) = -\frac{1}{24}$.

b. On l'a déjà fait en cours par une intégration par parties ; $I = \int_0^{+\infty} f(t)dt$.

c. Les $f_n : x \mapsto \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ sont continues sur $]0; \pi]$ et se prolongent par continuité en 0 en posant

$f_n(0) = n + \frac{1}{2}$. Ainsi, les I_n existent. De plus, $I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left((n + \frac{3}{2})x\right) - \sin\left((n + \frac{1}{2})x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} dx$. Or

$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ donc $I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi \cos((n+1)x) dx = 0$.

Ainsi, la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est constante et vaut $I_0 = \frac{\pi}{2}$.

d. Comme $F\left((n + \frac{1}{2})\pi\right) = \int_0^{(n+1/2)\pi} f(t)dt$, en posant le changement de variable $t = (n + \frac{1}{2})x$, on obtient

$F\left((n + \frac{1}{2})\pi\right) = \int_0^\pi \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})x\right)}{x} dx$ et on transforme $\frac{1}{x}$ en $\frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin(x/2)} + \frac{1}{2 \sin(x/2)}$ pour avoir la relation $F\left((n + \frac{1}{2})\pi\right) = \int_0^\pi \varphi(x) \sin\left((n + \frac{1}{2})x\right) dx + I_n$.

e. Comme on sait que, puisque φ est de classe C^1 sur $[0; \pi]$, on a $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(\lambda x) dx = 0$, d'après la question c. : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F\left((n + \frac{1}{2})\pi\right) = \frac{\pi}{2}$. Comme F admet comme limite I en $+\infty$, il vient finalement

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F\left((n + \frac{1}{2})\pi\right) = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

3.38 a. f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ car $f(t) \sim t$. de plus $f(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après RIEMANN et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

b. $\sin^3 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3it} - e^{-3it} - 3e^{it} + 3e^{-it}}{-8i} = \frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t)$.

c. Par linéarité de l'intégrale $I(x) = \frac{3}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt - \frac{1}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2} dt$ (les 2 intégrales convergent d'après

a.). Or $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2} dt = \int_{3x}^{+\infty} \frac{9 \sin u}{3u^2} du$ en posant $t = \frac{u}{3}$ donc $I(x) = \frac{3}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt - \frac{3}{4} \int_{3x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ ce qui donne bien $I(x) = \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ avec la relation de CHASLES.

d. On a $\psi(t) = \frac{t - t^3/6 + o(t^3) \sin t}{t^2} - \frac{1}{t} = -\frac{t}{6} + o(t)$ donc ψ se prolonge par continuité en 0 en posant $\psi(0) = 0$ donc ψ est bornée au voisinage de 0 car elle est continue sur $[0; 1]$ par exemple. Par conséquent $\int_x^{3x} \psi(t)dt = o(1)$. Or $\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt + \int_x^{3x} \psi(t)dt = \ln(3) + o(1)$. Au final, $\lim_{x \rightarrow 0} I(x) = \frac{3}{4} \ln(3) = I$.

3.39 a. $g : t \mapsto e^{-t^2}$ est C^∞ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ donc f est la primitive de g qui s'annule en 0 et à ce titre elle est bien définie, C^∞ et strictement croissante car $f' = g > 0$. Comme $g(t) = e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après RIEMANN donc $\int_0^{+\infty} g$ converge ce qui garantit une limite finie pour f en $+\infty$.

b. C'est une inégalité de convexité (plutôt de concavité d'ailleurs) qu'on démontre aisément en étudiant $\varphi : x \mapsto x - \ln(1+x)$ sur $] -1; +\infty[$. En effet $\varphi'(x) = \frac{x}{1+x}$ et $\varphi(0) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, \sqrt{n}[$ alors $x = \frac{t^2}{n}$ et $y = -\frac{t^2}{n}$ appartiennent à $] -1; +\infty[$.

Ainsi $\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}$ qu'on multiplie par n et qu'on compose par la fonction $\exp$ qui est croissante pour obtenir $\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{t^2}$. En passant à l'inverse, on a bien $e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

De même $\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n}$ qu'on multiplie par n et qu'on compose par $\exp$: $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$.

On a bien $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ pour $t \in [0, \sqrt{n}]$. Pour $t = \sqrt{n}$, $0 \leq e^{-n} \leq 2^{-n}$ car $2 < e$.

c. $\varphi : \theta \mapsto \sqrt{n} \cos(\theta)$ est une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0; \sqrt{n}]$. En posant

$$t = \sqrt{n} \cos(\theta), \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_{\pi/2}^0 \left(1 - \frac{n \cos^2 \theta}{n}\right)^n (-\sqrt{n} \sin \theta) d\theta = \sqrt{n} I_{2n+1} \text{ car } 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta.$$

d. $\psi : \theta \mapsto \sqrt{n} \cotan(\theta)$ est une bijection C^1 strictement décroissante de $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0; \sqrt{n}]$. Ainsi

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + (t^2/n)\right)^n} dt = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{1}{\left(1 + \cotan^2 \theta\right)^n} \left(-\frac{\sqrt{n}}{\sin^2 \theta}\right) d\theta = \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2} \theta d\theta \leq \sqrt{n} I_{2n-2}.$$

e. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on intègre sur $[0; \sqrt{n}]$ avec **b.**, **c.** et **d.** : $\sqrt{n} I_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$. Comme classiquement $I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} I_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} I_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par encadrement, on a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\sqrt{n}) = I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ ce qui s'écrit aussi } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3.40 a. Si $x \geq 2$, $\int_{x/2}^{+\infty} f(t) dt \geq \int_{x/2}^x f(t) dt \geq \frac{x}{2} f(x)$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$ car l'intégrale converge. Si $x \geq 1$,

$$\int_1^x t(f(t) - f(t+1)) dt = \int_1^x t f(t) dt - \int_1^x t f(t+1) dt = \int_1^x t f(t) dt - \int_2^{x+1} (t-1) f(t) dt. \text{ Ainsi, comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0 : \int_1^x t(f(t) - f(t+1)) dt = \int_1^2 t f(t) dt - \int_x^{x+1} t f(t) dt + \int_2^{x+1} f(t) dt \text{ donc on parvient à } \int_1^{+\infty} t(f(t) - f(t+1)) dt = \int_1^2 t f(t) dt + \int_2^{+\infty} f(t) dt.$$

b. D'après RIEMANN $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx$ converge et d'après **a.**, on a $\int_1^{+\infty} x \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx = \ln(2) + \frac{1}{2}$ si $\alpha = 2$ et $\int_1^{+\infty} x \left(\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{(x+1)^\alpha}\right) dx = \frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{1}{2-\alpha} + \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ sinon.

3.41 La fonction $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ est continue et négative sur $]0; 1[$ et se prolonge

par continuité en 1 avec $f(1) = 0$ car $\ln(x) \sim_{x \rightarrow 1^-} x-1$ donc $f(x) \sim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{(1+x)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \sim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\sqrt{1-x}}{2\sqrt{2}}$. De plus, au

voisinage de 0, $f(x) \sim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ par croissances comparées. Au final, d'après les intégrales de RIEMANN

$\left(\frac{1}{2} < 1\right)$, f est bien intégrable sur $]0; 1[$ ce qui prouve la convergence de $\int_0^1 f$.

La fonction $\sin$ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $]0; 1[$, ce qui prouve par

$$\text{changement de variable que } I = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin \theta)}{(1 + \sin \theta) \cos \theta} \cos \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin \theta)}{1 + \sin \theta} d\theta.$$

Pour reconnaître le changement de variable proposé, qui est valide car $\theta \mapsto \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est une bijection de classe

C^1 strictement croissante de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0; 1[$ et que la fonction $t \mapsto \frac{2}{(1+t)^2} \ln\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)$ est continue sur

$]0; 1[$, on transforme I par trigonométrie en $I = \int_0^{\pi/2} \ln \left(\frac{2 \tan(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} \right) \frac{1}{1 + \frac{2 \tan(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}} d\theta$ ce qui s'écrit aussi

$$I = \int_0^{\pi/2} 2 \ln \left(\frac{2 \tan(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} \right) \frac{1}{1 + \tan^2(\theta/2) + 2 \tan(\theta/2)} \times \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) d\theta.$$

Par théorème de changement de variable, $I = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2} \ln \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) dt$. On pose alors $u(t) = \ln \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)$ et $v(t) = 2 - \frac{2}{1+t} = \frac{2t}{1+t}$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $]0; 1[$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées car $u(t) \sim \ln(t)$ et $v(t) \sim 2t$. Comme $u(1)v(1) = 0$, par intégration par parties, comme $u'(t) = \frac{(1-t^2)}{t(1+t^2)}$ et $v'(t) = \frac{2}{(1+t)^2}$, il vient $I = - \int_0^1 \frac{2(1-t)}{(1+t^2)^2} dt = -2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^1 \frac{2tdt}{1+t^2} = [\ln(1+t^2) - 2 \operatorname{Arctan}(t)]_0^1 = \ln(2) - \frac{\pi}{2} \sim -0.87$.

3.4 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

3.42 Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, $F_x : y \mapsto \int_x^y e^{t^2} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'_x(y) = e^{y^2} \geq 1$. Donc F_x est de classe C^∞ , strictement croissante. $\lim_{y \rightarrow +\infty} F_x(y) = +\infty$ car $\forall y \geq x$, $F_x(y) \geq \int_x^y dt = y - x$. Si $y \leq x$, $F_x(y) \leq y - x$ donc $\lim_{y \rightarrow -\infty} F_x(y) = -\infty$. $F_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est donc bijective : $\exists ! y = f(x) \in [x; +\infty[$, $\int_x^{f(x)} e^{t^2} dt = 1$.

Comme $f(x) \geq x$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Si $x \geq 0$, $(f(x) - x)e^{x^2} \leq \int_x^{f(x)} e^{t^2} dt \leq (f(x) - x)e^{f(x)^2}$ par croissance de $t \mapsto e^{t^2}$ sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $f(x) - x \leq e^{-x^2}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$. L'inégalité précédente montre que $f(x) - x \sim e^{-x^2}$ car $e^{-(f(x)^2 - x^2)} \leq \frac{f(x) - x}{e^{-x^2}} \leq 1$ et $0 \leq f(x)^2 - x^2 \leq e^{-x^2} (2x + e^{-x^2})$.

Comme $\int_x^{f(x)} e^{t^2} dt = 1 \geq \int_x^{f(x)} dt = f(x) - x$, on a : $f(x) \leq x + 1$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

On montrerait de même que $f(x) - x$ est équivalent à e^{-x^2} quand x tend vers $-\infty$.

La fonction f est strictement croissante car si $x < x'$, on a $1 = \int_x^{f(x)} e^{t^2} dt > \int_{x'}^{f(x)} e^{t^2} dt$ donc $1 = \int_{x'}^{f(x')} e^{t^2} dt = F_{x'}(f(x')) > F_{x'}(f(x))$ et $F_{x'}$ étant strictement croissante, $f(x) < f(x')$.

Mieux, par CHASLES : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_0(f(x)) - F_0(x) = 1$ donc $f(x) = F_0^{-1}(F_0(x) + 1)$ et comme F_0^{-1} est de classe C^∞ car F_0 ne s'annule pas, on a f de classe C^∞ par composée et on retrouve les limites en $\pm\infty$ déjà établies.

Par parité de $t \mapsto e^{t^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_x^{f(x)} e^{t^2} dt = \int_{-f(x)}^{-x} e^{t^2} dt = 1$ donc $f(-f(x)) = -x$. Si le point de coordonnées $(x, f(x))$ appartient au graphe de la fonction f , le point de coordonnées $(-f(x), -x)$ aussi : le graphe de la fonction f est symétrique (par une symétrie orthogonale) par rapport à la droite $y + x = 0$.

3.43 a. Si $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{x + \sin^2(t)}$ est continue sur $[0; \frac{1}{x}]$ donc $F(x)$ existe. Si $0 < x < y$, on a

$F(x) = \int_0^{1/y} \frac{dt}{x + \sin^2(t)} + \int_{1/y}^{1/x} \frac{dt}{x + \sin^2(t)} \geq \int_0^{1/y} \frac{dt}{x + \sin^2(t)} \geq \int_0^{1/y} \frac{dt}{y + \sin^2(t)}$ donc F est décroissante.

b. On a $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x + \sin^2(t)} \leq \frac{1}{x}$ donc, en intégrant $\frac{1}{x(x+1)} \leq F(x) \leq \frac{1}{x^2}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ et on a même l'équivalent $F(x) \sim \frac{1}{x^2}$. Par minoration, $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = +\infty$.

c. On prend, pour $x > 0$, n_x tel que $n_x \pi \leq \frac{1}{x} \leq (n_x + 1)\pi$ ce qui se traduit par $n_x = \left\lfloor \frac{1}{x\pi} \right\rfloor$. Alors, par π -périodicité de l'intégrande et CHASLES, on a $\left| F(x) - n_x \int_0^\pi \frac{dt}{x + \sin^2(t)} \right| \leq \int_{n_x \pi}^{1/x} \frac{dt}{x + \sin^2(t)} \leq \frac{\pi}{x}$.

$$\int_0^\pi \frac{dt}{x + \sin^2(t)} = \int_0^{\pi/2} \frac{2dt}{x + \sin^2(t)} = \int_0^{+\infty} \frac{2du}{x(1+u^2) + u^2} = 2 \left[\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} u \right) \right]_0^{+\infty} \text{ donc}$$

$$\int_0^\pi \frac{dt}{x + \sin^2(t)} = \frac{\pi}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}} \text{ car } \sin(\pi - t) = \sin(t) \text{ et grâce au changement de variable } u = \tan(t).$$

Ainsi : $F(x) \sim \frac{1}{x\sqrt{x}} \text{ car } \frac{\pi}{x} = o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).$

3.44 a. Soit F la primitive de f qui s'annule en 0. Alors $\forall x > 0$, $g(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x}$ donc, comme F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $F' = f$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = F'(0) = f(0)$.

On dérive $g(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x}$ pour obtenir : $\forall x > 0$, $g'(x) = -\frac{F(x) - F(0)}{x^2} + \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - g(x)}{x}$.

Avec $0 < a < b$, on a par IPP, en posant $u(t) = g^2(t)$ et $v(t) = t$, u et v de classe C^1 sur $[a; b]$ d'où : $\int_a^b g^2(t)dt = [tg^2(t)]_a^b - 2 \int_a^b (f(t) - g(t))g(t)dt$. Ainsi : $\int_a^b g^2(t)dt = 2 \int_a^b f(t)g(t)dt + ag^2(a) - bg^2(b)$.

b. Grâce à l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, $\int_a^b f(t)g(t)dt \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}$. On le reporte ci-dessus : $\int_a^b g^2(t)dt \leq 2\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} + ag^2(a) - bg^2(b) \leq 2\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} + ag^2(a)$.

c. • On a un double produit : $\int_a^b g^2(t)dt - 2\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} + \int_a^b f^2(t)dt \leq ag^2(a) + \int_a^b f^2(t)dt$ ce qui équivaut à $\left(\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} - \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \right)^2 \leq ag^2(a) + \int_a^b f^2(t)dt$. En passant à la racine, comme $\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} - \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \leq \left| \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} - \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \right|$ et $\int_a^b f^2(t)dt \leq \int_0^{+\infty} f^2(t)dt$ par intégrabilité de f^2 sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)dt} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t)dt}$.

On fait tendre a vers 0 (on le peut) : $\sqrt{\int_0^b g^2(t)dt} \leq 2\sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)dt}$. Ainsi $b \mapsto \int_0^b g^2(t)dt$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$: g est de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

En passant à la limite quand $b \rightarrow +\infty$: $\sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(t)dt} \leq 2\sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)dt}$.

• On peut passer à la limite quand $a \rightarrow 0^+$ dans la relation de a. : $\int_0^b g^2(t)dt = 2 \int_0^b f(t)g(t)dt - bg^2(b)$. Comme f et g sont de carrés intégrables sur $\mathbb{R}_+$, on sait qu'alors fg est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc les intégrales $\int_0^{+\infty} g^2(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$ convergent ce qui montre l'existence de $\lim_{b \rightarrow +\infty} bg^2(b) = \ell \in \mathbb{R}_+$. Si on avait $\ell > 0$, alors on aurait $g^2(x) \sim \frac{\ell}{x}$ ce qui contredit l'intégrabilité de g^2 sur $\mathbb{R}_+$ par critère de RIEMANN. Ainsi

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} bg^2(b) = 0 \text{ et en passant à la limite quand } b \text{ tend vers } +\infty : \int_0^{+\infty} g^2(t)dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt.$$

3.45 a. Bien sûr que non, on a vu dans le cours un contre-exemple d'une fonction continue par morceaux, positive, intégrable et qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

b. Avec $\sin(x-t) = \sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t)$ et la linéarité de l'intégrale, comme les fonctions sont toutes continues sur le segment $[0; x]$, $\forall x \geq 0$, $g(x) = f(x) + \sin(x) \int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt - \cos(x) \int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt$. Comme $\cos a f$ et $\sin a f$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration, la dérivée de fonction $x \mapsto \int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt$ est $x \mapsto \cos(x)a(x)f(x)$, et $\left(\int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt \right)' = \sin(x)a(x)f(x)$. Par opérations et simplifications, $g'(x) = f'(x) + \cos(x) \int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt + \sin(x) \int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt$. Puis,

$g''(x) = f''(x) - \sin(x) \int_0^x \cos(t)a(t)f(t)dt + \cos(x) \int_0^x \sin(t)a(t)f(t)dt + \cos^2(x)a(x)f(x) + \sin^2(x)a(x)f(x)$ donc
 $g''(x) = f''(x) + f(x) - g(x) + a(x)f(x) = -g(x)$ donc $g'' + g = 0$ (E) sur $\mathbb{R}_+$.

c. Les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}_+$ de cette équation différentielle (E) sont les fonctions g telles que $\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \geq 0, g(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$ donc $|g| \leq |A| + |B| = C$ par exemple et g est bornée. Comme $f(x) = g(x) - \int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t)dt$, en passant aux valeurs absolues avec l'inégalité triangulaire, on obtient, $\forall x \geq 0, |f(x)| \leq |g(x)| + \int_0^x |\sin(x-t)||a(t)||f(t)|dt \leq C + \int_0^x |a(t)f(t)|dt$ car $|\sin| \leq 1$.

d. Posons $h : x \mapsto \int_0^x |a(t)f(t)|dt$, comme la fonction $|a||f|$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $h'(x) = |a(x)||f(x)| \leq C|a(x)| + |a(x)|h(x)$ d'après la question **c.**. En notant $A(x) = \int_0^x |a(t)|dt$, on a $(e^{-A(x)}h(x))' \leq C|a(x)|e^{-A(x)} = C(-e^{-A(x)})'$. On intègre cette inégalité entre 0 et x pour avoir $e^{-A(x)}h(x) \leq C(1 - e^{-A(x)}) \leq C$. Alors, on peut majorer $\forall x \geq 0, h(x) \leq Ce^{A(x)}$ et comme a est intégrable, A est croissante (car $A' = |a| \geq 0$) et possède une limite finie $C \exp\left(\int_0^{+\infty} |a(t)|dt\right)$ en $+\infty$ donc A est bornée sur $\mathbb{R}_+$, d'où h est bornée sur $\mathbb{R}_+$ car $|h| \leq Ce^A$. Enfin, f est aussi bornée sur $\mathbb{R}_+$ car $|f| \leq C + h$.

Toutes les solutions sur $\mathbb{R}_+$ de (E) sont des fonctions bornées sur $\mathbb{R}_+$ si a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3.46 a. $\varphi_\alpha : t \mapsto \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $\alpha < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_\alpha(t) = +\infty$, si $\alpha = 0$, $\varphi_\alpha(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ divergent car $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$ (RIEMANN).

De plus, si $\alpha > 0$, on a $\varphi_\alpha(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\varphi_\alpha(t) \underset{0+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ convergent.

b. Pour $\alpha > 0$, on effectue le changement de variable $x = \alpha t$ (avec $t \rightarrow \alpha t$ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $[1; +\infty[$ dans $[\alpha; +\infty[$) dans les deux intégrales pour avoir $I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_\alpha^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ et $J(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$. Alors $J(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ avec le changement de variable $x = u^2$.

Par une simple IPP, comme $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto -e^{-x}$ sont de classe C^1 sur $[\alpha; +\infty[$ et que le crochet converge :

$$\sqrt{\alpha} I(\alpha) = \left[-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \right]_\alpha^{+\infty} - \int_\alpha^{+\infty} \frac{e^{-x}}{2x\sqrt{x}} dx \text{ avec } \left| \int_\alpha^{+\infty} \frac{e^{-x}}{2x\sqrt{x}} dx \right| \leq \frac{1}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \int_\alpha^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{e^{-\alpha}}{2\alpha\sqrt{\alpha}}.$$

Comme $\left[\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \right]_\alpha^{+\infty} = \frac{e^{-\alpha}}{\sqrt{\alpha}}$ et $\frac{e^{-\alpha}}{2\alpha\sqrt{\alpha}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\right)$, il vient $\sqrt{\alpha} I(\alpha) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-\alpha}}{\sqrt{\alpha}}$ donc $I(\alpha) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$.

3.47 a. D'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \cos(x-t)f(t)$ est continue sur $[0; x]$ donc le réel $u(f)(x)$ existe bien (intégrale d'une fonction continue sur un segment). La fonction $u(f)$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, puisque par trigonométrie on a $\cos(x-t) = \cos(x)\cos(t) + \sin(x)\sin(t)$, on peut écrire par linéarité de l'intégrale que $\forall x \in \mathbb{R}, u(f)(x) = \cos(x) \int_0^x \cos(t)f(t)dt + \sin(x) \int_0^x \sin(t)f(t)dt$ ce qui garantit que $u(f)$ est continue car les fonctions $t \mapsto \cos(t)f(t)$ et $t \mapsto \sin(t)f(t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ ce qui montre que les fonctions $t \mapsto \int_0^x \cos(t)f(t)dt$ et $t \mapsto \int_0^x \sin(t)f(t)dt$ sont aussi continues sur $\mathbb{R}$ (elles sont d'ailleurs même de classe C^1 , voir **b.**). Enfin la linéarité de u provient de celle de l'intégrale, il suffit de l'écrire.

Par conséquent, u est un endomorphisme de E .

b. $t \mapsto \int_0^x \cos(t)f(t)dt$ et $t \mapsto \int_0^x \sin(t)f(t)dt$ étant respectivement les primitives s'annulant en 0 des fonctions $t \mapsto \cos(t)f(t)$ et $t \mapsto \sin(t)f(t)$ par le théorème fondamental de l'intégration, et puisque d'après **a.** on a $\forall x \in \mathbb{R}, u(f)(x) = \cos(x) \int_0^x \cos(t)f(t)dt + \sin(x) \int_0^x \sin(t)f(t)dt$, la fonction $u(f)$ est, par opérations, de

classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $u(f)'(x) = f(x) - \sin(x) \int_0^x \cos(t)f(t)dt + \cos(x) \int_0^x \sin(t)f(t)dt$ car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Ainsi, u n'est pas surjective car les fonctions continues qui ne sont pas de classe C^1 (comme la valeur absolue par exemple) n'auront pas d'antécédent par u . On peut aussi constater que $u(f)(0) = 0$ ce qui montre que les fonctions dont la valeur en 0 n'est pas nulle ne peuvent pas être dans $\text{Im}(u)$ non plus.

c. Si $f \in \text{Ker}(u)$, $u(f) = 0$ donc $u(f)' = 0$ d'où $f(x) = \sin(x) \int_0^x \cos(t)f(t)dt - \cos(x) \int_0^x \sin(t)f(t)dt$ (1) pour tout réel x d'après le calcul précédent. Ainsi, comme avant, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on peut dériver une fois de plus, ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x) \int_0^x \cos(t)f(t)dt + \sin(x) \int_0^x \sin(t)f(t)dt = u(f)(x) = 0$ après simplifications. Ainsi, f est constante car $\mathbb{R}$ est un intervalle. Mais comme $f(0) = 0$ par la relation (1) ci-dessus, f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ ce qui prouve que $\text{Ker}(f) = \{0\}$. Ainsi, u est injective.

3.48 a. Si $x > a$, on a $\forall t \geq 0$, $|f(t)e^{-xt}| = |f(t)|e^{-xt} \leq Ce^{at}e^{-xt} = Ce^{-(x-a)t}$ et $t \mapsto e^{-(x-a)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $x - a > 0$ (fonction de référence). Ainsi, par comparaison, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ est absolument convergente donc convergente et $F(x)$ existe.

b. Comme $a \leq 0$, F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après a.. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1) = 0$ ce qui nous incite à écrire, pour $x > 0$, $x F(x) = x \int_0^{+\infty} (f(t) - 1 + 1)e^{-xt}dt = x \int_0^{+\infty} (f(t) - 1)e^{-xt}dt + x \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt$ ce qui donne $x F(x) = x \int_0^{+\infty} (f(t) - 1)e^{-xt}dt + x \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty} = x \int_0^{+\infty} (f(t) - 1)e^{-xt}dt + 1$. Par conséquent, on a l'expression plus compacte $x F(x) - 1 = \int_0^{+\infty} (f(t) - 1)e^{-xt}xdt$.

Revenons à la définition de la limite. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $m \geq 0$ tel que $\forall x \geq m$, $|f(x) - 1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On peut

donc écrire avec CHASLES $x F(x) - 1 = \int_0^m (f(t) - 1)e^{-xt}xdt + \int_m^{+\infty} (f(t) - 1)e^{-xt}xdt$. Comme f est continue sur le segment $[0; m]$, $f - 1$ est bornée (par M) sur ce segment donc, par inégalités triangulaire sur les réels et sur les intégrales : $|x F(x) - 1| \leq Mx \int_0^m e^{-xt}dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_m^{+\infty} e^{-xt}xdt \leq M(1 - e^{-xm}) + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{+\infty} e^{-xt}xdt$.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow 0^+} M(1 - e^{-xm}) = 0$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0; \alpha]$, $0 \leq M(1 - e^{-xm}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit, puisque $\int_0^{+\infty} e^{-xt}xdt = 1$, que si $x \in]0; \alpha]$, on a $|x F(x) - 1| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x F(x) = 1$.

Autre méthode : On pouvait aussi le faire avec le théorème de convergence dominée à paramètre continu qu'on verra plus tard dans l'année. En effet, en posant $t = \frac{u}{x} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, on a $x F(x) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u}du$ pour $x > 0$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et admet une limite finie en $+\infty$, il est classique que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

$$(H_1) \quad \forall u \in \mathbb{R}_+, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u} = h(u) = e^{-u} \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

$$(H_2) \quad \forall x \in]a; +\infty[, \text{ la fonction } u \mapsto f\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u} \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R}_+, \text{ h aussi.}$$

$$(H_3) \quad \forall (u, x) \in \mathbb{R}_+ \times]a; +\infty[, \left| f\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u} \right| \leq \|f\|_{\infty, \mathbb{R}_+} e^{-u} = \psi(u) \text{ et } \psi \text{ est continue et intégrable sur } \mathbb{R}_+.$$

Par le théorème évoqué, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x F(x) = \int_0^{+\infty} h(u)du = \int_0^{+\infty} e^{-u}du = 1$.

3.49 La fonction $g : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ est continue, positive sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, $\forall x \in J = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}$ donc, puisque $\tan(u) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}$, on a l'équivalent $g(x) \sim_{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - x}}$ donc g est intégrable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $\frac{1}{2} < 1$. Ainsi, $\int_0^{\pi/2} g(t)dt$ converge donc I existe.

La fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ est de classe C^1 , bijective et strictement croissante de J dans $\mathbb{R}_+^*$ et on a $\varphi'(x) = \frac{1 + \tan^2(x)}{2\sqrt{\tan(x)}}$. Comme on a $g(x) = \sqrt{\tan(x)} = \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)} \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \varphi'(x)$ en posant

$f : u \mapsto \frac{2u^2}{1+u^4}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de changement de variable montre que, en posant

$u = \sqrt{\tan(x)} = \varphi(x)$, on a la relation $I = \int_0^{+\infty} f(u)du$. Il y a maintenant deux méthodes :

(1) Par le changement de variable $u = \frac{1}{v} = \psi(v)$, comme ψ réalise une bijection C^1 strictement décroissante

de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, $\int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4} du = \int_{+\infty}^0 \frac{2(1/v)^2}{1+(1/v)^4} \left(-\frac{1}{v^2}\right) dv = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+v^4} dv$ après simplifications.

Or $I = \int_0^{+\infty} \frac{2u}{1+u^4} du = \left[\text{Arctan}(u^2) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. De plus, on peut décomposer le dénominateur

avec les identités remarquables car $1+u^4 = (1+u^2)^2 - 2u^2 = (u^2 - \sqrt{2}u + 1)(u^2 + \sqrt{2}u + 1)$ ce qui nous incite à écrire $I + \sqrt{2}L + I = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4} du + \int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{2}u}{1+u^4} du + \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+u^4} du$ d'où

$I + \sqrt{2}L + I = \int_0^{+\infty} \frac{2(u^2 + \sqrt{2}u + 1)}{(u^2 - \sqrt{2}u + 1)(u^2 + \sqrt{2}u + 1)} du$ donc, avec des techniques classiques, on obtient

$I + \sqrt{2}L + I = \int_0^{+\infty} \frac{2}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} du = \int_0^{+\infty} \frac{4}{(\sqrt{2}u - 1)^2 + 1} du = 2\sqrt{2} \left[\text{Arctan}(\sqrt{2}u - 1) \right]_0^{+\infty} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}$.

On en déduit que $I = \frac{1}{2} \left(\frac{3\sqrt{2}\pi}{2} - \sqrt{2}L \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(2) Par une décomposition en éléments simples classique (mais hors programme en PSI) on arrive à la

relation $\frac{2u^2}{1+u^4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{u}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{u}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2u - \sqrt{2} + \sqrt{2}}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{2u + \sqrt{2} - \sqrt{2}}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right)$

donc $\frac{2u^2}{1+u^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2u - \sqrt{2}}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} - \frac{2u + \sqrt{2}}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right) + \frac{1}{2(u^2 - \sqrt{2}u + 1)} + \frac{1}{2(u^2 + \sqrt{2}u + 1)}$ et, après

calculs, $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln \left(\frac{u^2 - \sqrt{2}u + 1}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} \right) \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\text{Arctan}(\sqrt{2}u - 1) + \text{Arctan}(\sqrt{2}u + 1) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

3.50 a. D'après le théorème de la limite monotone, la fonction h admet en $+\infty$ une limite ℓ finie ou $-\infty$ car elle

est décroissante. Or $\int_0^{+\infty} h$ converge ce qui n'est possible que si $\ell = 0$. Ainsi, comme h est décroissante et

de limite nulle en $+\infty$, elle ne peut être que positive sur $\mathbb{R}_+$.

b. Pour $t > 0$, comme h est positive, la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est croissante si $S_n = \sum_{k=0}^n h(kt)$. De plus, pour

tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $t h(kt) = \int_{(k-1)t}^{kt} h(kt) du \leq \int_{(k-1)t}^{kt} h(u) du$ par croissance de l'intégrale car h est

décroissante sur $[(k-1)t; kt]$. En sommant pour $k \in [1; n]$ et par CHASLES, on obtient la majoration

$tS_n = th(0) + t \sum_{k=1}^n h(kt) \leq th(0) + \int_0^{nt} h(u) du \leq th(0) + \int_0^{+\infty} h(u) du$.

La suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est donc croissante et majorée donc elle converge, ce qui montre la convergence de $\sum_{n \geq 0} h(nt)$.

3.51 Comme $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t \ln(1+t)}$ est continue sur $[1; +\infty[$, la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t \ln(1+t)} dt$ est équivalente à

celle de $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t \ln(1+t)} dt$. On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t \ln(1+t)} dt$ de sorte que u_n est du signe

de $(-1)^n$ et la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est donc alternée. Avec $t = u + n\pi$, $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{(u + n\pi) \ln(1 + u + n\pi)} du$.

Clairement $(u + n\pi) \ln(1 + u + n\pi) \leq (u + (n+1)\pi) \ln(1 + u + (n+1)\pi)$ donc la suite $(|u_n|)_{n \geq 1}$ est décroissante et puisque $|u_n| \leq \int_0^\pi \frac{1}{n\pi \ln(1 + n\pi)} \leq \frac{\pi}{n\pi \ln(1 + n\pi)}$ en majorant brutalement, on en conclut

que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$. Par le critère spéciale des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et on note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

sa somme mais aussi les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

Soit $x \geq \pi$, si on note n_x le plus grand entier tel que $n_x\pi \leq x < (n_x+1)\pi$, on a d'après le relation de CHASLES :

$\int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t \ln(1+t)} dt = S_{n_x-1} + \int_{n_x\pi}^x \frac{\sin(t)}{t \ln(1+t)} dt$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} n_x = +\infty$ car $n_x = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_{n_x-1} = S$ et $\left| \int_{n_x\pi}^x \frac{\sin(t)}{t \ln(1+t)} dt \right| \leq \frac{(x - n_x\pi)}{x \ln(1+x)} \leq \frac{\pi}{x \ln(1+x)}$ qui tend vers 0 en $+\infty$. Par somme, $x \mapsto \int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t \ln(1+t)} dt$ admet une limite finie en $+\infty$ donc $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t \ln(1+t)} dt$ converge et $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t \ln(1+t)} dt = S$.

On pouvait aussi poser $u(t) = \frac{1}{t \ln(1+t)}$ et $v(t) = -\cos(t)$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$.

Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t \ln(1+t)} dt$ et $\int_1^{+\infty} \cos(t) \left(-\frac{1}{t^2 \ln(1+t)} - \frac{1}{t(t+1) \ln(1+t)^2} \right) dt$ sont de même nature. Or $g : t \mapsto -\frac{1}{t^2 \ln(1+t)} - \frac{1}{t(t+1) \ln(1+t)^2}$ vérifie $g(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ce qui justifie l'intégrabilité de g sur $[1; +\infty[$. Par conséquent $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t \ln(1+t)} dt$ converge.

Par contre, f n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$. En effet, on pose $u_n = \int_\pi^{n\pi} |f| = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(t)| dt$ et $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(t)| \geq \int_{k\pi+\pi/6}^{(k+1)\pi-\pi/6} |f(t)| dt \geq \frac{1}{2} \int_{k\pi+\pi/6}^{(k+1)\pi-\pi/6} \frac{1}{t \ln(1+t)} dt \geq \frac{\pi}{3} \times \frac{1}{(k+1)\pi \ln((k+1)\pi)} = w_k$.

Ainsi $u_n \geq \sum_{k=1}^{n-1} w_k$ et la série $\sum_{k \geq 1} w_k$ diverge (séries de BERTRAND car $w_k \sim \frac{1}{3k \ln(k)}$) par comparaison à une intégrale. Encore un cas de fonction non intégrable dont l'intégrale converge.

3.52 a. Par intégration par parties, comme f est de classe C^1 sur $[a; b]$ et que $\cos$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, on a, pour

tout entier $n \geq 1$, la relation $I_n = \left[-\frac{1}{n} \cos(nt) f(t) \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt$. Comme f' est continue sur le segment $[a; b]$, il existe $M \geq 0$ tel que $\forall t \in [a; b], |f'(t)| \leq M$. Par inégalités triangulaires, on obtient $|I_n| \leq \frac{1}{n} (|f(a)| + |f(b)| + (b-a)M)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ (lemme de RIEMANN-LEBESGUE).

b. Tout d'abord, $g : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$ car $\sin(t) \sim t$. En posant $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto 1 - \cos(t)$, les fonctions u et v sont de classe C^1

sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0$ car $1 - \cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par $1 - \cos(t) = O(1)$. Les intégrales

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ sont donc de même nature. Or $g : t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est continue et positive

sur $\mathbb{R}_+^*$, prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = \frac{1}{2}$ toujours car $1 - \cos(t) \sim \frac{t^2}{2}$ et $|g(t)| \leq \frac{2}{t^2}$

ce qui garantit son intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ converge car elle converge absolument,

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge aussi et on admet que $A = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$ (DIRICHLET).

c. La fonction $f_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)^2}{n \sin(t)^2}$ est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant

$f_n(0) = n$ car $\sin(nt) \sim nt$ et $\sin(t) \sim t$ donc $f_n(t) \sim \frac{n^2 t^2}{t^2} = n^2$. Ainsi, J_n est bien définie pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Or on sait que $\cotan'(t) = -\frac{1}{\sin^2(t)}$ et $\cotan(t) \sim \frac{1}{t}$ donc, en posant $u = -\cotan$ et $v : t \mapsto \sin(nt)^2$, les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ et comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} \cotan(t) \sin(nt)^2 = 0$, par intégration par parties, on a $J_n = \left[-\frac{\cotan(t) \sin(nt)^2}{n} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2 \sin(nt) \cos(nt) \cotan(t) dt = \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) \cotan(t) dt$.
L'équivalent de $\cotan$ en 0 nous incite à écrire $J_n = \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) \left(\cotan(t) - \frac{1}{t} \right) dt + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt$ (les deux intégrales convergent car $\frac{\sin(2nt)}{t} \sim 2n$). Comme on se rappelle que $\tan(t) = t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$, on a $\cotan(t) - \frac{1}{t} = \frac{1}{t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{3} + o(t^2)} - 1 \right) = \frac{1}{t} \left(1 - \frac{t^2}{3} - 1 + o(t^2) \right) = -\frac{t}{3} + o(t)$.
Ainsi, la fonction $h : t \mapsto \cotan(t) - \frac{1}{t}$ se prolonge par continuité (avec $h(0) = 0$) en une fonction dérivable sur le segment $[0; \frac{\pi}{2}]$ avec $h'(0) = -\frac{1}{3}$. Comme $h'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sin^2(t)}$, le calcul analogue $\frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sin^2(t)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)} = \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{t^2}{3} + o(t^2)} \right) = \frac{1}{t^2} \left(1 - (1 + \frac{t^2}{3}) + o(t^2) \right) = -\frac{1}{3} + o(1)$ nous permet de conclure que h est de classe C^1 sur le segment $[0; \frac{\pi}{2}]$ car $\lim_{t \rightarrow 0^+} h'(t) = -\frac{1}{3} = h'(0)$. La première question nous apprend alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \left(\cotan(t) - \frac{1}{t} \right) \sin(2nt) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} h(t) \sin(2nt) dt = 0$.
De plus, par le changement de variable $t = \varphi(u) = \frac{u}{2n}$, comme φ réalise une bijection strictement croissante de classe C^1 de $]0; n\pi]$ dans $]0; \frac{\pi}{2}]$, on a la relation $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt = \int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{u} du$ et cette quantité tend vers A quand n tend vers $+\infty$ d'après la question **b.**. Au final, en sommant, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.
En fait, la suite $(J_n)_{n \geq 1}$ est constante et elle vaut $\frac{\pi}{2}$, mais c'est une autre histoire !

3.53 a. f est définie et dérivable par opérations sur $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2(k+1)\pi - \frac{\pi}{2}[$ (là où $\sin$ ne vaut pas -1).

Pour $x \in D$, comme $\frac{1 - \sin(x)}{1 + \sin(x)} = \frac{2}{1 + \sin(x)} - 1$, $f'(x) = \left(-\frac{2 \cos(x)}{(1 + \sin(x))^2} \right) \times \frac{(1 + \sin(x))^2}{(1 - \sin(x))^2 + (1 + \sin(x))^2}$ ce qui donne après simplifications la relation $f'(x) = -\frac{\cos(x)}{1 + \sin^2(x)} = (-\text{Arctan}(\sin(x)))'$. Ainsi, la fonction $x \mapsto f(x) + \text{Arctan}(\sin(x))$ est constante sur chaque intervalle du type $I_k =]2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2(k+1)\pi - \frac{\pi}{2}[$.

Comme f et $x \mapsto \text{Arctan}(\sin(x))$ sont 2π -périodiques, il suffit de trouver cette constante sur $I_0 =]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$.

Or $f(0) + \text{Arctan}(\sin(0)) = \frac{\pi}{4}$ donc $\forall x \in D$, $f(x) = \frac{\pi}{4} - \text{Arctan}(\sin(x))$.

3.54 a. La fonction $g : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'intégrale $\int_x^{+\infty} f$ converge pour $x > 0$ car $g(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées et que $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge d'après RIEMANN. Ainsi f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $f(x) = \int_1^{+\infty} g(t) dt - \int_1^x g(t) dt$ et que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = -g(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$.

b. Si $x > 0$, on pose $u(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = \frac{1}{t}$, comme les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[x; +\infty[$

et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on obtient par intégration par parties la relation $f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$. Or, comme $\forall t \geq x, \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{x^2}$, par croissance et linéarité de l'intégrale, on a $0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2} dt = \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x^2} = o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$. On a donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

Si $x \in]0; 1[$, on écrit $f(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ et, comme $\frac{e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$, ceci nous incite à écrire la relation $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} dt = -\ln(x) + \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt$. Par convexité de la fonction $\exp$, on a $e^u \geq 1+u$ donc $\forall t \in]0; 1[$, $0 \leq 1-e^{-t} \leq t$ donc $0 \leq \frac{e^{-t}-1}{t} \leq 1$. Ainsi, $0 \leq \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt \leq 1-x \leq 1$ donc $\int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt = O(1)$. Ainsi, $f(x) = -\ln(x) + O(1) = f(x) + o(\ln(x))$ ce qui signifie que $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

c. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ d'après la question précédente donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. De plus, les fonctions $u = f$ et $v = \text{id}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $xf(x) \underset{0}{\sim} -x \ln(x)$ et $xf(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$ d'après b. donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées ce qui montre, par intégration par parties, que $\int_0^{+\infty} f(x) dx = -\int_0^{+\infty} u'(x)v(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$.

Avec le théorème de FUBINI (hors programme), on aurait pu utiliser les intégrales doubles pour avoir plus simplement $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t \frac{e^{-t}}{t} dx \right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.

3.55 Les solutions réelles de l'équation homogène $(E_0) : y' - y = 0$ sont les fonctions $y_\lambda : x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et elles sont définies sur $[1; +\infty[$ en entier. On effectue une variation de la constante en cherchant les solutions de (E) sous la forme $y : x \mapsto \lambda(x)e^x$ avec $\lambda : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. En remplaçant dans (E) , on parvient à $y' - y = \frac{1}{x} \iff \lambda'(x)e^x = \frac{1}{x} \iff \lambda'(x) = \frac{e^{-x}}{x}$. On prend par exemple $\lambda : x \mapsto \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$. Ainsi, les solutions de (E) sur $[1; +\infty[$ forment un espace affine et s'écrivent $y_\alpha : x \mapsto \left(\alpha + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt \right) e^x$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $g : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et $\frac{e^{-t}}{t} = o(e^{-t})$ donc, par comparaison, g est intégrable sur $[1; +\infty[$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt = \alpha + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. Pour que y_α soit bornée, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, il faut absolument que $\alpha + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = 0$, ce qui impose $\alpha = -\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \alpha_0$. Seule la fonction $b = y_{\alpha_0} : x \mapsto \left(-\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt \right) e^x = -e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ (par la relation de CHASLES) est éventuellement bornée parmi les solutions de (E) .

Comme $\forall x \geq 1, |b(x)| = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt = \frac{1}{x} \leq 1$ car $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$ si $t \geq x$, cette fonction b est bien bornée sur $[1; +\infty[$. Conclusion : (E) a une seule solution bornée qui est b et elle tend vers 0 en $+\infty$.

3.56 On peut se restreindre à $0 < x < y$ car échanger x et y dans cette inégalité ne change rien.

Pour $y > 0, p \geq 0$, on étudie alors la fonction $f_{p,y} : x \mapsto |x-y|^p - |x^p - y^p| = (y-x)^p - y^p + x^p$ sur l'intervalle $[0; y]$. Cette fonction est dérivable et $f'_{p,y}(x) = -p(y-x)^{p-1} + px^{p-1}$. Traitons alors trois cas :

- si $p = 1$, $f_{p,y}$ est de dérivée nulle donc constante sur cet intervalle et l'inégalité est établie.
- si $0 < p < 1$, comme $t \mapsto t^{p-1}$ est décroissante et que $f'_{p,y}\left(\frac{y}{2}\right) = 0$, la fonction $f_{p,y}$ est croissante sur $]0; \frac{y}{2}[$

et décroissante sur $]\frac{y}{2}; y[$. Comme $f_{p,y}(0) = f_{p,y}(y) = 0$, la fonction $f_{p,y}$ est positive sur $[0; y]$.

• si $p > 1$, comme $t \mapsto t^{p-1}$ est croissante et que $f'_{p,y}(\frac{y}{2}) = 0$, la fonction $f_{p,y}$ est décroissante sur $]0; \frac{y}{2}[$ et croissante sur $]\frac{y}{2}; y[$. Comme $f_{p,y}(0) = f_{p,y}(y) = 0$, la fonction $f_{p,y}$ est négative sur $[0; y]$.

On en déduit bien que $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, |x^p - y^p| \leq |x - y|^p) \iff p \leq 1$.

3.57 On pose $u = f^2$ et $v : t \mapsto t$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $[0; 1]$ par hypothèse. Par conséquent, par intégration par parties, on obtient $\int_0^1 f(t)^2 dt = [tf^2(t)]_0^1 - 2 \int_0^1 tf'(t)f(t) dt = -2 \int_0^1 tf'(t)f(t) dt$ car $f(1) = 0$. Par l'inégalité triangulaire, on a $\int_0^1 f(t)^2 dt \leq 2 \int_0^1 |f'(t)||f(t)| dt$ puis, par celle de CAUCHY-SCHWARZ, on trouve $\int_0^1 f(t)^2 dt \leq 2 \sqrt{\int_0^1 t^2 f'^2(t) dt} \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}$ (1). Il y a maintenant deux cas :

- si $\int_0^1 f(t)^2 dt = 0$, on a bien $\int_0^1 f(t)^2 dt \leq 4 \int_0^1 t^2 f'(t)^2 dt$.
- si $\int_0^1 f(t)^2 dt > 0$, en divisant par $\sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}$ dans (1), on a $\sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt} \leq 2 \sqrt{\int_0^1 t^2 f'^2(t) dt}$ puis le résultat de l'énoncé résulte en élevant au carré cette inégalité.

Dans tous les cas, on a bien $\int_0^1 f(t)^2 dt \leq 4 \int_0^1 t^2 f'(t)^2 dt$ si f est de classe C^1 sur $[0; 1]$ et $f(1) = 0$.

Pour le cas d'égalité, on doit avoir égalité dans CAUCHY-SCHWARZ ce qui donne l'existence d'une constante λ telle que $\forall t \in [0; 1], tf'(t) = \lambda f(t)$ (E) car les deux fonctions $t \mapsto tf'(t)$ et $t \mapsto f(t)$ doivent être colinéaires. De plus, comme $\int_0^1 f(t)^2 dt \geq 0$, on doit avoir $-2 \int_0^1 tf'(t)f(t) dt \geq 0$ ce qui impose $\lambda \leq 0$. Ainsi, en résolvant l'équation différentielle (E), on a $\forall t \in [0; 1], f(t) = \alpha t^\lambda$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et les conditions " f de classe C^1 et $f(1) = 0$ " imposent que $f = 0$. On n'a égalité dans cette inégalité que pour f égale à la fonction nulle.

3.58 a. La fonction nulle (qui est bien continue) appartient clairement à W_h qui est donc non vide.

Soit $(f, g) \in W_h^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda f + g \in W_h$ car, par linéarité de l'intégrale, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{x+h}^{x+2h} (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_{x+h}^{x+2h} f(t) dt + \int_{x+h}^{x+2h} g(t) dt = 2\lambda \int_x^{x+h} f(t) dt + 2 \int_x^{x+h} g(t) dt = 2 \int_x^{x+h} \lambda f + g.$$

Ainsi, W_h est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc lui-même un espace vectoriel.

Pour $\alpha > 0$, soit la fonction $p_\alpha : t \mapsto \alpha^t$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors, avec le changement de variable $t = u + h$, on a $p_\alpha \in W_h$ dès que $\alpha = 2^{1/h}$. Ainsi $p_{2^{1/h}} \neq 0 \in W_h$.

b. Toute fonction h -périodique d'intégrale nulle sur une période appartient à W_h car on aura alors la relation $\forall x \in \mathbb{R}, 0 = \int_{x+h}^{x+2h} f(t) dt = 2 \int_x^{x+h} f(t) dt = 2 \times 0 = 0$. En particulier $f_n : t \mapsto \sin\left(\frac{2n\pi t}{h}\right)$ est élément de W_h pour tout entier $n \geq 1$. Ces fonctions forment une famille libre, car ce sont des vecteurs propres pour la double dérivation, associés à des valeurs propres distinctes. Ou alors on écrit $\sum_{k=1}^p \lambda_k f_k = 0$, on dérive

deux fois p fois et on a $\forall d \in \llbracket 1; p \rrbracket, \sum_{k=1}^p k^{2d} \lambda_k f_k = 0$. Si on considère le DL en 0 à l'ordre 1, on a donc

$\forall d \in \llbracket 1; p \rrbracket, \sum_{k=1}^p k^{2d+1} \lambda_k = 0$. On en déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ par un déterminant de VANDERMONDE.

c. Soit $f \in \bigcap_{h>0} W_h$. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Raisonnons sur $x, x+h, x+2h, x+3h, x+4h$ et posons $J_1 = \int_x^{x+h} f$, $J_2 = \int_{x+h}^{x+2h} f$, $J_3 = \int_{x+2h}^{x+3h} f$, $J_4 = \int_{x+3h}^{x+4h} f$. On a $J_2 = 2J_1$ mais aussi $J_3 = 2J_2$ (poser $x' = x + h$) et de même $J_4 = 2J_3$. On applique la relation avec $h' = 2h$ d'où $\int_{x+2h}^{x+4h} f = 2 \int_x^{x+2h} f$ soit encore $J_3 + J_4 = 2(J_1 + J_2)$ ce

qui donne $4J_1 + 8J_1 = J_1 + 2J_1$ donc $J_1 = 0$. Ainsi l'intégrale de f sur tout $[x; x+h]$ avec $h > 0$ est nulle. On en déduit que $f = 0$, soit par théorème fondamental, soit directement avec la continuité de f : si par exemple $f(x_0) > 0$ on construit un petit intervalle autour de x_0 sur lequel l'intégrale de f est strictement positive.

3.59 Méthode 1 : Soit $y \in \mathbb{R}$, si on écrit $z = 1 + iy = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ car $\operatorname{Re}(z) > 0$, on a donc $\rho \cos(\theta) = 1$ et $\rho \sin(\theta) = y$ donc $\tan(\theta) = y$ ce qui montre que $\operatorname{Arctan}(y) = \arg(z) = \arg(1 + iy)$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, x est solution de (E) si et seulement si $\arg\left(1 + \frac{i}{1-x}\right) + \arg(1+ix) + \arg\left(1 + \frac{i}{1+x}\right) = \frac{\pi}{2}$ qui équivaut, par les propriétés de l'argument, à $\arg\left(\left(1 + \frac{i}{1-x}\right)(1+ix)\left(1 + \frac{i}{1+x}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$. On doit donc trouver les réels $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ tels que $\left(1 + \frac{i}{1-x}\right)(1+ix)\left(1 + \frac{i}{1+x}\right)$ est imaginaire pur. Or $\left(1 + \frac{i}{1-x}\right)(1+ix)\left(1 + \frac{i}{1+x}\right) = \frac{-3x^2 + i(2-x^3)}{1-x^2}$. Finalement : x est solution de (E) $\iff x = 0$.

Méthode 2 : On constate que $x = 0$ est solution de (E). Si $x \neq 0$ est solution de (E), on applique $\tan$ à l'égalité $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1-x}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$ et, comme on sait que $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$, on obtient $\frac{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}}{1 - \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{x}$ ce qui se simplifie en $-\frac{2}{x^2} = \frac{1}{x}$ donc $x = -2$.

Réciproquement, comme $r = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{Arctan}(-2) + \operatorname{Arctan}(-1) < 0$ donc $x = -2$ n'est pas solution de (E), en fait $r = -\frac{\pi}{2}$. Ainsi, la seule solution de (E) est $x = 0$.

3.60 La fonction $f : x \mapsto \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th}(2x)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par continuité de th . Or, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 2$ car $\operatorname{th}(t) = t + o(t)$ donc $\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th}(2x) = 3x - 2x + o(x)$ puis $\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th}(2x) \underset{0}{\sim} x$. De plus, $\operatorname{th}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} = 1 - \frac{2e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}$. Ainsi, $1 - \operatorname{th}(t) = \frac{2e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-2t}$. Par conséquent, $f(x) = \frac{1 - \operatorname{th}(2x) - (1 - \operatorname{th}(3x))}{x} = \frac{2e^{-4x} - 2e^{-6x} + o(e^{-4x}) + o(e^{-6x})}{x} = \frac{2e^{-4x} + o(e^{-4x})}{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2e^{-4x}}{x}$ d'où $f(x) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x}) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par RIEMANN d'où $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th}(2x)}{x} dx$ converge.

De plus, $\int_0^u \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th}(2x)}{x} dx = \int_0^u \frac{\operatorname{th}(3x)}{x} dx - \int_0^u \frac{\operatorname{th}(2x)}{x} dx$ (les deux convergent). On pose $y = 3x$ dans la première et $y = 2x$ dans la seconde et $\int_0^u \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th}(2x)}{x} dx = \int_0^{3u} \frac{\operatorname{th}(y)}{y} dy - \int_0^{2u} \frac{\operatorname{th}(y)}{y} dy = \int_{2u}^{3u} \frac{\operatorname{th}(y)}{y} dy$. Or $\ln\left(\frac{3}{2}\right)\operatorname{th}(2u) = \operatorname{th}(2u) \int_{2u}^{3u} \frac{dx}{x} \leq \int_{2u}^{3u} \frac{\operatorname{th}(x)}{x} dx \leq \operatorname{th}(3u) \int_{2u}^{3u} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\operatorname{th}(3u)$ car th est croissante. Par encadrement, $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(3x) - \operatorname{th}(2x)}{x} dx = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_{2u}^{3u} \frac{\operatorname{th}(x)}{x} dx = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ car $\lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{th}(y) = 1$.

3.61 Comme la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue (et même de classe C^∞) sur $D =]0; 1[\cup]1; +\infty[$, la fonction f

est bien définie sur D car pour tout réel x appartenant à D , le segment $\widetilde{[x; x^2]}$ est inclus dans D .

Soit G une primitive de g sur D , alors $f(x) = [G(t)]_x^{x^2} = G(x^2) - G(x)$ donc f est C^∞ sur D car G l'est.

Si $x \in]0; 1[$, on a $0 < x^2 < x < 1$, g est décroissante sur $[x^2; x]$ et $u \mapsto \frac{1}{u}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc on

peut encadrer $\int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(x^2)} dt = \frac{x - x^2}{2 \ln(x)} \leq \int_{x^2}^x \frac{dt}{\ln(t)} = -f(x) \leq \frac{x - x^2}{\ln(x)} = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)} dt$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x^2}{\ln(x)} = 0$ donc, par encadrement, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Comme $g(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{t-1}$, on est conduit à transformer $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt + \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}\right) dt$. Or

$\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt = \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \ln(x+1)$ tend vers $\ln(2)$ quand x tend vers 1. En posant $h : t \mapsto \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}$, on a $h(1+u) \underset{0}{=} \frac{1}{u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)} - \frac{1}{u} \underset{0}{=} \frac{1}{u} \left(\frac{1}{1 - \frac{u}{2} + o(u)} - 1 \right) \underset{0}{=} \frac{1}{u} (1 + \frac{u}{2} + o(u) - 1) \underset{0}{=} \frac{1}{2} + o(1)$ donc h se prolonge par continuité en 1 en posant $h(1) = \frac{1}{2}$. Ceci signifie que h étant maintenant continue sur le segment

$\left[\frac{1}{4}; 4\right]$ (par exemple), y est bornée (par M). Pour $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$, on a donc $\left| \int_x^{x^2} h(t) dt \right| \leq M|x^2 - x| \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} h(t) dt = 0$ puis, par somme, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln(2)$. Par conséquent, la fonction f prolongée par $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(2)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Plus simplement, en écrivant $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{t dt}{t \ln(t)}$, on pouvait aussi encadrer par exemple pour $x \in]0; 1[$, $x^2 \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} \leq f(x) \leq x \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}$ car on a l'inégalité $\forall t \in [x^2; x]$, $\frac{x^2}{t} \leq 1 \leq \frac{x}{t}$, $\ln(t) < 0$ et $x > x^2$. Si $x > 1$, comme $\forall t \in [x; x^2]$, $\frac{x^2}{t} \geq 1 \geq \frac{x}{t}$, l'inégalité devient $x^2 \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} \geq f(x) \geq x \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}$. Par encadrement, on peut prolonger f par continuité en 1 (à gauche et à droite) avec $f(1) = \ln(2)$ car $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} = [\ln |\ln(t)|]_x^{x^2} = \ln |\ln(x^2)| - \ln |\ln x| = \ln(2)$.

D'après ce qui précède, f est C^1 sur D avec $f'(x) = 2xg'(x^2) - g'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ donc, classiquement, $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1$. Par le théorème de prolongement C^1 , f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(1) = 1$. De même, comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(0) = 0$.

Puisque $f' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x > 1$, $f(x) \geq \frac{x^2 - x}{\ln(x^2)}$ donc, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. La fonction f' est donc continue sur $[0; 1]$ et vérifie $f'(0) = 0$, $f'(1) = 1$ et $\forall x \in]0; 1[$, $f'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$. Ainsi, f est une primitive de la fonction continue $g : x \rightarrow \frac{x-1}{\ln(x)}$ sur $[0; 1]$ telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Donc $\int_0^1 g = f(1) - f(0) = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx = \ln(2)$.

3.62 a. Méthode 1 : Par le changement de variable $x = \ln(t)$ bijectif et C^1 , $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ a même nature que $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{ix} dx$ qui a elle-même la même nature que $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{ix} dx$ par continuité sur $\mathbb{R}_+$ de $x \mapsto x^\alpha e^{ix}$. Or par une IPP simple, pour $X > 1$, on a $\int_1^X x^\alpha e^{ix} dx = \left[\frac{x^\alpha e^{ix}}{i} \right]_1^X - \frac{\alpha}{i} \int_1^X x^{\alpha-1} e^{ix} dx$. On continue jusqu'à avoir $F(X) = \int_1^{+\infty} x^\alpha e^{ix} dx = \left(X^\alpha - \frac{\alpha}{i} X^{\alpha-1} + \dots \right) e^{iX} + \lambda \pm \frac{1}{i^n} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) \int_1^X x^{\alpha-n} e^{ix} dx$. Si $n = \lfloor \alpha \rfloor + 2$, $\alpha - n > 1$ et $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-n} e^{ix} dx$ converge, ainsi $F(X) \underset{+\infty}{\sim} X^\alpha e^{iX}$ donc $|F(X)| \underset{+\infty}{\sim} X^\alpha \rightarrow +\infty : \int_1^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

Méthode 2 : Si cette intégrale convergeait, ses parties réelle et imaginaire convergeraient aussi. En posant $F : x \mapsto \int_1^x \frac{(\ln(t))^\alpha}{t} \sin(\ln(t)) dt$, on aurait $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln(t))^\alpha}{t} \sin(\ln(t)) dt$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $x \in \left[e^{2p\pi + \frac{\pi}{6}}; e^{2p\pi + \frac{5\pi}{6}} \right] \implies \ln(t) \in \left[2p\pi + \frac{\pi}{6}; 2p\pi + \frac{5\pi}{6} \right] \implies \sin(\ln(t)) \geq \frac{1}{2}$, $\ln(t) \geq 2p\pi$ et $\frac{1}{t} \geq e^{-(2p+1)\pi}$. Alors $F\left(e^{2p\pi + \frac{5\pi}{6}}\right) - F\left(e^{2p\pi + \frac{\pi}{6}}\right) = \int_{e^{2p\pi + \frac{\pi}{6}}}^{e^{2p\pi + \frac{5\pi}{6}}} f(t) dt \geq \frac{1}{2} \left(e^{2p\pi + \frac{5\pi}{6}} - e^{2p\pi + \frac{\pi}{6}} \right) (2p\pi)^\alpha e^{-(2p+1)\pi} = a_p$. Or, comme $\alpha > 1$, $\lim_{p \rightarrow +\infty} a_p = +\infty$ ce qui est contradictoire avec $\lim_{p \rightarrow +\infty} F\left(e^{2p\pi + \frac{5\pi}{6}}\right) - F\left(e^{2p\pi + \frac{\pi}{6}}\right) = L - L = 0$. Ainsi l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est divergente.

b. De la même manière, si cette série convergeait, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(\ln(n))^\alpha}{n} \sin(\ln(n))$ convergerait aussi. En notant $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(\ln(k))^\alpha}{k} \sin(\ln(k))$, il existerait $S \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$. Or, si $p \in \mathbb{N}^*$, considérons $u_p = \lfloor e^{2p\pi + \frac{\pi}{6}} \rfloor + 1$ et $v_p = \lfloor e^{2p\pi + \frac{5\pi}{6}} \rfloor$, alors $\forall k \in \llbracket u_p; v_p \rrbracket$, $f(k) \geq \frac{1}{2}(2p\pi)^\alpha e^{-(2p+1)\pi}$ ce qui donne en sommant : $\sum_{k=u_p}^{v_p} f(k) \geq \frac{1}{2}(v_p - u_p + 1)(2p\pi)^\alpha e^{-(2p+1)\pi} \geq \frac{1}{2}(e^{2p\pi + \frac{5\pi}{6}} - e^{2p\pi + \frac{\pi}{6}})(2p\pi)^\alpha e^{-(2p+1)\pi} = b_p$. Or, comme $\alpha > 1$, $\lim_{p \rightarrow +\infty} a_p = +\infty$ ce qui est contradictoire avec $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_{v_p} - S_{u_p-1} = S - S = 0$. Ainsi, la série numérique $\sum_{n \geq 1} f(n)$ est divergente.

3.63 Soit F la primitive de f qui s'annule en 0 (qui existe car f est continue sur $\mathbb{R}_+$) : $\forall x \geq 0$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Par hypothèse, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell = \int_0^{+\infty} f(t)dt$. Par intégration par parties, $t \mapsto t$ et F étant de classe C^1 sur le segment $[0; x]$, on a $\int_0^x tf(t)dt = [tF(t)]_0^x - \int_0^x F(t)dt = xF(x) - \int_0^x F(t)dt = \int_0^x (F(x) - F(t))dt$. Soit $\varepsilon > 0$, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geq x_0$, $\ell - \frac{\varepsilon}{2} \leq F(x) \leq \ell$ (car F est croissante). Ainsi, $\forall t \in [x_0; x]$, $0 \leq F(x) - F(t) \leq \ell - F(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ donc on l'encadrement :

$$0 \leq \int_0^x tf(t)dt = \int_0^x (F(x) - F(t))dt = \int_0^{x_0} (F(x) - F(t))dt + \int_{x_0}^x (F(x) - F(t))dt \leq x_0\ell + \frac{\varepsilon}{2}(x - x_0).$$

$$x_0\ell + \frac{\varepsilon}{2}(x - x_0) \leq \varepsilon x \iff x \geq x_1 = \frac{2x_0\ell}{\varepsilon} - x_0. \quad \forall x \geq \text{Max}(x_0, x_1), \quad \frac{1}{x} \int_0^x tf(t)dt \leq \varepsilon \text{ d'où } \int_0^x tf(t)dt = o(x).$$

3.64 a. Soit $g_x : t \mapsto \frac{1}{x^3 + t^3}$. Si $x > 0$ ou si $x < -1$, la fonction g_x est continue sur le segment $[0; 1]$ donc $f(x)$ existe.

Si $x = 0$, $g_x(t) = \frac{1}{t^3}$ donc $f(0)$ n'existe pas d'après RIEMANN ($3 \geq 1$). Si $x = -1$, $t^3 - 1 = (t - 1)(t^2 + t + 1)$ donc $g_x(t) \sim \frac{1}{1 - 3(t - 1)}$ donc $f(1)$ n'existe pas d'après RIEMANN ($1 \geq 1$). Si $x \in]-1; 0[$, la fonction g_x n'est même pas définie sur $]0; 1[$ et $f(x)$ n'existe pas. L'ensemble de définition de f est donc $D =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$.

b. Si $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \int_0^1 \frac{dt}{x^3} = \frac{1}{x^3}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ par encadrement. Et $f(x) - \frac{1}{x^3} = \int_0^1 \frac{-t^3 dt}{x^3(x^3 + t^3)}$ donc $\left| f(x) - \frac{1}{x^3} \right| \leq \frac{1}{x^6} \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4x^6}$ donc $f(x) - \frac{1}{x^3} = O\left(\frac{1}{x^6}\right) = o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ donc $f(x) \sim \frac{1}{x^3}$.

On pouvait encadrer $\frac{1}{x^3 + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^3}$ pour avoir la limite et l'équivalent mais c'est moins précis.

c. Si $x < -1$, on a $\forall t \in [0; 1]$, $\frac{1}{x^3 + t^3} = \frac{1}{(t + x)(t^2 - xt + x^2)} = \frac{1}{6x^2} \left(\frac{2}{t + x} - \frac{2t - x}{t^2 - xt + x^2} + \frac{3x}{t^2 - xt + x^2} \right)$ d'où $f(x) = \frac{1}{6x^2} \left(2 \ln(-x - 1) - 2 \ln(-x) - \ln(1 - x + x^2) + 2 \ln(-x) + 2\sqrt{3} \text{Arctan}\left(\frac{2 - x}{\sqrt{3}x}\right) + 2\sqrt{3} \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right)$.

Comme $-\ln(1 - x + x^2) + 2\sqrt{3} \text{Arctan}\left(\frac{2 - x}{\sqrt{3}x}\right) + 2\sqrt{3} \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = O(1)$, on a $f(x) \sim_{-1} \frac{\ln(-x - 1)}{3}$.

3.65 a. f est continue et 2π -périodique donc bornée sur $\mathbb{R}$ par $M = \max_{x \in [0; 2\pi]} |f(x)|$ et $\forall x \in [1; +\infty[$, $\left| \frac{f(t)}{t^\alpha} \right| \leq \frac{M}{t^\alpha}$.

D'après RIEMANN, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge donc $t \mapsto \frac{f(t)}{t^\alpha}$ est intégrable et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ convergente.

b. Si $f \in E$, ses primitives sont de la forme $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Ces fonctions F sont 2π -périodiques, par périodicité de la fonction f , si et seulement si l'on a, pour tout réel x :

$$F(x + 2\pi) = F(x) \iff \int_0^x f(t)dt = \int_0^{x+2\pi} f(t)dt \iff \int_x^{x+2\pi} f(t)dt = 0 \iff \int_0^{2\pi} f(t)dt = 0 \iff c(f) = 0.$$

c. Si $f \in E$, bien sûr $g = f - c(f)$ est encore continue et 2π -périodique donc $g \in E$. Par linéarité de l'intégrale, on a $c(g) = c(f - c(f)) = c(f) - c(c(f)1) = c(f) - c(f)c(1) = 0$ car $c(1) = 1$ où 1 est la fonction constante.

d. Puisque $c(g) = 0$, g admet une primitive 2π -périodique (elles le sont toutes en fait), par exemple $G : x \mapsto \int_0^x g(t)dt$. On effectue une intégration par parties avec G et $t \mapsto \frac{1}{t}$ qui sont de classe C^1 sur $[1; x]$ si $x > 1$, et on a $\int_1^x \frac{g(t)}{t} dt = \left[\frac{G(t)}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{G(t)}{t^2} dt$. Or G étant périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x} = 0$. De plus, on a vu à la question a. que $\int_1^{+\infty} \frac{G(t)}{t^2} dt$ converge car $\alpha = 2 > 1$ et $G \in E$. Ainsi, par somme, $\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t} dt$ converge et on a même $\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t} dt = -G(1) + \int_1^{+\infty} \frac{G(t)}{t^2} dt$.

e. Il suffit décrire que $\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt = \int_1^x \frac{g(t)}{t} dt + \int_1^x \frac{c(f)}{t} dt$. Or $\int_1^x \frac{c(f)}{t} dt = c(f) \ln(x)$ et $x \mapsto \int_1^x \frac{g(t)}{t} dt$ admet une limite finie en $+\infty$ d'après la question précédente. Ainsi, $\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{+\infty}{\sim} c(f) \ln(x)$.

f. Comme $t \mapsto |\sin(t)|$ est continue et 2π -périodique, et que $c(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin(t)| dt = \frac{2}{\pi}$, on a d'après la question précédente $\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{2 \ln(x)}{\pi} \rightarrow +\infty$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge.

3.66 a. D'abord, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (\ln(1+t))^n$ est continue sur le segment $[0; 1]$ donc u_n existe.

Pour $t \in [0; 1]$, $0 \leq \ln(1+t) \leq \ln(2) < 1$ donc $0 \leq \ln(1+t)^{n+1} \leq \ln(1+t)^n$ ce qui donne en intégrant entre 0 et 1 : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

b. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge car elle est décroissante et minorée par 0. De plus, en intégrant entre 0 et 1 l'inégalité $0 \leq (\ln(1+t))^n \leq (\ln(2))^n$, on obtient $0 \leq u_n \leq (\ln(2))^n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ car $\ln(2) \sim 0,69 < 1$.

c. Par intégration par parties, en posant les fonctions $u : t \mapsto (\ln(1+t))^{n+1}$ et $v : t \mapsto 1+t$ dans $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1} dt$ (u et v sont C^1 sur $[0; 1]$) : $u_{n+1} = [(1+t)(\ln(1+t))^{n+1}]_0^1 - (n+1) \int_0^1 (\ln(1+t))^n dt$ ce qui donne la relation $u_{n+1} = 2(\ln(2))^{n+1} - (n+1)u_n$.

d. On a $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ d'après a. donc $0 \leq 2(\ln(2))^{n+1} - (n+1)u_n \leq u_n$ d'après c.. Ainsi, on obtient $(n+1)u_n \leq 2(\ln(2))^{n+1}$ et $2(\ln(2))^{n+1} \leq (n+2)u_n$ comme attendu en exploitant chaque inégalité.

e. D'après d., $\frac{\ln^{n+1}(2)}{n+2} \leq u_n \leq \frac{\ln^{n+1}(2)}{n+1}$ et comme $\frac{\ln^{n+1}(2)}{n+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^{n+1}(2)}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^{n+1}(2)}{n}$, on peut conclure par le théorème des gendarmes à l'équivalent suivant : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^{n+1}(2)}{n}$.

f. Si on pose $v_n = \frac{u_n}{\ln^n(2)} \geq 0$, alors $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(2)}{n}$ d'après e. donc $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{\ln^n(2)}$ diverge (série harmonique).

3.67 a. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est continue. Or, $\forall t \neq 0$, $f'(t) = \frac{f(t) - f(t-1)}{t}$ (1). Ainsi, par opération, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Si on suppose f de classe C^k sur $\mathbb{R}^*$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors la relation (1) montre qu'elle est aussi de classe C^{k+1} . Par principe de récurrence, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

Soit $t \geq 1$, $\int_1^t s^{-2} f(s-1) ds = \int_1^t \frac{f(s) - sf'(s)}{s^2} ds$ puisque $\forall s \in [1; t]$, $f(s-1) = f(s) - sf'(s)$ d'après l'énoncé, ainsi $\int_1^t s^{-2} f(s-1) ds = \left[-\frac{f(s)}{s} \right]_1^t = f(1) - \frac{f(t)}{t}$ d'où l'on déduit bien $f(t) = t \left[f(1) - \int_1^t s^{-2} f(s-1) ds \right]$.

b. Comme avant, si $x \geq 1$, on a $\int_1^x u^{-2} f(u-1) du = \int_1^x \frac{f(u) - uf'(u)}{u^2} ds = \left[-\frac{f(u)}{u} \right]_1^x = f(1) - \frac{f(x)}{x}$ donc l'hypothèse " $\int_1^{+\infty} u^{-2} f(u-1) du$ converge" de l'énoncé se traduit par l'existence de $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si on avait $\ell \neq 0$, la quantité $\frac{f(x)}{x}$ garderait un signe constant au voisinage de $+\infty$ donc $f(x)$ aussi. On aurait aussi

$\frac{f(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} \ell$ donc $\frac{f(x-1)}{x-1} \underset{+\infty}{\sim} \ell$ qui devient $\frac{f(x-1)}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{x}$. Montrer comme $\int_1^{+\infty} \frac{\ell}{u} du$ diverge par RIEMANN, on arriverait à une contradiction. Ainsi $\ell = 0$ et on a donc $\int_1^{+\infty} u^{-2} f(u-1) du = \left[-\frac{f(u)}{u} \right]_1^{+\infty} = f(1)$. Alors, $f(1) - \int_1^t s^{-2} f(s-1) ds = \int_t^{+\infty} s^{-2} f(s-1) ds$ avec CHASLES d'où $\forall t \geq 1$, $f(t) = t \int_t^{+\infty} s^{-2} f(s-1) ds$.

c. Comme $\int_1^{+\infty} u^{-2} f(u-1) du$ converge, on en déduit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} s^{-2} f(s-1) ds = 0$ (une sorte de reste) car $\int_t^{+\infty} s^{-2} f(s-1) ds = \int_1^{+\infty} s^{-2} f(s-1) ds - \int_1^t s^{-2} f(s-1) ds$. D'après a., $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = 0$. On a aussi $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t-1)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t-1)}{t-1} \times \frac{t-1}{t} = 0$. Au final, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(t)}{t} - \frac{f(t-1)}{t} \right) = 0 - 0 = 0$.

Appliquons le théorème des accroissements finis à f (qui est bien dérivable sur $[t-1; t]$) entre $t-1$ et t : $\exists u_t \in]t-1; t[$, $f(t) - f(t-1) = (t - (t-1))f'(u_t) = f'(u_t)$. Or comme $f'(t) \underset{+\infty}{=} o(1)$, $f(t) - f(t-1) \underset{+\infty}{=} o(1)$ donc $f'(t) = \frac{f(t) - f(t-1)}{t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t}\right)$. Si $f'(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^k}\right)$, comme $f(t) - f(t-1) = f'(u_t)$ et $u_t \underset{+\infty}{\sim} t$ car $t-1 < u_t < t$, $f'(u_t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^k}\right)$ donc $f'(t) = \frac{f(t) - f(t-1)}{t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{k+1}}\right)$. Par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^k f'(t) = 0$.

d. D'après c., $\exists t_0 \geq 0$, $\forall t \geq t_0$, $|f'(t)| \leq \frac{1}{t^2}$ donc f' est intégrable sur $[t_0; +\infty[$ d'après RIEMANN, ainsi $\int_{t_0}^{+\infty} f'(u) du$ converge et f admet bien une limite finie ℓ en $+\infty$ car $\forall t \geq t_0$, $f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t f'(u) du$ (2). En passant à la limite dans (2), $\ell = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(u) du$ donc $f(t) - \ell = - \int_t^{+\infty} f'(u) du$.

Un petit lemme préalable : si g et h sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et h est positive avec $g(t) \underset{+\infty}{=} o(h(t))$, alors $\int_t^{+\infty} g(u) du \underset{+\infty}{=} o\left(\int_t^{+\infty} h(u) du\right)$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, $\exists t_0 \geq 0$, $\forall t \geq t_0$, $|g(t)| \leq \varepsilon |h(t)| = \varepsilon h(t)$. On intègre entre t et $+\infty$ (on le peut) et $\left| \int_t^{+\infty} g(u) du \right| \leq \int_t^{+\infty} |g(u)| \leq \varepsilon \int_t^{+\infty} h(u) du$. C'est fait !

Comme $f(t) - \ell = - \int_t^{+\infty} f'(u) du$, en appliquant le lemme car $f'(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^k}\right)$ pour $k \geq 2$ (les hypothèses sont vérifiées), on a $f(t) - \ell \underset{+\infty}{=} o\left(\int_t^{+\infty} \frac{1}{u^k} du\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{(k-1)t^{k-1}}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{k-1}}\right)$.

3.68 a. La fonction $g : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $g(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t}) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge par critère de RIEMANN donc $\int_x^{+\infty} g(t) dt$ converge pour $x > 0$ par comparaison. Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f(x) = \int_1^{+\infty} g(t) dt - \int_1^x g(t) dt$ avec CHASLES donc, d'après le théorème fondamental de l'intégration, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = -g(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$.

b. • Si $x > 0$, par intégration par parties en posant $u(t) = -e^{-t}$ et $v(t) = \frac{1}{t}$, comme u et v sont C^1 sur $[x; +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$, on obtient $f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{t^2}$. Or $\forall t \geq x$, $\frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{x^2}$, d'où la majoration $0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{t^2} \leq \frac{1}{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{e^{-x}}{x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$. Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{e^{-x}}{x} + o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$ d'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

• Si $x > 0$, $f(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ et $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} dt = -\ln(x) + \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt$ par CHASLES et linéarité de l'intégrale. $\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt$ converge puisque $h : t \mapsto \frac{e^{-t}-1}{t}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $h(0) = -1$ (par développements limités), il vient $\int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt \underset{0+}{=} O(1)$ (et même

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt \text{ donc } \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = f(x) = -\ln(x).$$

c. f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle y est continue et que $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

De plus, $u = f$ et $v = \text{id}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$ par croissances comparées avec la question b. car $xf(x) \underset{0}{\sim} -x \ln(x)$ et $xf(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$. Ainsi, par intégration par parties, on a donc $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 0 - \int_0^{+\infty} (-e^{-x}) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$.

On pouvait prévoir ce résultat en admettant pouvoir inverser les intégrales doubles (théorème de FUBINI),

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) dx = \iint_{0 < x \leq t} \frac{e^{-t}}{t} dt dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t \frac{e^{-t}}{t} dx \right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

3.69 Posons $u_n = \frac{n}{(n!)^{1/n}} = \left(\frac{n^n}{n!}\right)^{1/n}$ pour $n \geq 1$. D'après STIRLING, on a $\frac{n^n}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}(1 + o(1))$ donc $u_n = e(2\pi n)^{-1/n}(1 + o(1))^{1/n}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\pi n)^{-1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{1}{n} \ln(2\pi n)\right) = e^0 = 1$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2\pi n)}{n} = 0$ par croissances comparées et $(1 + o(1))^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(1 + o(1))\right) = \exp\left(o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ qui tend vers 1. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$.

Indication donnée pendant l'oral et qui permettait de se passer de ce passage par les $o(1)$: montrer que si on a deux suites strictement positives $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} v_n^{\frac{1}{n}}$.

En effet, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, on a $\frac{u_n^{\frac{1}{n}}}{v_n^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \ln(1) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

donc on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{\frac{1}{n}}}{v_n^{\frac{1}{n}}} = 1$ qui est la définition de $u_n^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} v_n^{\frac{1}{n}}$. En utilisant ce résultat, toujours d'après

STIRLING, on a $\frac{n^n}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}$ donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} e(2\pi n)^{-1/n}$ et on conclut comme avant car $\lim_{n \rightarrow +\infty} e(2\pi n)^{-1/n} = e$.

On pouvait penser aux sommes de RIEMANN mais $v_n = \ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\ln(n) - \ln(k)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f : x \mapsto -\ln(x)$ mais f n'est que continue sur l'intervalle $]0; 1]$ et pas sur un segment donc on ne peut pas appliquer le théorème sur les sommes de RIEMANN. Pourtant $\int_0^1 (-\ln x) dx = [x - x \ln(x)]_0^1 = 1$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^1 = e$ par continuité de $\exp$.

3.70 a. Par hypothèse, $A = \int_0^1 f > 0$. Comme f est continue sur $[0; 1]$, en posant $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$, la fonction F est la primitive (donc de classe C^1) de f sur $[0; 1]$ qui s'annule en 0, elle est strictement croissante car $f > 0$ donc réalise une bijection de $[0; 1]$ sur $[0; A]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les conditions imposées à $x_0, x_1, \dots, x_n$ reviennent à $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, F(x_k) - F(x_{k-1}) = \frac{A}{n}$ donc, puisque $x_0 = 0$ est attendu, $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, F(x_k) = \frac{kA}{n}$. Ceci montre l'existence et l'unicité de la subdivision demandée et qu'on a $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, x_k = F^{-1}\left(\frac{kA}{n}\right)$.

b. Pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(F^{-1}\left(\frac{kA}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h\left(\frac{k}{n}\right)$ en posant $h : x \mapsto g \circ F^{-1}(xA)$. Comme h est continue par morceaux sur le segment $[0; 1]$ par composée, un théorème du cours montre que l'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 h(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ en posant $x = \varphi(t)$ avec $\varphi : t \mapsto \frac{1}{A} F(t)$ une bijection strictement

croissante de classe C^1 de $[0; 1]$ sur $[0; 1]$. On parvient donc à $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{A} \int_0^1 g \circ F^{-1} \circ F(t) \times f(t) dt = \frac{\int_0^1 fg}{\int_0^1 f}$.

3.71 a. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, alors $D_n(x) = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} \right) = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left(e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} \right)$ car $e^{ix} \neq 1$. Par conséquent,

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left(e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \frac{2i \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin(x/2)} \text{ en introduisant l'angle moitié ce qui}$$

$$\text{donne } D_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ avec une dernière formule de trigonométrie.}$$

b. Si $\varphi \in C^1([0; \pi], \mathbb{R})$, par intégration par parties en posant $u = \varphi$ et $v(t) = -\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}$ de classe C^1 sur $[0; \pi]$ si $\lambda > 0$, $\int_0^\pi \varphi(t) \sin(\lambda t) dt = \left[-\frac{\cos(\lambda t) \varphi(t)}{\lambda} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(\lambda t) \varphi'(t)}{\lambda} dt$. Par inégalité de la moyenne et $|\cos| \leq 1$, $\left| \int_0^\pi \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} (|\varphi(a)| + |\varphi(b)| + \int_0^\pi |\varphi'|)$. Par encadrement : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.

c. Pour $n \geq 1$, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^\pi x D_n(x) dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^\pi + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi x \cos(kx) dx$. Or $\left[\frac{x^2}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$ et, par intégration par parties en posant $u(x) = x$ et $v(x) = \frac{\sin(kx)}{k}$, on a u et v de classe C^1 sur $[0; \pi]$ et $\int_0^\pi x \cos(kx) dx = -\frac{1}{k} \int_0^\pi \sin(kx) dx = \frac{\cos(k\pi) - 1}{k^2}$ de sorte que l'on parvient à $\int_0^\pi x \cos(2kx) dx = 0$ et $\int_0^\pi x \cos((2k+1)x) dx = -\frac{2}{(2k+1)^2}$. Ainsi : $\int_0^\pi x D_{2n}(x) dx = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(2k+1)^2}$.

D'après la question a., $\int_0^\pi x D_{2n}(x) dx = \int_0^\pi x \frac{\sin\left(\left(2n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} dx = \int_0^\pi \varphi(x) \sin\left(\left(2n + \frac{1}{2}\right)x\right) dx$ en posant $\varphi : x \mapsto \frac{x}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$. La fonction φ est continue sur $]0; \pi]$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$

car $\sin(u) \sim u$. De plus, φ est de classe C^1 sur $]0; \pi]$ par opérations et $\forall x \in]0; \pi]$, $\varphi'(x) = \frac{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - x \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{4 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Or $\varphi'(x) \underset{0}{=} \frac{2\left(\frac{x}{2} + o(x^2)\right) - x(1 + o(x))}{x^2 + o(x^2)} \underset{0}{=} \frac{o(1)}{1 + o(1)} \underset{0}{=} o(1)$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi'(x) = 0$ ce qui montre par le théorème de prolongement C^1 que φ est de classe C^1 sur le segment $[0; \pi]$ et que $\varphi'(0) = 0$.

La question b. prouve alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi x D_{2n}(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(x) \sin\left(\left(2n + \frac{1}{2}\right)x\right) dx = 0$.

Par conséquent, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{2}{(2k+1)^2}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$. Mais en posant $S_n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$ et $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, on a $T_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{T_n}{4} + \frac{S_n}{2}$ en séparant les termes pairs et impairs. Comme on sait que la série de RIEMANN $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge ($2 > 1$) vers $\zeta(2)$, en passant à la limite ci-dessus :

$$\zeta(2) = \frac{\zeta(2)}{4} + \frac{\pi^2}{8}. \text{ On en déduit classiquement : } \zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3.72 a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est bien défini et strictement positif. Ainsi $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$ donc

$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$. Comme la fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ est continue sur le segment $[0; 1]$, par le théorème sur les sommes de RIEMANN, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 f = [(1+x) \ln(1+x) - x]_0^1 = 2 \ln(2) - 1$. Par conséquent, par continuité de $\exp$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{v_n} = e^{2 \ln(2) - 1} = \frac{4}{e} = \ell$.

b. On peut écrire $u_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$. Or on connaît l'équivalent de STIRLING $n! \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$.

Ainsi $\frac{(2n)!}{n^n n!} \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^n}{\sqrt{2\pi n} n^n n^n e^{2n}} \sim_{+\infty} \frac{(\sqrt{2}) 4^n}{e^n} = \sqrt{2} \left(\frac{4}{e}\right)^n$. On en déduit que $u_n \sim_{+\infty} \left(\sqrt{2} \left(\frac{4}{e}\right)^n + o\left(\left(\frac{4}{e}\right)^n\right)\right)^{\frac{1}{n}}$

d'où $u_n \sim_{+\infty} e^{\frac{1}{n} \ln\left(\sqrt{2} \left(\frac{4}{e}\right)^n + o\left(\left(\frac{4}{e}\right)^n\right)\right)} = e^{\ln\left(\frac{4}{e}\right) + \frac{1}{n} \ln(\sqrt{2} + o(1))} = \frac{4}{e} \times e^{\frac{1}{2n} (\ln(2) + o(1))} = \frac{4}{e} \left(1 + \frac{\ln(2)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ en effectuant un développement limité à l'ordre 1 de $\exp$ en 0.

On retrouve l'équivalent $u_n \sim_{+\infty} \ell = \frac{4}{e}$ de la question **a.**. Mais on a beaucoup mieux, $u_n - \ell \sim_{+\infty} \frac{2 \ln(2)}{en}$.

3.73 a. La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 1$ (classique). Or $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et

$v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par DL ou croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t)$.

Ainsi, par IPP, les intégrales $\int_0^{+\infty} u'v = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} uv' = - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ ont même nature.

Or la seconde est absolument convergente car la fonction $g : t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$ se prolonge par continuité en 0 en

posant $g(0) = \frac{1}{2}$ par DL et $g(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Ainsi, $\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge (mais pas absolument) pour $x \geq 0$.

Soit donc $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction F y est C^1 et vérifie $F'(x) = -f(x) = -\frac{\sin x}{x}$ par le théorème fondamental de l'intégration.

b. $G : x \mapsto x$ est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ donc, par IPP, on a $\int_0^a F(x)G'(x)dx = [F(x)G(x)]_0^a - \int_0^a F'(x)G(x)dx$ pour un réel $a \geq 0$; ce qui donne $\int_0^a F(x)dx = aF(a) + \int_0^a \sin(x)dx = aF(a) + 1 - \cos(a)$.

Or par IPP encore, $aF(a) = a \left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_a^{+\infty} + a \int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \cos(a) - 1 + a \int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ et

on obtient $\int_0^a F(x)dx = a \int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = a \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx - a \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = 1 - a \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ qui se

transforme par une ultime IPP, $u(x) = \sin x$ et $v(x) = \frac{1}{x^2}$, en $\int_0^a F(x)dx = 1 + \frac{\sin a}{a} - 2a \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$.

Enfin $\left| \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx \right| \leq \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2a^2}$ donc $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\sin a}{a} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx = 0$ et on peut enfin

conclure à la convergence l'intégrale proposée et que $I = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a F(x)dx = 1$.

3.74 a. Comme $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on pense à une comparaison série/intégrale.

Pour $n \geq 1$ et $k \in \llbracket n+1; 2n \rrbracket$, on a $\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k f(t)dt$. On somme ces inégalités

pour $k \in \llbracket n+1; 2n \rrbracket$ pour avoir l'inégalité $[2\sqrt{t}]_{n+1}^{2n+1} = \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq S_n \leq \int_n^{2n} \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_n^{2n}$. Or

$[2\sqrt{t}]_n^{2n} = 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n}$ et $[2\sqrt{t}]_{n+1}^{2n+1} = 2\sqrt{2n+1} - 2\sqrt{n+1} = 2\sqrt{n} \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) \sim_{+\infty} 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n}$.

Ainsi, on arrive à l'équivalent $S_n \underset{+\infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$ par encadrement.

b. On peut aussi écrire $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} = \sqrt{n} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$ et, comme $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$ est continue sur le

segment $[0; 1]$, par le théorème sur les sommes de RIEMANN, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \int_0^1 f = [2\sqrt{1+t}]_0^1 = 2\sqrt{2}-2$.

On retrouve bien l'équivalent de la question **a.** : $S_n \underset{+\infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.

3.75 a. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}(x) = 1 \iff e^x - e^{-x} = 2 \iff e^{2x} - 2e^x - 1 = 0 \iff y^2 - 2y - 1 = 0$ en posant $y = e^x > 0$.

Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$ donc $y = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$ mais comme $y > 0$, on a

forcément $y = 1 + \sqrt{2}$ donc $\text{sh}(x) = 1 \iff x = \ln(y) = \ln(1 + \sqrt{2}) = \alpha$.

b. $\forall t \in [0; \alpha]$, $0 \leq \text{sh}(t) \leq 1$ car sh est croissante donc $0 \leq (\text{sh}(t))^{n+1} \leq (\text{sh}(t))^n$. Ainsi, par croissance de l'intégrale, $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. La suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est donc décroissante et minorée par 0 donc convergente.

Avec la question **d.** (qui se démontre indépendamment des questions **b.** et **c.**), si on note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ et si on avait $\ell > 0$, on aurait $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nI_n + (n-1)I_{n-2}) = +\infty$ ce qui contredit le fait que $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \ln(2)$.

De même, $\ell < 0$ est impossible et on en déduit donc que $\ell = 0$.

La bonne méthode est d'utiliser le théorème de convergence dominée : $\forall t \in [0; \alpha]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{sh}(t))^n = 0$ avec la

domination $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0; \alpha]$, $|(\text{sh}(t))^n| \leq 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha (\text{sh}(t))^n dt = \int_0^\alpha 0 = 0$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

d. Soit $n \geq 2$, en posant $u(t) = (\text{sh}(t))^{n-1}$ et $v(t) = \text{ch}(t)$, on a $u'(t) = (n-1)\text{ch}(t)(\text{sh}(t))^{n-2}$ et $v'(t) = \text{sh}(t)$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0; \alpha]$ donc $I_n = \int_0^\alpha u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^\alpha - \int_0^\alpha u'(t)v(t)dt$ d'où

$I_n = [(\text{ch}(t)(\text{sh}(t))^{n-1})]_0^\alpha - (n-1) \int_0^\alpha (\text{ch}(t))^2 (\text{sh}(t))^{n-2} dt$. De plus, $I_n = (\text{ch}(\alpha)(\text{sh}(\alpha))^{n-1} - (n-1)(I_{n-2} + I_n))$ car $(\text{ch}(t))^2 = 1 + (\text{sh}(t))^2$. Ensuite $I_n = \sqrt{2} - (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$ car $\text{ch}(\alpha) = \sqrt{1 + (\text{sh}(\alpha))^2} = \sqrt{2}$ et $\text{sh}(\alpha) = 1$, ce qui revient à la relation attendue $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.

e. Comme la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, pour un entier $n \geq 2$ fixé, on a $I_{n-2} \geq I_n$ ce qui donne $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2} \geq (2n-1)I_n$ ou encore $I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1}$. De même, $I_n \geq I_{n+2}$ donc, comme

$(n+2)I_{n+2} + (n+1)I_n = \sqrt{2}$, $\sqrt{2} \leq (2n+3)I_n$, c'est-à-dire $I_n \geq \frac{\sqrt{2}}{2n+3}$. Par encadrement, $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}n}$.

3.76 a. $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ est l'aire d'un quart de cercle de rayon 1 donc $I_0 = \frac{\pi}{4}$. Ou alors on pose le changement

de variable $x = \sin(t)$ d'où $I_0 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{2t+\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

($\sin$ est C^1 de $[0; \frac{\pi}{2}]$ dans $[0; 1]$). Plus simplement, $I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

Pour $x \in]0; 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 < x^{n+1}\sqrt{1-x^2} < x^n\sqrt{1-x^2}$ qu'on intègre sur $[0; 1]$ pour avoir $0 < I_{n+1} < I_n$ (l'inégalité stricte vient du fait que les deux fonctions ne sont pas constamment égales).

Ainsi $(I_n)_{n \geq 0}$ est strictement positive et strictement décroissante.

b. Si $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $u : x \mapsto -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$ et $v : x \mapsto x^n$ sont de classe C^1 sur $[0; 1]$ donc, par intégration par parties, puisque $u'(x) = x\sqrt{1-x^2}$ et $v'(x) = nx^{n-1}$, on a la relation :

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^n(x\sqrt{1-x^2})dx = \left[-\frac{x^n}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 + \frac{n}{3} \int_0^1 x^{n-1}(1-x^2)^{3/2}dx = \frac{n}{3} \int_0^1 x^{n-1}(1-x^2)^{3/2}dx.$$

En écrivant $(1-x^2)^{3/2} = (1-x^2)\sqrt{1-x^2}$ et par linéarité : $I_{n+1} = \frac{n}{3}I_{n-1} - \frac{n}{3}I_{n+1}$ donc $I_{n+1} = \frac{n}{n+3}I_{n-1}$.

c. On en déduit donc, d'après a., que $0 < I_{n+1} = \frac{n}{n+3} I_{n-1} < I_n < I_{n-1}$ donc $\frac{n}{n+3} < \frac{I_n}{I_{n-1}} < 1$. Ainsi, par encadrement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$ donc $I_n \sim_{+\infty} I_{n-1}$.

d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3)I_{n+1}I_n = (n+1)(n+2)nI_{n-1}I_n$ d'après b. donc $u_{n+1} = u_n$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante. Comme $u_1 = 6I_0I_1 = \frac{\pi}{2}$, on a donc $\forall n \geq 1$, $(n+1)(n+2)(n+3)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.

D'après c., $I_n^2 \sim_{+\infty} I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2n(n+1)(n+2)} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2n^3}$. En passant à la racine, comme $I_n > 0$, $I_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

3.77 a. Il est clair que f est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $\binom{n}{k}$.

b. f est de classe C^∞ sur $[0; 1]$, positive. Si $k = 0$, $f(x) = (1-x)^n$ donc f est décroissante sur $[0; 1]$ et varie de 1 à 0. Si $k = n$, alors $f(x) = x^n$, donc f est croissante sur $[0; 1]$ et varie de 0 à 1.

Si $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, on calcule $f'(x) = \binom{n}{k} (kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1})$ qui se simplifie en $f'(x) = \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} (k(1-x) - (n-k)x) = \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} (k-nx)$ donc f est croissante sur $[0; k/n]$ et décroissante sur $[k/n; 1]$ avec pour valeur maximale $\binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}$. Si $n = 2k$, alors

$f(1-x) = \binom{2k}{k} (1-x)^k (1-(1-x))^k = f(x)$ donc le graphe de f admet un axe de symétrie d'équation $x = \frac{1}{2}$.

c. Si $x \in]0; 1[$ et $k \in \mathbb{N}$ est fixé, quand n tend vers $+\infty$, $f(x) = \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{x^k(1-x)^n}{(1-x)^k}$ or on peut aussi écrire $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1) \sim_{+\infty} n^k$ donc $f(x) \sim_{+\infty} \frac{x^k}{k!(1-x)^k} n^k (1-x)^n$. Pas la bonne question !!!!

d. On intègre par parties dans $I_{n,k}$ (si $k < n$) en posant $u(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ et $v(x) = x^{n-k}$, u et v sont C^1 sur $[0; 1]$ et $u'(x) = x^k$ et $v'(x) = -(n-k)(1-x)^{n-k-1}$: $I_{n,k} = \left[\frac{x^{k+1}x^{n-k}}{k+1} \right]_0^1 + \frac{n-k}{k+1} \int_0^1 \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} dx$.

Mais $\frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{(n-k)n!}{(k+1)k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \binom{n}{k+1}$. Ainsi $I_{n,k} = I_{n,k+1}$.

On en déduit que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $I_{n,k} = I_{n,n} = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

3.78 La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2 - \pi t}$ est continue sur $]\pi; +\infty[$ et $f(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable sur $[4; +\infty[$. De

plus, comme $\sin(t) = \sin(\pi - t)$, on a $\sin(t) \underset{\pi}{\sim} \pi - t$ donc $f(t) \underset{\pi}{\sim} \frac{\pi - t}{\pi t(t - \pi)} \underset{\pi}{\sim} \frac{1}{\pi \pi}$ donc f se prolonge par continuité en π en posant $f(\pi) = \frac{1}{\pi}$. Par conséquent, f est intégrable sur $]\pi; +\infty[$ donc $I = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2 - \pi t} dt$ existe.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t^2 - \pi t} dt$. Ainsi, si on définit la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ pour $n \geq 1$, on a $S_{n-1} = \int_\pi^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t^2 - \pi t} dt$. On sait d'après ce qui précède que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2 - \pi t} dt = I$.

• Sur $[k\pi; (k+1)\pi]$, $\sin$ est du signe de $(-1)^k$ donc u_k aussi est du signe de $(-1)^k$: $\sum_{k \geq 1} u_k$ est donc alternée.

• Par l'inégalité de la moyenne, on a $|u_k| \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dt}{t(t-\pi)} \leq \frac{1}{k(k+1)\pi}$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$.

• $|u_k| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^2 - \pi t} dt = \int_0^\pi \frac{|\sin(u+k\pi)|}{(u+k\pi)(u+(k-1)\pi)} du = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{(u+k\pi)(u+(k-1)\pi)} du$ en posant $u = t - k\pi$. Ainsi $|u_{k+1}| - |u_k| = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{(u+(k+1)\pi)(u+k\pi)} du - \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{(u+k\pi)(u+(k-1)\pi)} du$ ce qui devient

$$|u_{k+1}| - |u_k| = \int_0^\pi \frac{\sin(u)(u + (k-1)\pi - u - (k+1)\pi)}{(u + (k+1)\pi)(u + k\pi)(u + (k-1)\pi)} du = -2\pi \int_0^\pi \frac{du}{(u + (k+1)\pi)(u + k\pi)(u + (k-1)\pi)}$$

donc $|u_{k+1}| - |u_k| = -2\pi \int_0^\pi \frac{du}{(u + (k+1)\pi)(u + k\pi)(u + (k-1)\pi)} \leq 0$ donc $(|u_k|)_{k \geq 1}$ est décroissante.

Le critère spécial des séries alternées montre alors que $\sum_{k \geq 1} u_k$ converge, on le savait déjà. Il nous apprend

aussi que le signe de $I = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est celui du premier terme, c'est-à-dire de u_1 qui est positif. Ainsi, $I \geq 0$.

3.79 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même sur $\mathbb{R}_+$ si $x \neq 0$).

De plus, si $x \neq 0$, $f_x(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{\ln(t)}{x^2} \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ par croissances comparées donc f_x est intégrable sur $]0; 1]$ par critère de RIEMANN. Par contre si $x = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} t f_0(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(t)}{t} = -\infty$ donc f_0 n'est pas intégrable sur $]0; 1]$ car $\frac{1}{t} = O(f_0(t))$ et que $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0; 1]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc f_x est intégrable sur $[1; +\infty[$ par RIEMANN.

Au final, le domaine de définition de F est $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}^*$ et F est clairement paire sur $\mathcal{D}_F$.

b. Comme $\varphi : u \mapsto \frac{1}{u}$ est une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, le changement de variable $t = \varphi(u) = \frac{1}{u}$ montre que $F(1) = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1/u)}{1 + (1/u)^2} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -F(1)$ donc $F(1) = 0$.

c. Soit $x > 0$, en posant $t = xu$ (facile à justifier), $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(xu)}{x^2 + x^2 u^2} x du$. Or $\ln(xu) = \ln(x) + \ln(u)$ donc $F(x) = \frac{\ln(x)}{x} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} + \frac{1}{x} F(1) = \frac{\ln(x)}{x} [\text{Arctan}(u)]_0^{+\infty} = \frac{\pi \ln(x)}{2x}$.

Comme F est paire, au final, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F(x) = F(|x|) = \frac{\pi \ln |x|}{2|x|}$.

3.80 a. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n :]0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}$. Alors f_n est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ par

théorèmes généraux et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f_n(0) = n$ car $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$. Ainsi, pour

$n \in \mathbb{N}$, J_n est bien définie en tant qu'intégrale de fonction continue sur un segment. $J_0 = \int_0^{\pi/2} 0 = 0$ et

$J_1 = \int_0^{\pi/2} 1 = \frac{\pi}{2}$. Comme $\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$ et $\sin(3t) = -4 \sin^3(t) + 3 \sin(t)$, $J_2 = \int_0^{\pi/2} 2 \cos(t) dt =$

$[2 \sin(t)]_0^{\pi/2} = 2$ et $J_3 = \int_0^{\pi/2} (3 - 4 \sin^2(t)) dt = \int_0^{\pi/2} (2 \cos(2t) + 1) dt = [\sin(2t) + t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale, on obtient $J_{n+2} - J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((n+2)t) - \sin(nt)}{\sin(t)} dt$ or on sait que

$\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ donc $J_{n+2} - J_n = \int_0^{\pi/2} 2 \cos((n+1)t) dt = 2 \left[\frac{\sin((n+1)t)}{n+1}\right]_0^{\pi/2}$

d'où $J_{n+2} - J_n = 0$ si n est impair et $J_{n+2} - J_n = \frac{2(-1)^p}{2p+1}$ si $n = 2p$ est pair.

• Comme $J_1 = J_3 = \frac{\pi}{2}$, par une récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$.

• Pour $n \in \mathbb{N}$, par télescopage, $J_{2n} = J_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (J_{2k+2} - J_{2k}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2(-1)^k}{2k+1}$.

c. Pour $x > 0$, on effectue une intégration par parties en posant $u : t \mapsto \frac{\sin(xt)}{x}$ et $v = f$ qui sont de classe C^1 sur le segment $[a; b]$ et on trouve $\int_a^b f(t) \cos(xt) dt = \left[\frac{\sin(xt)f(t)}{x}\right]_a^b - \frac{1}{x} \int_a^b f'(t) \sin(xt) dt$. Or on

peut majorer $\left| \left[\frac{\sin(xt)f(t)}{x} \right]_a^b \right| = \left| \frac{\sin(bx)f(b) - \sin(ax)f(a)}{x} \right| \leq \frac{2\|f\|_{\infty,[a;b]}}{x}$ pour la partie “toute intégrée” et $\left| \frac{1}{x} \int_a^b f'(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_a^b |f'(t)| dt \leq \frac{(b-a)\|f'\|_{\infty,[a;b]}}{x}$ par inégalité triangulaire sur les intégrales car f et f' sont continues sur le segment $[a; b]$ donc elles y sont bornées. Ainsi, par inégalité triangulaire, on arrive à $\left| \int_a^b f(t) \cos(xt) dt \right| \leq \frac{2\|f\|_{\infty,[a;b]} + (b-a)\|f'\|_{\infty,[a;b]}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Par encadrement, la majoration précédente permet de conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(xt) dt = 0$.

d. Toujours par linéarité de l'intégrale et avec la formule $\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on trouve $J_{n+1} - J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin(t/2) \cos(((2n+1)t)/2)}{\sin(t)} dt$. Or $\sin(t) = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ donc, en simplifiant, $J_{n+1} - J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \cos\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt$. D'après le lemme de RIEMANN-LEBESGUE vu en **c.**, comme $f : t \mapsto \frac{1}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}$ est de classe C^1 sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{2} = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_{n+1} - J_n) = 0$.

La suite $(J_{2n+1})_{n \geq 0}$ est constante donc elle tend vers $\frac{\pi}{2}$. Comme $J_{2n} = J_{2n+1} - (J_{2n+1} - J_{2n})$, ce qui précède montre aussi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_{2n} = \frac{\pi}{2}$. Comme on a les indices pairs et les indices impairs, $(J_n)_{n \geq 0}$ tend vers $\frac{\pi}{2}$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2}$, ce qui s'écrit aussi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

3.81 a. Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues et décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$ et $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}$ pour $k \geq 2$. On somme le premier de ces encadrements pour $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ pour avoir $1 + \int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}$ et le second pour $k \geq n$ (tout converge) pour obtenir $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$. Ainsi, $1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$ et $\frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1}$. On en déduit par théorème d'encadrement que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim_{+\infty} \ln(n)$ et $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$.

On peut procéder de la même manière pour montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ mais on peut aussi établir que $\frac{2}{k^3} \leq \frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2} = \frac{2k-1}{k^2(k-1)^2}$ car $2k^2 - 4k + 2 \leq 2k^2 - k$ ce qui, en sommant et par télescopage, donne la majoration $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2(n-1)^2}$. Ainsi, $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim_{+\infty} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f_n(t) = \frac{1}{(1+t^3)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{3n}}$ donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après RIEMANN car $3n > 1$. Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, le réel u_n existe.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \frac{1}{(1+t^3)^n}$ et $v(t) = 1$ dans l'expression de u_n , les deux fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = u(0)v(0) = 0$ donc $u_n = \left[\frac{t}{(1+t^3)^n} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-3nt^3}{(1+t^3)^{n+1}}$. En décomposant $t^3 = (1+t^3) - 1$ et en utilisant la linéarité de l'intégrale (les deux intégrales convergent), on obtient $u_n = 3n(u_n - u_{n+1})$ donc $u_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} u_n$.

d. $v_{n+1} - v_n = \alpha \ln(n+1) + \ln(u_{n+1}) - \alpha \ln(n) - \ln(u_n) = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3n}\right)$ donc, avec les

développements limités, $v_{n+1} - v_n = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

- Si $\alpha \neq \frac{1}{3}$, $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\alpha - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{n}$ donc $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$ diverge par RIEMANN.
- Si $\alpha = \frac{1}{3}$, $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$ converge par RIEMANN.

Ainsi, par dualité suite-série, la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge (vers un réel ℓ) si et seulement si $\alpha = \frac{1}{3}$.

Comme $v_n = \frac{1}{3} \ln(n) + \ln(u_n) = \ln(n^{1/3} u_n)$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$, en utilisant la continuité de l'exponentielle, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/3} u_n = e^\ell \neq 0$. On a donc l'équivalent $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^\ell}{\sqrt[3]{n}}$.

3.82 Tout d'abord, comme la fonction $f_b : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f_b(t) = \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b}$ est continue et que

$f_b(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{b-1}}$, la fonction f_b est intégrable sur $]0; n]$ (pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si $b - 1 < 1$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bien définie si et seulement si $b < 2$.

a. Si $b > 0$ et $b \neq 1$, on a donc $b \in]0; 1[\cup]1; 2[\dots$ à terminer.

• Soit maintenant $b < 2$, alors comme $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t^b}$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $b > 1$ et

nous poserons dans ce cas $I_b = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt > 0$ (si $b \in]1; 2[$ donc).

• Si $b < 1$, par IPP, $\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt = \frac{\text{Arctan}(n)}{(1-b)n^{b-1}} - \int_0^n \frac{dt}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}}$ et $g : t \mapsto \frac{dt}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi $b > 0$ et dans ce cas, on note $J_b = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}} > 0$ (si $b \in]0; 1[$ donc).

b. • Si $b \leq 0$, comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt$ diverge, on a $\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt \underset{+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt$ et on encadre $\frac{\pi}{4} \int_1^n \frac{dt}{t^b} \leq \int_1^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt \leq \frac{\pi}{2} \int_1^n \frac{dt}{t^b}$ donc $\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt$ est "de l'ordre de" $\int_1^n \frac{dt}{t^b}$ donc de $\frac{1}{n^{b-1}}$.

• Si $b = 1$, $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$ diverge aussi, et comme $\int_1^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t^b} dt = \frac{\pi}{2} \int_1^n \frac{1}{t} dt - \int_1^n \frac{\text{Arctan}(1/t)}{t^b} dt$, on a $\int_0^n \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi \ln(n)}{2}$ car la fonction $t \mapsto \frac{\text{Arctan}(1/t)}{t^b}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

• Si $b \in]1; 2[$, on a donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{I_b}{n^a}$ et $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si $a > 1$.

• Si $b \in]0; 1[$, on a donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{(1-b)n^{a+b-1}}$ et $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si $a + b > 2$.

• Si $b \in]-\infty; 0]$, on a donc (par majoration ou minoration) $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si $a + b > 2$.

c. Si $b = 1$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi \ln(n)}{2n^a}$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si $a > 1$ (BERTRAND).

3.83 a. La fonction $y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse donc elle y admet des primitives.

De plus, $y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2 = -2y'^2 - 2yy' - 2yy'' - 2y'y'' = -(y^2)' - (y'^2)' - (2yy')' = -(y + y')^2$. Ainsi, $-(y + y')^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2$.

b. L'inégalité classique $|yy''| \leq \frac{y^2 + y''^2}{2}$ montre, par comparaison, comme $y^2 + y''^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse, que yy'' est aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} yy''$ converge.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, par intégration par parties puisque les fonctions y et y' sont de classe C^1 sur $[0; x]$, on

a. $\int_0^x y'^2 = [yy']_0^x - \int_0^x yy''$. Or on sait que $\int_0^{+\infty} yy''$ converge et que, par le théorème de la limite monotone, comme $x \mapsto \int_0^x y'^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle admet une limite finie ou elle tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Il en est donc de même pour yy' . Mais si on avait $\lim_{+\infty} yy' = +\infty$, on aurait $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x yy' = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x = +\infty$ ce qui montrerait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y^2(x) = +\infty$, en contradiction avec la convergence de $\int_0^{+\infty} y'^2$. Ainsi, par l'absurde, on a prouvé que $\int_0^{+\infty} y'^2$ converge.

c. Comme avant $|yy'| \leq \frac{y^2 + y'^2}{2}$ donc yy' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison car y^2 et y'^2 le sont et, à nouveau, $\int_0^{+\infty} yy'$ converge. Or $2 \int_0^x y(t)y'(t)dt = [y^2]_0^x = y(x)^2 - y(0)^2$, donc y^2 admet une limite finie en $+\infty$. Mais comme $\int_0^{+\infty} y'^2$ converge par hypothèse, cette limite est forcément nulle donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

d. À nouveau, $|y'y''| \leq \frac{y'^2 + y''^2}{2}$ donc $y'y''$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison car y'^2 et y''^2 le sont donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} y'y''$ converge. Ainsi $2 \int_0^x y'(t)y''(t)dt = [y'^2]_0^x = y'(x)^2 - y'(0)^2$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Si on note $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x)^2 \in \mathbb{R}_+$, comme $\int_0^{+\infty} y'^2$ converge, on a forcément $\ell = 0$ ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$.

e. Comme y, y', y'' sont de carrés intégrables d'après ce qui précède, la fonction $y + y' + y''$ l'est aussi donc $y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par somme. De toutes façons, pour $x \geq 0$, $\int_0^x (y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2) = [- (y + y')^2]_0^x$ d'après la question a. et $\lim_{+\infty} (y + y')^2 = 0$ d'après les questions c. et d..

En passant à la limite, on a $\int_0^{+\infty} (y^2 - y'^2 + y''^2 - (y + y' + y'')^2) = (y(0) + y'(0))^2$. $\int_0^{+\infty} y^2 - \int_0^{+\infty} y'^2 + \int_0^{+\infty} y''^2 - \int_0^{+\infty} (y + y' + y'')^2 = (y(0) + y'(0))^2$ par linéarité de l'intégrale d'où $\int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2 - \int_0^{+\infty} y'^2 = \int_0^{+\infty} (y + y' + y'')^2 + (y(0) + y'(0))^2 \geq 0$ et l'inégalité attendue.

f. Pour qu'il y ait égalité dans l'inégalité de la question précédente, il est nécessaire et suffisant que l'on ait $y(0) + y'(0) = 0$ et que (E) : $y'' + y' + y = 0$. Comme les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et j^2 , les solutions sur $\mathbb{R}_+$ de (E) sont les fonctions $y : x \mapsto \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) e^{-\frac{x}{2}}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Comme $y(0) = A$ et $y'(0) = -\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}B}{2}$, la condition $y(0) + y'(0) = 0$ équivaut à $\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 0$ ou $A = -\sqrt{3}B$.

Ainsi, les fonctions y telles que $\int_0^{+\infty} y'^2 = \int_0^{+\infty} y^2 + \int_0^{+\infty} y''^2$ sont les fonctions (en posant $\lambda = 2B \in \mathbb{R}$) $y : x \mapsto \lambda \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) e^{-\frac{x}{2}} = \lambda \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) e^{-\frac{x}{2}}$.

Questions de cours :

- Soit un intervalle I et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux et de carré intégrables sur I . Alors, puisque $|fg| \leq \frac{f^2 + g^2}{2}$, l'intégrale $\int_I fg$ converge par comparaison. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \int_I (f + tg)^2$; l'intégrale converge car $(f + tg)^2 = f^2 + 2tfg + t^2g^2$ est intégrable sur I par somme de fonctions intégrables. Ainsi, φ est bien définie et elle est polynomiale par linéarité de l'intégrale et on a $\varphi(t) = \int_I f^2 + 2t \int_I fg + t^2 \int_I g^2$. Traitons deux cas :

- Si $\int_I g^2 = 0$, alors φ est affine et positive sur $\mathbb{R}$ donc elle est constante et on a donc $\int_I fg = 0$.

Alors l'inégalité $\left(\int_I fg \right)^2 \leq \int_I f^2 \times \int_I g^2$ est clairement vraie ($0 \leq 0$).

– Si $\int_I g^2 > 0$, comme φ est positive sur $\mathbb{R}$, son discriminant est négatif (on ne peut pas avoir deux racines réelles car φ serait négative entre les deux). Ainsi, $\Delta = 4 \int_I f^2 \times \int_I g^2 - 4 \left(\int_I fg \right)^2 \leq 0$ ce qui est à nouveau l'inégalité $\left(\int_I fg \right)^2 \leq \int_I f^2 \times \int_I g^2$.

Dans les deux cas, on a l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ : $\left(\int_I fg \right)^2 \leq \int_I f^2 \times \int_I g^2$.

• Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que f est nulle sur $\left[0; \frac{3}{4}\right]$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est affine sur $\left[n - \frac{1}{2^{2n}}; n\right]$ et sur $\left[n; n + \frac{1}{2^{2n}}\right]$ avec $f\left(n - \frac{1}{2^{2n}}\right) = f\left(n + \frac{1}{2^{2n}}\right) = 0$ et $f(n) = 2^{n+1}$ et telle que f soit nulle partout ailleurs que sur ces intervalles. Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on trouve $\int_{\mathbb{R}_+} f = 2$ bien que la fonction f ne tende pas vers 0 en $+\infty$. En effet, si $x_n = n + \frac{1}{2^{2n}}$, on sait calculer $\int_0^{x_n} f = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \times 2^{k+1} \times \left(2 \times \frac{1}{2^{2k}}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ qui tend vers 2.

3.84 a. La fonction $g : t \mapsto tf(t)$ est continue sur le segment $[a; b]$ ce qui justifie l'existence de l'intégrale $\int_a^b tf(t)dt$ dans laquelle on effectue le changement de variable $t = \varphi(u) = a + b - u$ avec φ qui est bien de classe C^1 sur le segment $[a; b]$ et qui vérifie $\varphi(a) = b$ et $\varphi(b) = a$. Ainsi, d'après le cours et d'après l'hypothèse faite sur f , on a $\int_a^b tf(t)dt = \int_b^a (a + b - u)f(a + b - u)(-1)du = \int_a^b (a + b - u)f(u)du$. Par linéarité de l'intégrale, on a donc $I = (a + b) \int_a^b f(t)dt - I$ ce qui prouve que $I = \int_a^b tf(t)dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t)dt$.

b. La fonction $g : t \mapsto \frac{t \sin(t)}{1 + \cos^2(t)} = tf(t)$ est continue sur le segment $[0; \pi]$ donc $J = \int_0^\pi \frac{t \sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt$ existe. On vérifie bien que $\forall t \in [0; \pi]$, $f(\pi - t) = \frac{\sin(\pi - t)}{1 + \cos^2(\pi - t)} = f(t)$ ce qui montre avec la question **a.** que $\int_0^\pi \frac{t \sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt = \frac{\pi}{2} [-\text{Arctan}(\cos(t))]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$.

3.85 a. La fonction $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{(x^2 - x^3)^{1/3}} = x^{-2/3}(1 - x)^{-1/3}$ est continue sur $]0; 1[$. De plus, $f(x) \sim \frac{1}{1 - (1 - x)^{1/3}}$ et $f(x) \sim \frac{1}{x^{2/3}}$ donc, d'après RIEMANN puisque $\frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$, f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$ et $]0; \frac{1}{2}]$ donc sur $]0; 1[$. Par conséquent, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x^3)^{1/3}}$ converge donc I existe.

Même si ce n'est pas demandé, on peut transformer l'intégrale I en posant $x = \varphi(u) = \frac{u^3}{1 + u^3}$ car la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow]0; 1[$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 dont la bijection réciproque est la fonction $\varphi^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}$. Par changement de variable, $I = \int_0^{+\infty} f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^3}$ (après calculs).

On effectue ensuite le changement de variable $u = \psi(v) = \frac{1}{v}$ dans $\int_1^{+\infty} \frac{du}{1 + u^3}$ car $\psi :]0; 1] \rightarrow [1; +\infty[$ est une bijection strictement décroissante de classe C^1 donc $\int_1^{+\infty} \frac{du}{1 + u^3} = -\int_1^0 \frac{v dv}{1 + v^3}$ (après calculs). On obtient donc, puisque v est une variable muette qu'on remplace avantageusement par u et que l'on factorise $1 + u^3 = (1 + u)(u^2 - u + 1)$, $I = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^3} = \int_0^1 \frac{du}{1 + u^3} + \int_0^1 \frac{u du}{1 + u^3} = \int_0^1 \frac{(1 + u) du}{1 + u^3} = \int_0^1 \frac{du}{u^2 - u + 1}$.

b. Avec cette expression de I , et en mettant $u^2 - u + 1$ sous la forme $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(1 + \left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$, on

trouve $I = \int_0^1 \frac{du}{u^2 - u + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} du}{\left(1 + \left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arctan} \left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ par
 imparité de Arctan . Or $\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{6}$ donc $I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

3.86 a. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. De plus, comme $\forall t > 0$, $f(t) = \sqrt{t} \left(1 + a\sqrt{1 + \frac{1}{t}} + b\sqrt{1 + \frac{2}{t}} \right)$ et que $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$, on obtient en $+\infty$ le développement asymptotique $f(t) = \sqrt{t} \left((1+a+b) + \left(\frac{a}{2} + b \right) \frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right)$.

• Si $1+a+b \neq 0$, $f(t) \sim_{+\infty} (1+a+b)\sqrt{t}$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \pm\infty$ selon le signe de $1+a+b$: $\int_0^{+\infty} f$ diverge.

• Si $1+a+b = 0$ et $\frac{a}{2} + b \neq 0$, alors $f(t) \sim_{+\infty} \frac{b + (a/2)}{\sqrt{t}}$ donc f garde un signe constant au voisinage de $+\infty$ et, puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ diverge d'après RIEMANN, $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge aussi donc $\int_0^{+\infty} f$ diverge.

• Si $1+a+b = 0$ et $\frac{a}{2} + b = 0$, alors $f(t) = O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ converge d'après RIEMANN. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge.

Par conséquent, $\int_0^{+\infty} f$ converge si et seulement si $1+a+b = \frac{a}{2} + b = 0$, c'est-à-dire $a = -2$ et $b = 1$.

b. Dans ce cas, $\int_0^x f(t)dt = \left[\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{4}{3}(t+1)^{3/2} + \frac{2}{3}(t+2)^{3/2} \right]_0^x$ donc, puisque $(1+u)^{3/2} = 1 + \frac{3u}{2} + O(u^2)$, on a $\int_0^x f(t)dt = \frac{2x^{3/2}}{3} \left(1 - 2\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3/2} + \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3/2} \right) + \frac{4}{3} - \frac{2(2)^{3/2}}{3} = \frac{4}{3}(1 - \sqrt{2}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Ainsi, on obtient $I = \int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2})dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t)dt = \frac{4}{3}(1 - \sqrt{2}) \sim -0,55$.

3.87 Analyse : soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. On peut ré-écrire la troisième condition,

puisque f' est continue de primitive f , sous la forme $\forall x \geq 0$, $\int_0^x f'(t)^2 dt \geq f(x+f(x)) - f(x) = \int_x^{x+f(x)} f'(t)dt$.

Dans cette dernière intégrale, on effectue le changement de variable $t = x + f(u) = \varphi(u)$, licite puisque φ est strictement croissante, de classe C^1 et réalise une bijection de $[0; x]$ dans $[x; x + f(x)]$, et on obtient

$\int_x^{x+f(x)} f'(t)dt = f(x+f(x)) - f(x) = \int_0^x f'(x+f(u))f'(u)du$. Par linéarité de l'intégrale, comme on a $\forall x \geq 0$, $\int_0^x f'(t)^2 dt \geq \int_0^x f'(x+f(u))f'(u)du$, il vient $\forall x \geq 0$, $\int_0^x f'(t)(f'(t) - f'(x+f(t)))dt \geq 0$.

Or, par hypothèse, $\forall t \in [0; x]$, $f'(t) > 0$ et $f'(t) - f'(x+f(t)) \leq 0$ car $t \leq x < x+f(t)$ puisque f' est croissante.

La fonction $g : t \mapsto f'(t)(f'(t) - f'(x+f(t)))$ est continue et négative donc $\int_0^x f'(t)(f'(t) - f'(x+f(t)))dt \leq 0$

et on conclut que $\int_0^x f'(t)(f'(t) - f'(x+f(t)))dt = 0$. Un théorème du cours nous apprend, pour $x > 0$,

que g étant continue et négative et d'intégrale nulle sur $[0; x]$ ne peut être que la fonction nulle. On a donc $\forall x > 0$, $\forall t \in [0; x]$, $f'(t)(f'(t) - f'(x+f(t))) = 0$ donc $f'(t) - f'(x+f(t)) = 0$ car $f'(t) > 0$. Pour $x > 0$ fixé,

on prend $t = 0$ et on obtient $f'(x) = f'(0)$ donc f' est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+$ puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $f(0) = 0$, il existe donc une constante $a \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \geq 0$, $f(x) = ax$. Mais f est supposée strictement croissante ce qui impose $a > 0$.

Synthèse : Soit $a > 0$ et $f : x \mapsto ax$, alors $f(0) = 0$, f' est croissante et $f' = a$ est strictement positive et, pour

tout réel $x \geq 0$, $\int_0^x f'(t)^2 dt = \int_0^x a^2 dt = a^2 x = af(x) = a(x + f(x)) - ax = f(x + f(x)) - f(x)$.

En conclusion : par double implication, on a montré que les fonctions f vérifiant les conditions de l'énoncé sont exactement les fonctions linéaires $f : x \mapsto ax$ avec $a > 0$.

3.88 Méthode 1 : Comme f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on a $ff' = O(f)$ donc, comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que ff' est continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction ff' est aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison. Ainsi, $\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)dt$ converge ce qui garantit l'existence d'une limite finie de $\int_0^x f(t)f'(t)dt$ quand x tend vers $+\infty$. On peut donc poser $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) \geq 0$ car $\int_0^x f(t)f'(t)dt = \left[\frac{f^2(t)}{2} \right]_0^x = \frac{f^2(x)}{2} - \frac{f^2(0)}{2}$. Comme f est positive, $f(x) = \sqrt{f^2(x)}$ donc, par continuité de la fonction racine, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{\ell}$. Mais comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on sait d'après le cours que ceci impose $\sqrt{\ell} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ comme attendu.

Méthode 2 : (méthode proposée par l'examineur ???) supposons que f ne tende pas vers 0 en $+\infty$. En niant $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}_+, \forall x \geq a, 0 \leq f(x) \leq \varepsilon$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout réel $a \geq 0$, il existe $x > a$ tel que $f(x) > \varepsilon$. On crée une suite de points $(x_n)_{n \geq 0}$ de la manière suivante :

- avec $a = \frac{1}{2}$, il existe $x_0 > \frac{1}{2}$ tel que $f(x_0) > \varepsilon$.

- soit $n \in \mathbb{N}$ tel que les réels positifs $x_0, \dots, x_n$ soient définis, alors on prend $a = 1 + x_n \geq 0$ et il existe $x_{n+1} > 1 + x_n$ tel que $f(x_{n+1}) > \varepsilon$.

Par construction, on a défini une suite strictement croissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n > 1$ et $f(x_n) > \varepsilon$. Par une récurrence simple, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq M$. D'après le théorème des accroissements finis, $|f(x) - f(x_n)| \leq M|x - x_n|$ donc $f(x) = f(x) - f(x_n) + f(x_n) > \varepsilon - M|x - x_n|$ donc $f(x) > \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $|x - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$. Posons $\alpha = \min\left(\frac{\varepsilon}{2M}, \frac{1}{2}\right) > 0$, on a donc $\forall x \in [x_n - \alpha; x_n + \alpha], f(x) > \frac{\varepsilon}{2}$. Par construction,

les segments $[x_n - \alpha; x_n + \alpha]$ ne se chevauchent pas car $\alpha \leq \frac{1}{2}$. On en déduit, puisque f est positive,

que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{x_n + \alpha} f(t)dt \geq \sum_{k=0}^n \left(\int_{x_k - \alpha}^{x_k + \alpha} f(t)dt \right) \geq (n+1)(2\alpha)(\varepsilon/2) = (n+1)\alpha\varepsilon$ (I). Or la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est croissante et elle tend vers $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ par hypothèse ce qui est contredit par l'inégalité (I) qui prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{x_n + \alpha} f(t)dt = +\infty$.

On a donc prouvé par l'absurde que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

3.89 Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f_\alpha : t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Comme $f_\alpha(t) \sim_0 t^\alpha = \frac{1}{t^{-\alpha}}$, la fonction f_α est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $-\alpha < 1 \iff \alpha > -1$ par comparaison et par le critère de RIEMANN (en 0^+).

- Comme $f_\alpha(t) \sim_{+\infty} t^{\alpha-1} = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$, f_α est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $1 - \alpha > 1 \iff \alpha < 0$ par comparaison et par le critère de RIEMANN (en $+\infty$).

Ainsi, f_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha \in]-1; 0[$. Et comme f_α est positive, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)dt$ converge si et seulement si f_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha \in]-1; 0[$.

3.90 a. Si $x = 0$, la fonction $t \mapsto \frac{t \sin(xt)}{1+t^2}$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$ donc y est intégrable et $f(0)$ existe.

L'existence de $f(x)$ et celle de $f(-x)$ sont équivalentes par imparité de la fonction $\sin$ et, en cas de convergence, on aura $f(-x) = -f(x)$ donc f est une fonction impaire sur son ensemble de définition.

Soit $x > 0$, posons $u : t \mapsto -\frac{\cos(xt)}{x}$ et $v : t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$, alors u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, $u(0)v(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées. Ainsi, comme $u'(t) = \sin(xt)$ et $v'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(xt)}{1+t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{x(1+t^2)^2} dt$ sont de même nature et, en cas de convergence, on aura $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{x(1+t^2)^2} dt$. Or $g_x : t \mapsto \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{x(1+t^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $g_x(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ceci montre l'existence de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, la fonction f est définie et impaire sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(1-t^2) \cos(xt)}{x(1+t^2)^2} dt$.

b. Pour $x > 0$, puisque $f(x)$ existe, on effectue le changement de variable $t = \frac{u}{x} = \varphi(u)$ avec φ strictement croissante, de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u}{x} \cdot \frac{\sin(u)}{1+\frac{u^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} du = \int_0^{+\infty} \frac{u \sin(u)}{x^2 + u^2} du$. Ainsi, $f(x) - I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{x^2 + u^2} - \frac{1}{u} \right) \sin(u) du = -x^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u(x^2 + u^2)} du$. Comme on sait que $|\sin(u)| \leq u$ et que la fonction $u \mapsto \frac{1}{x^2 + u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut majorer par inégalité triangulaire et on obtient $0 \leq |I - f(x)| \leq x^2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{x^2 + u^2} = x^2 \left[\frac{1}{x} \operatorname{Arctan} \left(\frac{u}{x} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi x}{2}$. Par théorème d'encadrement, comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi x}{2} = 0$, on obtient la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = I$.

Comme $|\cos(xt)| \leq 1$ et que la fonction $t \mapsto \frac{|1-t^2|}{(1+t^2)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, encore une fois par inégalité triangulaire, avec l'expression vue en a., on a $|f(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{|1-t^2|}{(1+t^2)^2} dt$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge d'après l'énoncé, on peut utiliser CHASLES pour l'écrire sous la forme $I = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on effectue le changement de variable $t = u + k\pi = \varphi_k(u)$ dans $\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$ avec φ_k de classe C^1 sur le segment $[0; \pi]$ pour avoir $\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^\pi \frac{\sin(u + k\pi)}{u + k\pi} du$. Or $\sin(u + k\pi) = (-1)^k \sin(u)$ ce qui donne bien $\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt = (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + k\pi} du$. Finalement, on a bien une expression de I sous forme de somme de série numérique, $I = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + k\pi} du$.

d. Posons, pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + k\pi} du$. Alors $u_k > 0$ car $\sin$ est strictement positive sur $]0; \pi[$ et que $u \mapsto \frac{\sin(u)}{u + k\pi}$ est continue sur $[0; \pi]$. Comme $\forall u \in [0; \pi]$, $\frac{\sin(u)}{u + (k+1)\pi} \leq \frac{\sin(u)}{u + k\pi}$, on obtient $u_{k+1} \leq u_k$ par croissance de l'intégrale. De plus, si $k \geq 1$, il vient $0 \leq u_k \leq \int_0^\pi \frac{1}{k\pi} du$ en majorant $\sin(u)$ par 1 et en minorant $u + k\pi$ par $k\pi$. Ainsi, $0 \leq u_k \leq \frac{1}{k}$ donc, par encadrement, $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$. Comme la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ est décroissante et tend vers 0, le critère spécial des séries alternées montre que $\sum_{k \geq 0} (-1)^k u_k$ converge. On le savait déjà d'après la question précédente. Mais il dit aussi que les sommes partielles consécutives

constituent un encadrement de la somme I . Ainsi, pour tout entier n , en notant $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$, on a la double inégalité $S_{2n+1} \leq I \leq S_{2n}$. En particulier, $u_0 - u_1 \leq I \leq u_0$ donc $I \geq u_0 - u_1$. Or, en écrivant $u_0 - u_1 = \int_0^\pi \sin(u) \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+\pi} \right) du = \int_0^\pi \frac{\pi \sin(u)}{u(u+\pi)} du$, comme $u \mapsto \frac{\pi \sin(u)}{u(u+\pi)}$ est continue, positive et non nulle sur $[0; \pi]$, on a $u_0 - u_1 > 0$ donc $I > 0$. On le sait déjà car on connaît l'intégrale de DIRICHLET $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ mais ce n'est pas au programme et ce qui précède montre bien que $I > 0$.

Comme $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = I > 0$, la fonction f n'est pas continue en 0.

3.91 a. Les fonctions $u : t \mapsto \lambda t + \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = \lambda$ donc, par intégration par parties, la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t} dt$ équivaut à celle de $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda t + \cos(t)}{t^2} dt$. Or $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et $\frac{\cos(t)}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ est absolument convergente par comparaison et, même si $t \mapsto \frac{\lambda t}{t^2} = \frac{\lambda}{t}$ est continue sur $[1; +\infty[$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda}{t} dt$ ne converge que si $\lambda = 0$ d'après RIEMANN. Ainsi, par somme, $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t} dt$ converge si et seulement si $\lambda = 0$.

b. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on peut définir $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ la primitive de f qui s'annule en 0. De plus, f est continue sur le segment $[0; T]$ donc elle y est bornée, et étant T -périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

Méthode 1 : notons $M = \|f\|_{\infty, \mathbb{R}}$. Soit $x \geq 0$ et l'entier n_x tel que $n_x T$ soit le plus grand multiple de T inférieur à x , ce qui se traduit par $n_x T \leq x < (n_x + 1)T \iff n_x \leq \frac{x}{T} < n_x + 1$ donc $n_x = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$.

Par CHASLES, $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{n_x-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t) dt + \int_{n_x T}^x f(t) dt$. Posons $I = \int_0^T f(t) dt$, ce qui donne $F(x) = n_x I + \int_{n_x T}^x f(t) dt$. Par inégalité triangulaire, on a $\left| \int_{n_x T}^x f(t) dt \right| \leq \int_{n_x T}^x M dt = M(x - n_x T) \leq MT$ et on a donc $F(x) = n_x I + O(1)$. L'inégalité $n_x T \leq x < (n_x + 1)T$ montre que $x - n_x T = O(1)$ donc $n_x = \frac{x}{T} + O(1)$.

Posons $m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{I}{T}$ qui représente la valeur moyenne de f sur une période, de sorte que ce qui précède s'énonce $F(x) = \frac{I}{T} x + O(1) = mx + O(1)$.

Méthode 2 : posons $m = \frac{1}{T} \int_0^T f(u) du = \frac{F(T)}{T}$, $g : x \mapsto F(x) - mx$ et $h : x \mapsto g(x + T) - g(x)$. Comme F est dérivable par le théorème fondamental de l'intégration, g et h le sont aussi et on a $h'(x) = g'(x + T) - g'(x)$ donc $h'(x) = F'(x + T) - m - F'(x) + m = f(x + T) - f(x) = 0$ par hypothèse. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est constante et $h(0) = g(T) - g(0) = F(T) - F(0) = 0$ donc h est nulle sur $\mathbb{R}$. g est donc T -périodique et, comme avant puisque g est continue, elle est bornée sur $\mathbb{R}$ donc $F(x) = mx + O(1)$.

Concluons : les fonctions $u : t \mapsto \lambda t - F(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = \lambda - m$ car $u(t)v(t) = \frac{\lambda t - (mt + O(1))}{t}$. Par intégration par parties, $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda t - F(t)}{t^2} dt$ ont même nature. Comme $\frac{\lambda t - F(t)}{t^2} = \frac{\lambda t - mt - (F(t) - mt)}{t^2} = \frac{(\lambda - m)}{t} + \frac{F(t) - mt}{t^2}$ et $\frac{F(t) - mt}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'après ce qui précède, comme à la question **a.**, $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge si et seulement si $\lambda = m$.

3.92 a. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x - \cos(x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 1 + \sin(x) \geq 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est croissante sur $\mathbb{R}$. Si elle n'était pas strictement croissante, il existerait deux réels $a < b$ tels que $h(a) = h(b)$ et on aurait $\forall x \in [a; b]$, $h'(x) = 0$, ce qui est impossible car f' ne s'annule qu'en les réels de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ainsi, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $h(0) = -1$ et $h(1) = 1 - \cos(1) > 0$. Par le théorème de la bijection, il existe un unique réel $c \in]0; 1[$ tel que $h(c) = 0$ donc un unique point fixe c de $\cos$ sur $\mathbb{R}$. On trouve numériquement $c \sim 0,74$.

b. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$. En appliquant f , on obtient $f \circ f \circ f = f \circ \cos$ donc $\cos \circ f = f \circ \cos$ ce qui, en c , devient $f(c) = \cos(f(c))$. D'après l'unicité montrée à la question **a.**, on en déduit que $f(c) = c$. Si on dérive $f \circ f = \cos$, on obtient $f' \times (f' \circ f) = -\sin$ ce qui, en c , devient $f'(c)^2 = -\sin(c) < 0$ car, comme $c \in]0; 1[\subset]0; \pi[$, on a $\sin(c) > 0$. NON !

Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

c. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$. Comme en **b.**, on a $f(c) = c$. Si f n'était pas injective sur $[0; 1]$, alors il existerait deux réels x et y tels que $0 \leq x < y \leq 1$ et $f(x) = f(y)$ et on aurait $f \circ f(x) = f \circ f(y) = \cos(x) = \cos(y)$ et la fonction $\cos$ ne serait pas injective sur $[0; 1]$. NON !

Ainsi, f est injective sur $[0; 1]$ donc, par continuité, elle y est strictement croissante ou strictement décroissante. Comme f est continue en c , il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [c - \alpha; c + \alpha]$, $0 \leq f(x) \leq 1$ (il suffit de prendre $\varepsilon = \min(c, 1 - c) \sim 0,26 > 0$ dans $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$). On aurait donc, comme f est strictement monotone sur $[c - \alpha; c + \alpha]$ et que $f([c - \alpha; c + \alpha]) \subset [0; 1]$, intervalle sur lequel f est aussi strictement monotone (la même monotonie) et, par composée, la fonction $f \circ f = \cos$ serait strictement croissante sur $[c - \alpha; c + \alpha]$. NON !

Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$.

3.93 a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n e^{\omega x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|f_n(x)| = x^n e^{-x/2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ existe. Pour tout entier $n \geq 1$, les fonctions $u : x \mapsto x^n$ et $v : x \mapsto \frac{e^{\omega x}}{\omega}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, $u(0)v(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, $I_n = -\frac{n}{\omega} \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{\omega x} dx = -\frac{n}{\omega} I_{n-1}$. Par une récurrence simple, on en déduit que $I_n = n!(-j)^{n+1}$ car $\omega = j^2$ donc $\frac{1}{\omega} = j$.

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{Im}(I_{3k-1}) = 0 = \text{Im}\left(\int_0^{+\infty} x^{3k-1} e^{\omega x} dx\right) = -\int_0^{+\infty} x^{3k-1} e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) dx$.

Dans $\int_0^{+\infty} x^{3k-1} e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) dx = 0$ (vue sur $\mathbb{R}_+$), on pose $x = \varphi(t) = t^{1/3}$ avec φ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{1}{3} \int_0^{+\infty} t^{k-(1/3)} e^{-t^{1/3}/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t^{1/3}\right) t^{-2/3} dt = 0$

donc, en posant, $n = k - 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} e^{-t^{1/3}/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t^{1/3}\right) t^n dt = 0$. En définissant $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

par $g(t) = e^{-\frac{\sqrt[3]{t}}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{t}\right)$, la fonction g est continue et non nulle sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} g(t)t^n dt = 0$.

b. L'énoncé nous incite à admettre le théorème de STONE-WEIERSTRASS, il s'agit de l'approximation uniforme de toute fonction continue sur un segment par des polynômes. Soit donc $\varepsilon > 0$, il existe par ce théorème un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall t \in [a; b]$, $|f(t) - P(t)| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\|f - P\|_{\infty, [a; b]} \leq \varepsilon$.

Ainsi, en écrivant $P = \sum_{n=0}^d a_n X^n$, on a $\int_a^b (f - P)\bar{f} = \int_a^b |f|^2 - \int_a^b \bar{f}|P|$ or, par linéarité de l'intégrale, $\int_a^b \bar{f}P = \sum_{n=0}^d \int_a^b \overline{f(t)} t^n dt = \sum_{n=0}^d \int_a^b f(t) t^n dt = 0$ donc $\int_a^b (f - P)\bar{f} = \int_a^b |f|^2$. Or, par inégalité triangulaire, $\left| \int_a^b (f - P)\bar{f} \right| \leq \int_a^b |f - P| |f| \leq \|f - P\|_{\infty, [a; b]} \int_a^b |f| \leq \varepsilon(b - a) \|f\|_{\infty, [a; b]}$ car f est bornée sur $[a; b]$ puisque continue sur le segment $[a; b]$. En faisant tendre ε vers 0, il vient $\int_a^b |f|^2 = 0$. Comme $|f|^2$ est positive et continue sur $[a; b]$ non réduit à un point, $|f|^2$ est nulle sur $[a; b]$, donc f est nulle sur $[a; b]$ comme attendu.

3.94 La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1 + m \sin^2(t)}$ est continue sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + m \sin^2(t)}$ existe.

Soit maintenant f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et, puisque $\sin^2(t) = \frac{\tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)}$, on en déduit que, pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $f(t) = \frac{1}{1 + m \sin^2(t)} = \frac{1}{1 + m \frac{\tan^2(t)}{1 + \tan^2(t)}} = \frac{1 + \tan^2(t)}{1 + (m + 1) \tan^2(t)}$. Or $\varphi : t \mapsto \tan(t)$ est une bijection strictement croissante et C^1 de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi'(t) = 1 + \tan^2(t)$, donc par changement de variable, $I = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (m + 1)u^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{m + 1}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{m + 1} u) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{m + 1}}$. Il y avait d'autres questions.

3.95 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto \frac{1}{t^x \sqrt{t}(1 + t)}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{x+(1/2)}}$ et $g_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+(3/2)}}$. D'après le critère de RIEMANN, g_x est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $x + \frac{1}{2} < 1$ et g_x est intégrable sur $[1; +\infty[$ si et seulement si $\frac{3}{2} + x > 1$ donc f est définie sur $I = \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right[$ car pour une fonction continue positive, la convergence ou l'absolue convergence de l'intégrale sont équivalentes et que g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si elle l'est sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$.

b. Pour $x \in I$, on pose $t = \frac{1}{u} = \varphi(u)$ avec φ qui est strictement décroissante, de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = \int_{+\infty}^0 \frac{\sqrt{u}}{u^{-x}(1 + u^{-1})} \left(-\frac{du}{u^2} \right) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^{-x} \sqrt{u}(1 + u)} = f(-x)$ donc f est paire.

c. On a admis qu'en notant $g : (x, t) \mapsto \frac{1}{t^x \sqrt{t}(1 + t)} = \frac{e^{-x \ln(t)}}{\sqrt{t}(1 + t)}$, on a $\forall x \in I$, $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) dt$ (c'est la formule de LEIBNIZ). On peut bien sûr le montrer en utilisant deux fois le théorème de dérivation sous le signe somme (voir plus tard dans l'année). Comme $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = \frac{(-\ln(t))^2 e^{-x \ln(t)}}{\sqrt{t}(1 + t)} = \frac{(-\ln(t))^2}{t^x \sqrt{t}(1 + t)} \geq 0$,

on a $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) dt \geq 0$ donc f est convexe. Comme f est paire et dérivable, sa dérivée en 0 est nulle donc, comme f' est croissante car $f'' \geq 0$ sur l'intervalle I , f' est positive sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et négative sur $\left]-\frac{1}{2}; 0\right]$ donc f admet son minimum absolu en 0. Comme $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1 + t)} = \left[2 \operatorname{Arctan}(\sqrt{t}) \right]_0^{+\infty} = \pi$, on a bien $\forall x \in I$, $f(x) \geq f(0) = \pi$.

d. Comme $\frac{1}{(1/2) - x} = \int_0^1 \frac{dt}{t^x \sqrt{t}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^{x+(1/2)}} = \left[\frac{t^{(1/2)-x}}{(1/2)-x} \right]_0^1$, on évalue la différence entre $\int_0^1 \frac{dt}{t^x \sqrt{t}(1 + t)}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^x \sqrt{t}}$ pour $x \in I \cap \mathbb{R}_+$. Or $\left| \int_0^1 \frac{dt}{t^x \sqrt{t}(1 + t)} - \int_0^1 \frac{dt}{t^x \sqrt{t}} \right| = \int_0^1 \frac{t dt}{t^x \sqrt{t}(1 + t)}$ et, comme $\frac{t}{1 + t} \leq t$, $\int_0^1 \frac{t dt}{t^x \sqrt{t}(1 + t)} \leq \int_0^1 \frac{dt}{t^{x-(1/2)}} = \left[\frac{t^{(3/2)-x}}{(3/2)-x} \right]_0^1 = \frac{1}{(3/2)-x} \leq 1$ d'où $\left| \int_0^1 \frac{dt}{t^x \sqrt{t}(1 + t)} - \frac{1}{(1/2)-x} \right| \leq 1$.

e. Avec CHASLES, $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t^x \sqrt{t}(1 + t)} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x \sqrt{t}(1 + t)}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^x \sqrt{t}(1 + t)} \underset{\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{(1/2)-x} + O(1)$

avec **d.** De plus, $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x \sqrt{t(1+t)}} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+(3/2)}} = \left[\frac{t^{-(1/2)-x}}{-(1/2)-x} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{(1/2)+x} \leq 2$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x \sqrt{t(1+t)}} = O(1)$. Par somme, $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} - (1/2) - x} + O(1)$. Or $\lim_{x \rightarrow (1/2)^-} \frac{1}{(1/2) - x} = +\infty$ donc $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} - (1/2) - x} + o\left(\frac{1}{(1/2) - x}\right)$, d'où $f(x) \sim \frac{1}{\frac{1}{2} - (1/2) - x}$. Par parité de f , on a aussi $f(x) \sim \frac{1}{\frac{-1}{2} + (1/2) + x}$.

3.96 a. En prenant $x = y = 1$ dans la relation (1), on a $f(1) = 2f(1)$ donc $f(1) = 0$.

Pour $x > 0$, en prenant $y = \frac{1}{x}$ dans (1), on obtient $f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

b. Soit $x > 0$, les intégrales $\int_x^{2x} f(t)dt$ et $\int_1^2 f(t)dt$ sont bien définies car f est continue sur les segments $[x; 2x]$ et $[1; 2]$. Dans l'intégrale $\int_x^{2x} f(t)dt$, on pose $t = \varphi(u) = ux$ qui est de classe C^1 sur le segment $[1; 2]$ et on a donc par changement de variable (version sup.) $\int_x^{2x} f(t)dt = \int_1^2 f(ux)xdu$. Or $f(ux) = f(u) + f(x)$ donc, par linéarité de l'intégrale, $\int_x^{2x} f(t)dt = x \int_1^2 f(u)du + xf(x)$. En divisant par $x > 0$, on a bien la relation attendue, $f(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} f(t)dt - \int_1^2 f(t)dt$.

c. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle y admet une primitive F et, par le théorème fondamental de l'intégration, il vient $f(x) = \frac{F(2x) - F(x)}{x} - (F(2) - F(1))$, ce qui prouve par opérations que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc dériver (1) par rapport à y , ce qui donne $\forall (x, y) \in]0; +\infty[^2$, $xf'(xy) = f'(y)$ (2). En prenant maintenant $y = 1$ dans (2), on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$. Ainsi, comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $f(x) = f'(1) \ln(x) + C$ (3). En prenant $x = 1$ dans (3), comme $f(1) = 0$, on a $C = 0$ donc $\forall x > 0$, $f(x) = f'(1) \ln(x)$.

Les $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\forall (x, y) \in]0; +\infty[^2$, $f(xy) = f(x) + f(y)$ sont proportionnelles à $\ln$.

3.97 a. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x - \cos(x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 1 + \sin(x) \geq 0$ donc, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est croissante sur $\mathbb{R}$. Si elle n'était pas strictement croissante, il existerait deux réels $a < b$ tels que $h(a) = h(b)$ et on aurait $\forall x \in [a; b]$, $h'(x) = 0$, ce qui est impossible car f' ne s'annule qu'en les réels de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ainsi, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $h(0) = -1$ et $h(1) = 1 - \cos(1) > 0$. Par le théorème de la bijection, il existe un unique réel $c \in]0; 1[$ tel que $h(c) = 0$ donc un unique point fixe c de $\cos$ sur $\mathbb{R}$. On trouve numériquement $c \sim 0,74$.

b. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$. En appliquant f , on obtient $f \circ f \circ f = f \circ \cos$ donc $\cos \circ f = f \circ \cos$ ce qui, en c , devient $f(c) = \cos(f(c))$. D'après l'unicité montrée à la question **a.**, on en déduit que $f(c) = c$. Si on dérive $f \circ f = \cos$, on obtient $f' \times (f' \circ f) = -\sin$ ce qui, en c , devient $f'(c)^2 = -\sin(c) < 0$ car, comme $c \in]0; 1[\subset]0; \pi[$, on a $\sin(c) > 0$. NON !

Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existait aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

c. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$. Comme en **b.**, on a $f(c) = c$. Si f n'était pas injective sur $[0; 1]$, alors il existerait deux réels x et y tels que $0 \leq x < y \leq 1$ et $f(x) = f(y)$ et on aurait $f \circ f(x) = f \circ f(y) = \cos(x) = \cos(y)$ et la fonction $\cos$ ne serait pas injective sur $[0; 1]$. NON !

Ainsi, f est injective sur $[0; 1]$ donc, par continuité, elle y est strictement croissante ou strictement décroissante.

Comme f est continue en c , il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [c - \alpha; c + \alpha]$, $0 \leq f(x) \leq 1$ (il suffit de prendre $\varepsilon = \min(c, 1 - c) \sim 0,26 > 0$ dans $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$). On aurait donc, comme f est strictement monotone sur $[c - \alpha; c + \alpha]$ et que $f([c - \alpha; c + \alpha]) \subset [0; 1]$, intervalle sur lequel f est aussi strictement monotone (la même monotonie) et, par composée, la fonction $f \circ f = \cos$ serait strictement croissante sur $[c - \alpha; c + \alpha]$. NON !

Par l'absurde, on a donc montré qu'il n'existait aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f = \cos$.

3.98 Les fonctions $f : x \mapsto \ln \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)$ et $g : x \mapsto \ln \left(\cos \left(\frac{1}{x} \right) \right)$ sont continues sur $I = \left] \frac{2}{\pi}; +\infty \right[$ car les fonctions

$\sin$ et $\cos$ sont strictement positives sur $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$. Comme $\lim_{x \rightarrow (2/\pi)^+} \sin \left(\frac{1}{x} \right) = 1$, f se prolonge par continuité en $\frac{2}{\pi}$ en posant $f \left(\frac{2}{\pi} \right) = \ln(1) = 0$. Par contre, $\lim_{x \rightarrow (2/\pi)^+} \cos \left(\frac{1}{x} \right) = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow (2/\pi)^+} g(x) = -\infty$.

• Comme $\sin \left(\frac{1}{x} \right) \sim \frac{1}{x}$ et $\ln \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) = -\ln(x) + \ln \left(\frac{\sin(1/x)}{(1/x)} \right)$, on a $\ln \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \underset{+\infty}{=} -\ln(x) + o(1)$ donc $\ln \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Ainsi, f n'est pas intégrable sur I et, comme f est négative sur I , $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) dx$ diverge.

• Comme $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe C^1 , bijective et strictement décroissante de $J = \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$ dans $I = \left] \frac{2}{\pi}; +\infty \right[$, on sait d'après le cours que les intégrales $\int_I g(x) dx$ et $\int_J g(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ sont de même nature. Dans le cas de convergence, on aura $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln \left(\cos \left(\frac{1}{x} \right) \right) dx = \int_{\pi/2}^0 \ln(\cos(t)) \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\cos(t))}{t^2} dt$. En posant $h : t \mapsto \frac{\ln(\cos(t))}{t^2} = \frac{\ln(1 - (1 - \cos(t)))}{t^2}$, comme $1 - \cos(t) \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$, on a $h(t) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}$ car $\ln(1 - u) \underset{0}{\sim} -u$ donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = -\frac{1}{2}$ et on peut prolonger h par continuité en 0 en posant $h(0) = -\frac{1}{2}$. De plus, en posant $t = \frac{\pi}{2} - u$ avec $u \in J$, $h(t) = \frac{\ln(\cos((\pi/2) - u))}{((\pi/2) - u)^2} = \frac{\ln(\sin(u))}{((\pi/2) - u)^2} \underset{0}{\sim} \frac{4}{\pi^2} \ln(u)$ comme avant. Par conséquent, comme $\ln(u) \underset{0}{=} o \left(\frac{1}{\sqrt{u}} \right)$, on a $h(t) \underset{(\pi/2)^-}{=} o \left(\frac{1}{\sqrt{(\pi/2) - t}} \right)$ et g est intégrable sur J par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Ainsi, $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln \left(\cos \left(\frac{1}{x} \right) \right) dx$ converge.

3.99 a. Comme $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $e^{i\theta} \neq 1$ d'où $\forall t \in [0; 1]$, $e^{i\theta} t \neq 1$ et la fonction $t \mapsto e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta} t^n}{1 - e^{i\theta} t}$ est continue

sur le segment $[0; 1]$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta} t^n}{1 - e^{i\theta} t} dt$ est bien définie. Comme $e^{in\theta} t^n = (e^{i\theta} t)^n$ avec

MOIVRE et $e^{i\theta} t \neq 1$, on a la relation $\frac{1 - e^{in\theta} t^n}{1 - e^{i\theta} t} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\theta} t)^k$ donc $e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta} t^n}{1 - e^{i\theta} t} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)\theta} t^k$. Par

linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta} t^n}{1 - e^{i\theta} t} dt = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)\theta} \int_0^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)\theta} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i(k+1)\theta}}{k+1}$.

On effectue ensuite le changement d'indice $m = k + 1$ et on a bien $\sum_{m=1}^n \frac{e^{im\theta}}{m} = \int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{1 - e^{in\theta} t^n}{1 - e^{i\theta} t} dt$.

b. Posons $I = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} t} dt$, qui existe bien car $t \mapsto \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} t}$ est continue sur le segment $[0; 1]$. Pour

$n \in \mathbb{N}^*$, si on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k}$, qui est la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$, on a donc

d'après a. et par linéarité de l'intégrale, $S_n - I = -\int_0^1 e^{i\theta} \times \frac{e^{in\theta} t^n}{1 - e^{i\theta} t} dt$. Par inégalité triangulaire, on

a $|S_n - I| \leq \int_0^1 |e^{i\theta}| \times \frac{|e^{in\theta} t^n|}{|1 - e^{i\theta} t|} dt = \int_0^1 \frac{t^n}{|1 - e^{i\theta} t|} dt$. Il s'agit de minorer le dénominateur en écrivant

$|1 - e^{i\theta}t|^2 = (1 - \cos(\theta)t)^2 + \sin^2(\theta)t^2 = 1 - 2\cos(\theta)t + t^2 = (t - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)$ pour $t \in [0; 1]$. Ainsi, $|1 - e^{i\theta}t|^2 \geq \sin^2(\theta)$ donc $|1 - e^{i\theta}t| \geq |\sin(\theta)| > 0$ et $|S_n - I| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{|\sin(\theta)|} dt = \frac{1}{(n+1)|\sin(\theta)|}$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = I$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} dt$.

c. $t \mapsto \frac{\cos(\theta) - t + i \sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1}$ est continue sur $[0; 1]$ car $t^2 - 2t \cos(\theta) + 1 = |1 - e^{i\theta}t|^2 > 0$. Par définition d'une intégrale complexe, $\int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t + i \sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt = \int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt + i \int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt$. Or $\int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt = -\frac{1}{2} \left[\ln(t^2 - 2t \cos(\theta) + 1) \right]_0^1$ car $(t^2 - 2t \cos(\theta) + 1)' = 2(t - \cos(\theta))$ donc $\int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2\cos(\theta) + 1) = -\frac{1}{2} \ln(2 - 2\cos(\theta))$.

De plus, $\int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt = \int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} dt = \int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{(t - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)} dt$.

Comme $\sin(\theta) \neq 0$, on a donc $\int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt = \int_0^1 \frac{\frac{\sin(\theta)}{1 + \left(\frac{t - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2}}{1 + \left(\frac{t - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2} dt = \left[\text{Arctan} \left(\frac{t - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) \right]_0^1$

donc $\int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt = \text{Arctan} \left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) + \text{Arctan} \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right)$ par imparité de Arctan.

Ainsi, $\int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t + i \sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt = -\frac{1}{2} \ln(2 - 2\cos(\theta)) + i \text{Arctan} \left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) + i \text{Arctan} \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right)$.

d. Si $\theta \in]0; \pi[$, on a bien $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. D'après b., la série $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} dt$. Or,

en multipliant par la quantité conjuguée, $\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}t} dt = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}(1 - e^{-i\theta}t)}{|1 - e^{i\theta}t|^2} dt = \int_0^1 \frac{e^{i\theta} - t}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt$

est l'intégrale de la question c.. En identifiant parties réelle et imaginaire des séries et des intégrales, on a donc

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = \int_0^1 \frac{\cos(\theta) - t}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \int_0^1 \frac{\sin(\theta)}{t^2 - 2t \cos(\theta) + 1} dt$. Or $1 - \cos(\theta) = 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$ donc $-\frac{1}{2} \ln(2 - 2\cos(\theta)) = -\frac{1}{2} \ln \left(4 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) = -\ln \left(2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$. Comme $\sin(\theta) = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$, on

a aussi $\text{Arctan} \left(\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) = \text{Arctan} \left(\frac{2 \sin^2(\theta/2)}{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} \right) = \text{Arctan} \left(\tan(\theta/2) \right) = \frac{\theta}{2}$ car $\frac{\theta}{2} \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

De plus, $\text{Arctan} \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) = \text{Arctan} \left(\tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right) = \frac{\pi}{2} - \theta$ car $\frac{\pi}{2} - \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Ainsi, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = -\ln \left(2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$.

3.100 a. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto e^{-(1-i)t} t^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|f_n(t)| = t^n e^{-t} \underset{+\infty}{=} o \left(\frac{1}{t^2} \right)$ par

croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-(1-i)t} t^n dt$ existe. Pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u(t) = t^n$ et $v(t) = \frac{e^{(i-1)t}}{i-1}$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par

croissances comparées donc $I_n = 0 - \frac{n}{i-1} \int_0^{+\infty} e^{(i-1)t} t^{n-1} dt = \frac{n(i+1)}{2} I_{n-1}$ par intégration par parties.

Par une récurrence très simple, puisque $I_0 = \left[\frac{e^{(i-1)t}}{i-1} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-i} = \frac{i+1}{2}$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = n! \left(\frac{i+1}{2} \right)^{n+1}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto e^{-t^{1/4}} \sin(t^{1/4}) t^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|g_n(t)| \leq e^{-t^{1/4}} t^n \underset{+\infty}{=} o \left(\frac{1}{t^2} \right)$

par croissances comparées donc g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^{1/4}} \sin(t^{1/4}) t^n dt$ existe.

On effectue dans J_n le changement de variable $t = u^4 = \varphi(u)$ avec φ qui est strictement croissante, de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, de sorte que $J_n = 4 \int_0^{+\infty} e^{-u} \sin(u) u^{4n+3} du = 4 \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-u} e^{iu} u^{4n+3} du \right)$ donc $J_n = 4 \operatorname{Im}(I_{4n+3})$. Or $I_{4n+3} = (4n+3)! \left(\frac{i+1}{2} \right)^{4n+4} = (4n+3)! \left(\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \right)^{4(n+1)} = (4n+3)! (-1)^{n+1}$ est réel donc $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^{1/4}} \sin(t^{1/4}) t^n dt = 0$.

3.101 D'après l'énoncé, on pose $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(y) = f(\sqrt{y})$ pour $y \geq 0$. Comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et que f est de classe C^4 sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, g est de classe C^4 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par la formule de TAYLOR-YOUNG, comme f est de classe C^4 et paire donc que $f'(0) = 0$ et $f'''(0) = 0$, on a $f(x) = f(0) + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f^{(4)}(0)}{24} x^4 + o(x^4)$. En composant par $\sqrt{y}$, on obtient le développement limité d'ordre 2 en 0 pour g , à savoir $g(y) = f(\sqrt{y}) = f(0) + \frac{f''(0)}{2} y + \frac{f^{(4)}(0)}{24} y^2 + o(y^2)$.

Aspect C^1 : comme g admet un développement limité d'ordre 1 en 0, g est dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{f''(0)}{2}$. Pour $y > 0$, on a $g'(y) = \frac{f'(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$. Or, f' étant de classe C^3 avec $f'(0) = 0$ car f est paire, on a le développement limité à l'ordre 1 suivant de f' en 0, à savoir $f'(x) = f''(0)x + o(x)$. En posant $x = \sqrt{y}$, on obtient $f'(\sqrt{y}) = f''(0)\sqrt{y} + o(\sqrt{y})$ qui justifie que $g'(y) = \frac{f''(0)}{2} + o(1)$ donc que $\lim_{y \rightarrow 0^+} g'(y) = g'(0)$ et g' est continue en 0. Avec ce qui précède, on a bien établi l'aspect C^1 de g sur $\mathbb{R}_+$.

Aspect C^2 : pour $y > 0$, comme $g'(y) = \frac{f'(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$, on a $\frac{g'(y) - g'(0)}{y - 0} = \frac{f'(\sqrt{y}) - f''(0)\sqrt{y}}{2y\sqrt{y}}$. Comme f' est de classe C^3 et paire sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité en 0 à l'ordre 3 par TAYLOR-YOUNG qui s'écrit, comme $f'(0) = f'''(0) = 0$, $f'(x) = f''(0)x + \frac{f^{(4)}(0)}{6} x^3 + o(x^3)$ donc, en composant par $\sqrt{y}$, on obtient $f'(\sqrt{y}) = f''(0)\sqrt{y} + \frac{f^{(4)}(0)}{6} y\sqrt{y} + o(y\sqrt{y})$. Ceci montre que $\frac{g'(y) - g'(0)}{y - 0} = \frac{f^{(4)}(0)}{12} + o(1)$ donc que g est deux fois dérivable en 0 avec $g''(0) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{g'(y) - g'(0)}{y - 0} = \frac{f^{(4)}(0)}{12}$. Montrons que g'' est continue en 0.

Après calculs, on a $\forall y > 0$, $g''(y) = \frac{\sqrt{y} f''(\sqrt{y}) - f'(\sqrt{y})}{4y\sqrt{y}}$. Or $f'(\sqrt{y}) = f''(0)\sqrt{y} + \frac{f^{(4)}(0)}{6} y\sqrt{y} + o(y\sqrt{y})$ et, comme f'' est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on a par TAYLOR-YOUNG $f''(x) = f''(0) + \frac{f^{(4)}(0)}{2} x^2 + o(x^2)$ donc, en composant par $\sqrt{y}$, cela donne $f''(\sqrt{y}) = f''(0) + \frac{f^{(4)}(0)}{2} y + o(y)$. En reportant dans l'expression de $g''(y)$, $g''(y) = \frac{1}{4y\sqrt{y}} \left[\sqrt{y} \left(f''(0) + \frac{f^{(4)}(0)}{2} y + o(y) \right) - \left(f''(0)\sqrt{y} + \frac{f^{(4)}(0)}{6} y\sqrt{y} + o(y\sqrt{y}) \right) \right] = \frac{f^{(4)}(0)}{12} + o(1)$. Ceci montre que $\lim_{y \rightarrow 0^+} g''(y) = g''(0) = \frac{f^{(4)}(0)}{12}$ donc que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ avec ce qui précède. Par le théorème de prolongement C^1 (ici de g' en 0), le calcul préalable de $g''(0)$ n'était pas nécessaire.

3.102 a. Par convention, si $t > 0$, on prendra $0^t = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^t = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{t \ln(x)} = 0$.

Méthode 1 : comme $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 et concave car $\forall x > 0$, $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, on sait que

$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall \lambda \in [0; 1], \ln(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda \ln(a) + (1 - \lambda) \ln(b)$. Comme $\exp$ est croissante, on en déduit que $\exp(\ln(\lambda a + (1 - \lambda)b)) = \lambda a + (1 - \lambda)b \geq a^\lambda b^{1-\lambda} = \exp(\lambda \ln(a) + (1 - \lambda) \ln(b))$.

Avec $t \in]0; 1[, (u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$, considérons des cas :

- si $u > 0$ et $v > 0$, on prend $\lambda = t$, $a = u$ et $b = v$ ci-dessus et on a bien $u^t v^{1-t} \leq tu + (1 - t)v$.
- si $u = 0$ et $v > 0$, on a $u^t v^{1-t} = 0$ et $tu + (1 - t)v = (1 - t)v > 0$ donc on a bien $u^t v^{1-t} \leq tu + (1 - t)v$.
- si $u > 0$ et $v = 0$, on a $u^t v^{1-t} = 0$ et $tu + (1 - t)v = tu > 0$ donc on a bien $u^t v^{1-t} \leq tu + (1 - t)v$.
- si $u = 0$ et $v = 0$, on a $u^t v^{1-t} = 0$ et $tu + (1 - t)v = 0$ donc on a bien $u^t v^{1-t} \leq tu + (1 - t)v$.

Méthode 2 : soit $t \in]0; 1[, soit $g_t : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_t(u) = u^t - tu - (1 - t)$. La fonction g_t est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$ avec $g_t(0) = t - 1 < 0$ et on a $\forall u > 0, g'_t(u) = tu^{t-1} - t = t\left(\frac{1}{u^{1-t}} - 1\right)$ donc g_t est croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$. Comme $g(1) = 0$, la fonction g_t est négative sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall u \in \mathbb{R}_+, \forall t \in]0; 1[, u^t \leq tu + (1 - t)$ (1). Traitons deux cas :$

- si $v = 0, u^t v^{1-t} = 0$ et $tu + (1 - t)v = tu \geq 0$ donc on a bien $u^t v^{1-t} \leq tu + (1 - t)v$.
- si $v > 0$, en remplaçant u par $\frac{u}{v}$ dans (1), on a $\left(\frac{u}{v}\right)^t \leq t\frac{u}{v} + (1 - t)$ puis, en multipliant par $v > 0$, on a $\frac{u^t v}{v^t} = u^t v^{1-t} \leq tu + (1 - t)v$ comme attendu.

b. Pour $A \in \mathbb{R}_+$ et des fonctions $g, h : [0; A] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, comme $|g|^p$ et $|h|^q$ sont continues sur un segment, les réels $I = \left(\int_0^A |g|^p\right)^{1/p} \in \mathbb{R}_+$ et $J = \left(\int_0^A |h|^q\right)^{1/q} \in \mathbb{R}_+$ existent. Si $A = 0$, l'inégalité à établir est claire car elle se ramène à $0 \leq 0$. Si $A > 0$, traitons des cas :

- si $I = J = 0$, comme les fonctions $|g|^p$ et $|h|^q$ sont continues, positives, on en déduit que $g = h = 0$ sur $[0; A]$, ainsi, on a bien l'inégalité $\int_0^A |gh| dt = 0 \leq 0 = \left(\int_0^A |g|^p\right)^{1/p} \times \left(\int_0^A |h|^q\right)^{1/q}$.
- si $I = 0$ et $J > 0$, comme avant, $h = 0$ donc $\int_0^A |gh| = 0 \leq 0 = \left(\int_0^A |g|^p\right)^{1/p} \times \left(\int_0^A |h|^q\right)^{1/q}$.
- si $I > 0$ et $J = 0$, comme avant, $g = 0$ donc $\int_0^A |gh| = 0 \leq 0 = \left(\int_0^A |g|^p\right)^{1/p} \times \left(\int_0^A |h|^q\right)^{1/q}$.
- si $I > 0$ et $J > 0$, posons $t = \frac{1}{p} \in]0; 1[, u = \frac{|g(x)|^p}{I^p} \in \mathbb{R}_+$ et $v = \frac{|h(x)|^q}{J^q} \in \mathbb{R}_+$ pour $x \in [0; A]$, on a $1 - t = \frac{1}{q}$ donc $u^t v^{1-t} = \frac{|g(x)|^p |h(x)|^q}{I^p J^q} = \frac{|g(x)h(x)|^p}{I^p J^p}$ donc, $\frac{|g(x)h(x)|}{IJ} \leq \frac{1}{p} \frac{|g(x)|^p}{I^p} + \frac{1}{q} \frac{|h(x)|^q}{J^q}$. On a donc

$$\frac{1}{IJ} \int_0^A |g(x)h(x)| dx \leq t \frac{\left(\int_0^A |g(x)|^p dx\right)^{1/p}}{\left(\int_0^A |g(x)|^p dx\right)^{1/p}} + (1 - t) \frac{\left(\int_0^A |h(x)|^q dx\right)^{1/q}}{\left(\int_0^A |h(x)|^q dx\right)^{1/q}} = t + 1 - t = 1 \text{ par croissance}$$

de l'intégrale. Par conséquent, $\int_0^A |g(t)h(t)| dt \leq IJ = \left(\int_0^A |g(t)|^p dt\right)^{1/p} \times \left(\int_0^A |h(t)|^q dt\right)^{1/q}$.

Dans tous les cas, on a l'inégalité $\int_0^A |g(t)h(t)| dt \leq \left(\int_0^A |g(t)|^p dt\right)^{1/p} \times \left(\int_0^A |h(t)|^q dt\right)^{1/q}$.

c. Si $p > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $a_n : t \mapsto t^n f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, si $A \geq 0$, d'après **b.**, on a $\int_0^A |t^n f(t)| dt = \int_0^A |(f(t)e^{t/p})(t^n e^{-t/p})| dt \leq \left(\int_0^A |f(t)|^p e^t dt\right)^{1/p} \times \left(\int_0^A t^{nq} e^{-tq/p} dt\right)^{1/q}$. Comme f est strictement positive par hypothèse, $\int_0^A |f(t)|^p e^t dt \leq M = \int_0^{+\infty} |f(t)|^p e^t dt = \int_0^{+\infty} (f(t))^p e^t dt > 0$. De plus, on se rappelle de la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ qu'on note $\Gamma(x) = (x - 1)!$ même pour un réel $x > 0$ (justifié car $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n - 1)!$), ce qui permet d'écrire, avec le changement

de variable $t = \frac{pu}{q} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, la relation

$$\int_0^{+\infty} t^{nq} e^{-tq/p} dt = \int_0^{+\infty} \frac{(pu)^{nq}}{q^{nq}} e^{-u} \frac{p}{q} du = \left(\frac{p}{q}\right)^{nq+1} \int_0^{+\infty} u^{nq} e^{-u} du = \left(\frac{p}{q}\right)^{nq+1} (nq)!. \text{ Pour } A \in \mathbb{R}_+,$$

$$\int_0^A t^n f(t) dt \leq M^{1/p} \left(\frac{p}{q}\right)^{n+(1/q)} ((nq)!)^{1/q} = K \left(\frac{p}{q}\right)^n ((nq)!)^{1/q} \quad (2) \text{ en posant } K = M^{1/p} \left(\frac{p}{q}\right)^{1/q} \in \mathbb{R}_+.$$

Ceci justifie que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n f(t) dt$ converge car la fonction a_n est positive. De plus, en passant à la limite dans (2) quand A tend vers $+$, on a $u_n \leq K \left(\frac{p}{q}\right)^n ((nq)!)^{1/q}$.

Pour $n \geq 1$, on a donc $|u_n|^{-1/n} \geq K^{-1/n} \times \frac{q}{p} \times ((nq)!)^{-1/(nq)}$. On sait que Γ est convexe et croissante sur un intervalle du type $[\alpha; +\infty[$ (en fait $\alpha \sim 1,46$) donc dès que n est assez grand et que $nq + 1 \geq \alpha$, on a $(nq)! \leq ([nq] + 1)!$ donc $((nq)!)^{-1/(nq)} \geq ([nq] + 1)!^{-1/(nq)} \geq ([nq] + 1)!^{-1/([nq])}$. Alors, pour n assez grand $|u_n|^{-1/n} \geq v_n = K^{-1/n} \times \frac{q}{p} \times ([nq] + 1)!^{-1/([nq])}$.

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites strictement positives telles que $a_n \sim_{+\infty} b_n$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = +\infty$, on a $a_n^{1/c_n} \sim_{+\infty} b_n^{1/c_n}$ en écrivant $\frac{a_n^{1/c_n}}{b_n^{1/c_n}} = \exp\left(\frac{1}{c_n} \ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right)\right)$.

D'après STIRLING, en notant $t_n = [nq]$ et puisque $[nq] \sim_{+\infty} nq$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n + 1)^{-1/t_n} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2\pi t_n}\right)^{\frac{-1}{t_n}} = 1$, on a $v_n \sim_{+\infty} \frac{q}{p} \times \left(\sqrt{2\pi t_n} \left(\frac{t_n}{e}\right)^{t_n}\right)^{\frac{-1}{t_n}} \sim_{+\infty} \frac{q}{p} \times \frac{e}{t_n} \sim_{+\infty} \frac{e}{np}$ donc, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum_{n \geq 0} |u_n|^{-1/n}$ diverge.

d. Si $p = 1$, pour $n \in \mathbb{N}$, en écrivant $t^n f(t) = (f(t)e^t)(t^n e^{-t})$, comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^n e^{-t} = 0$ par croissances comparées, on a $t^n f(t) = o(f(t)e^t)$ donc, par comparaison, la fonction $a_n : t \mapsto t^n f(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc u_n existe. Pour $n \geq 1$, la fonction $b_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $b'_n(t) = nt^{n-1}e^{-t} - t^n e^{-t} = t^{n-1}e^{-t}(n - t)$ donc b_n est positive, croissante sur $[0; n]$ et décroissante sur $[n; +\infty[$ donc maximale en n où elle vaut $b_n(n) = n^n e^{-n}$. Ainsi, pour $n \geq 1$, on a la majoration $u_n = \int_0^{+\infty} t^n f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^t b_n(t) dt \leq b_n(n) \int_0^{+\infty} f(t)e^t dt = Mn^n e^{-n}$ si $M = \int_0^{+\infty} f(t)e^t dt > 0$.

Par conséquent, $u_n^{-1/n} \geq \frac{M^{-1/n} e}{n} = v_n$ et, comme $v_n \sim_{+\infty} \frac{e}{n}$ et que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, par comparaison, la série $\sum_{n \geq 1} |u_n|^{-1/n}$ diverge.

3.103 a. Les fonctions $f_a : t \mapsto \exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right)$ et $g_a : t \mapsto \frac{a}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$

et prolongeables par continuité en 0 en posant $f_a(0) = g_a(0) = 0$ car $\exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) \underset{0}{\sim} \exp\left(-\frac{a^2}{t^2}\right)$ et

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{a^2}{t^2} = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = 0$. De plus, $\exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} e^{-t^2}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t^2} = 0$ donc $f_a(t) \underset{+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $g_a(t) \underset{+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Ceci assure, par comparaison aux intégrales de

RIEMANN, que f_a et g_a sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc que $I(a)$ et $J(a)$ existent pour tout $a > 0$.

b. Dans $I(a)$, on pose $t = \frac{a}{u}$ avec φ de classe C^1 et bijective strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Par changement de variable, $I(a) = \int_{+\infty}^0 \exp\left(-\frac{a^2}{u^2} - u^2\right) \left(-\frac{a}{u^2}\right) du = \int_0^{+\infty} \frac{a}{u^2} \exp\left(-u^2 - \frac{a^2}{u^2}\right) du = J(a)$.

c. D'après **b.**, $I(a) = \frac{I(a) + J(a)}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) + \frac{a}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) \right) dt$ par linéarité

de l'intégrale donc $I(a) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{a}{t^2}\right) \exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) dt$. Or $-t^2 - \frac{a^2}{t^2} = \left(t - \frac{a}{t}\right)^2 - 2a$ d'où $\exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) = e^{-2a} \exp\left(-\left(t - \frac{a}{t}\right)^2\right)$ (mise sous forme canonique). Toujours par linéarité de l'intégrale, on obtient bien la relation $I(a) = \frac{e^{-2a}}{2} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{a}{t^2}\right) \exp\left(-\left(t - \frac{a}{t}\right)^2\right) dt$.

d. Dans l'intégrale de la question précédente, on pose $x = t - \frac{a}{t} = \varphi(t)$ avec φ qui est une bijection strictement croissante (car $\varphi'(t) = 1 + \frac{a}{t^2} > 0$) de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ car $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) = -\infty$ car $a > 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$. Ainsi, $I(a) = \frac{e^{-2a}}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\varphi(t)^2} \varphi'(t) dt = \frac{e^{-2a}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ par parité de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$. Par conséquent, $I(a) = e^{-2a} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$ avec le rappel de l'énoncé concernant l'intégrale de GAUSS.

3.104 a. Pour $x \in]-1; +\infty[$, soit $f_x :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_x(t) = \frac{t^x \ln(t)}{t-1}$. La fonction f_x est continue sur $]0; 1[$ par opérations. Comme $\ln(t) \underset{1}{\sim} t-1$ en posant $u = t-1$ dans $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$, on a $f_x(t) \underset{1}{\sim} t^x \underset{1}{\sim} 1$ donc f_x se prolonge par continuité en 1 en posant $f_x(1) = 1$. De plus, $f_x(t) \underset{0}{\sim} t^x \ln(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{1-x}{2}}}\right)$ par croissances comparées car $\frac{1+x}{2} < 0$ donc, comme $\frac{1-x}{2} < 1$, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, f_x est intégrable sur $]0; 1[$ ce qui montre la convergence de $\int_0^1 f_x(t) dt$.

b. Soit $-1 < x < y$, $\forall t \in]0; 1[$, $t^x = e^{x \ln(t)} \geq e^{y \ln(t)} = t^y \geq 0$ car $\ln(t) < 0$ donc, $t^x \ln(t) \leq t^y \ln(t) \leq 0$ et, puisque $t-1 < 0$, $f_x(t) \geq f_y(t) \geq 0$. Par croissance de l'intégrale, $H(x) = \int_0^1 f_x(t) dt \geq \int_0^1 f_y(t) dt = H(y) \geq 0$ ce qui montre que H est positive et décroissante sur $] -1; +\infty[$.

c. La fonction $\alpha : t \mapsto \frac{t \ln(t)}{t-1}$ est continue sur $]0; 1[$, se prolonge par continuité en 1 en posant $\alpha(1) = 1$ car $\ln(t) \underset{1}{\sim} t-1$ comme ci-dessus et, par croissances comparées, elle se prolonge aussi par continuité en 0 en posant $\alpha(0) = 0$. La fonction positive α ainsi prolongée est continue sur le segment $[0; 1]$ donc elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes et il existe $M \geq 0$ tel que $\forall t \in]0; 1[$, $0 \leq \alpha(t) \leq M$. Alors, pour $x > 0$, on a $0 \leq H(x) = \int_0^1 t^{x-1} \alpha(t) dt \leq M \int_0^1 t^{x-1} dt = M \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{M}{x}$ car $\lim_{t \rightarrow 0} t^x = 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{M}{x} = 0$, par encadrement, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 0$.

On pouvait aussi utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

d. Pour $x > -1$, avec l'indication, $H(x) - H(x+1) = \int_0^1 \frac{(t^x - t^{x+1}) \ln(t) dt}{t-1} = - \int_0^1 t^x \ln(t) dt$ et, en posant $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto \frac{t^{x+1}}{x+1}$ qui sont C^1 sur $]0; 1[$ et qui vérifient $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on a $- \int_0^1 t^x \ln(t) dt = \int_0^1 \frac{t^x}{x+1} dt = \left[\frac{t^{x+1}}{(x+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(x+1)^2}$ (1) par intégration par parties. Comme H est décroissante sur $] -1; +\infty[$, on a $\forall x \in]-1; 0[$, $H(0) \leq H(x+1) \leq H(1)$ donc $H(x+1) \underset{-1^+}{=} O(1)$ et (1) montre que $H(x) \underset{-1^+}{\sim} \frac{1}{(x+1)^2}$ car $O(1) \underset{-1^+}{=} o\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$.

e. Comme $\lim_{m \rightarrow +\infty} H(m) = 0$ d'après **c.**, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $H(n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (H(k-1) - H(k)) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ par dualité suite-série avec la relation de la question **d.**. De plus, comme $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue et décroissante

sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\forall k \geq 2$, $\int_k^{k+1} g(x)dx \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k g(x)dx$. Pour $n \geq 1$, en sommant pour $k \geq n+1$, puisque g est intégrable sur $[1; +\infty[$ par RIEMANN, $\int_n^{+\infty} g(x)dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_n^{+\infty} \leq H(n) \leq \left[-\frac{1}{x}\right]_{n-1}^{+\infty} = \int_{n-1}^{+\infty} g(x)dx$ par CHASLES donc $\frac{1}{n} \leq H(n) \leq \frac{1}{n-1}$ (1). Pour $x \geq 1$, H étant décroissante sur $[1; +\infty[$ d'après **b.**, $[x] \leq x < [x] + 1 \implies H([x] + 1) \leq H(x) \leq H([x])$ donc $\frac{1}{[x] + 1} \leq H(x) \leq \frac{1}{[x] - 1}$ avec (1) donc $\frac{1}{x+1} \leq H(x) \leq \frac{1}{x-2}$. Comme $\frac{1}{x+1} \sim_{+\infty} \frac{1}{x-2} \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$, par encadrement, on trouve $H(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$.

De la même manière, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $H(0) - H(n) = \sum_{k=0}^{n-1} (H(k) - H(k+1)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}$ donc, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(n) = 0$, on a $H(0) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

3.105 a. La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ car $\sin(t) \sim_0 t$. La convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ équivaut donc à celle de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Dans cette dernière intégrale, on pose $u : t \mapsto -\cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ ce qui, par intégration par parties, montre que la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ équivaut à celle de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$. Soit $g : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \frac{\cos(t)}{t^2}$, alors g est continue sur $[1; +\infty[$ et $g(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, g est intégrable sur $[1; +\infty[$ donc, a fortiori, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ converge. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

b. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, comme $|\sin(t)| \geq \sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$, on a $|f(t)| \geq \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t}$. Comme en **a.**, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ converge en réalisant une intégration par parties. Par contre, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t}$ diverge par critère de RIEMANN. Par somme, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t} dt$ diverge donc la fonction positive $g : t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$. Comme $\forall t > 0$, $|f(t)| \geq \frac{\sin^2(t)}{t} = g(t)$, par comparaison, f n'est pas non plus intégrable sur $[1; +\infty[$, donc a fortiori pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Posons $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme $1 - \cos(t) \sim_0 \frac{t^2}{2}$ donc $u(t)v(t) \sim_0 \frac{t}{2}$ et $u(t)v(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$, on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t)$. Ainsi, par intégration par parties, on a $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = 0 - \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2(t/2)}{t^2} dt$. On pose maintenant $t = 2u = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection C^1 strictement croissante et $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et on a, par changement de variable, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2((2u)/2)}{4u^2} (2du) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du$.

3.106 a. Puisque f est une fonction positive, on peut définir $g = \sqrt{f} = f^{1/2}$ et $h = f^2 \sqrt{f} = f^{5/2}$. Comme les fonctions $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto t^2 \sqrt{t}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$, par composition, g et h sont continues sur $[0; 1]$ car f est continue sur $[0; 1]$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ associée au produit scalaire $(a, b) \mapsto \int_0^1 a(t)b(t)dt$ sur l'espace vectoriel $C^0([0; 1], \mathbb{R})$, on a $\left| \int_0^1 gh \right| \leq \sqrt{\int_0^1 g^2} \times \sqrt{\int_0^1 h^2}$, ce qui donne

exactement, en élevant au carré, l'inégalité $\left(\int_0^1 f^3\right)^2 \leq \int_0^1 f^5 \times \int_0^1 f$.

Si on a égalité dans cette inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, alors les vecteurs g et h sont colinéaires.

- Soit $g = 0$ ou $h = 0$, et dans ce cas $f = 0$.
- Soit g et h sont non nulles, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ (car g et h positives) tel que $h = \lambda g$, ce qui s'écrit $\forall x \in [0; 1], f(x)^{5/2} = \lambda f(x)^{1/2}$ donc $f(x) = 0$ ou $f(x) = \sqrt{\lambda}$. Comme f n'est pas nulle, sinon g et h le seraient, et que f est continue sur $[0; 1]$, on a forcément $\forall x \in [0; 1], f(x) = \sqrt{\lambda}$ par le théorème des valeurs intermédiaires.

Dans les deux cas, f est constante et positive sur $[0; 1]$. Réciproquement, si f est constante et positive (valant α) sur $[0; 1]$, alors on a $\left(\int_0^1 f^3\right)^2 = \alpha^6 = \alpha^5 \times \alpha = \int_0^1 f^5 \times \int_0^1 f$.

Il y a égalité dans $\left(\int_0^1 f^3\right)^2 \leq \int_0^1 f^5 \times \int_0^1 f$ si et seulement si f est constante et positive sur $[0; 1]$.

b. L'hypothèse faite sur f nous incite à utiliser la dérivation. Soit la fonction $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \left(\int_0^x f\right)^2 - \int_0^x f^3$, alors g existe car f et f^3 sont continues sur $[0; 1]$, et g est même dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$ par le théorème fondamental de l'intégration avec $\forall x \in [0; 1], g'(x) = 2f(x) \int_0^x f(t)dt - f^3(x)$ d'où $g'(x) = 2f(x) \left(\int_0^x f(t)dt - \frac{f^2(x)}{2}\right)$. Comme f' est positive sur $[0; 1]$, la fonction f est croissante sur $[0; 1]$ donc positive sur cet intervalle car $f(0) = 0$. De plus, pour $x \in [0; 1]$, on a $\forall t \in [0; x], 0 \leq f'(t) \leq 1$ donc $0 \leq f(t)f'(t) \leq f(t)$ ce qui donne $0 \leq \int_0^x f(t)f'(t)dt = \left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_0^x = \frac{f(x)^2}{2} \leq \int_0^x f(t)dt$ en intégrant et par croissance de l'intégrale. Ainsi, $\forall x \in [0; 1], g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$. Comme $g(0) = 0$, on a donc $g(1) \geq 0$, ce qui s'écrit bien $\int_0^1 f^3 \leq \left(\int_0^1 f\right)^2$.

c. S'il y a égalité dans l'inégalité de la question **b.**, on a $g(1) = 0$ donc g est constante sur $[0; 1]$ et $\forall x \in [0; 1], g'(x) = 0 \iff \left(f(x) = 0 \text{ ou } \int_0^x f(t)dt = \frac{f(x)^2}{2}\right)$. Or, pour $x \in [0; 1]$, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^x f(t)dt - \frac{f(x)^2}{2} = \int_0^x f(t)dt - \int_0^x f(t)f'(t)dt = \int_0^x f(t)(1 - f'(t))dt = 0$ et la fonction $t \mapsto f(t)(1 - f'(t))$ est continue et positive sur $[0; x]$ donc $\int_0^x f(t)dt = \frac{f(x)^2}{2} \iff (\forall t \in [0; x], (f(t) = 0 \text{ ou } f'(t) = 1))$.

Ainsi, s'il y a égalité dans l'inégalité de **b.**, $f = 0$ ou $(\forall t \in [0; x], (f(t) = 0 \text{ ou } f'(t) = 1))$. Supposons que $(\forall t \in [0; x], (f(t) = 0 \text{ ou } f'(t) = 1))$, posons alors $m = \sup(\{t \in [0; 1] \mid f(t) = 0\})$, qui existe car $A = \{t \in [0; 1] \mid f(t) = 0\}$ contient 0 , est inclus dans $\mathbb{R}$ et est minoré par 0 . Considérons trois cas :

- Si $m = 0$, alors $\forall t > 0, f(t) \neq 0$ donc $f'(t) = 1$ et, par continuité de la fonction f' sur $[0; 1]$, on a $\forall x \in [0; 1], f'(x) = 1$. Comme $[0; 1]$ est un intervalle et $f(0) = 0$, on a donc $\forall x \in [0; 1], f(x) = x$.
- Si $m \in]0; 1[$, il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = m$ par caractérisation séquentielle de la borne supérieure. Par continuité de f , on a donc $f(m) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n) = 0$ donc $m \in A$. Comme f est croissante sur $[0; 1]$, on a $\forall x \in [0; m], f(x) = 0$. Pour $t \in]m; 1]$, $t \notin A$ donc $f(t) \neq 0$ donc $f'(t) = 1$ et, par continuité de f' en m , on a donc $f'(m) = 1$, ce qui contredit le fait que f est constante (et nulle) sur $[0; m]$. Ce cas ne se peut !
- Si $m = 1$, comme ci-dessus, on a $\forall x \in [0; m], f(x) = 0$ donc f est nulle sur $[0; 1]$.

Ainsi, l'égalité dans **b.** implique que $f = 0$ ou que $\forall x \in [0; 1], f(x) = x$.

Réciproquement, si f est nulle sur $[0; 1]$, on a bien $\int_0^1 f^3 = 0 = \left(\int_0^1 f\right)^2$ et si $f : x \mapsto x$, on a bien l'égalité $\int_0^1 f^3 = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right)^2 = \left(\int_0^1 f\right)^2$.

Par conséquent, il y a égalité dans **b.** pour une fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0; 1], f'(x) \in [0; 1]$ si et seulement si f est nulle sur $[0; 1]$ ou si $f : x \mapsto x$.

3.107 a. Les fonctions $u : t \mapsto \lambda t + \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = \lambda$ donc, par intégration par parties, la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t} dt$ équivaut à celle de $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda t + \cos(t)}{t^2} dt$. Or $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et $\frac{\cos(t)}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ est absolument convergente par comparaison et, même si $t \mapsto \frac{\lambda t}{t^2} = \frac{\lambda}{t}$ est continue sur $[1; +\infty[$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda}{t} dt$ ne converge que si $\lambda = 0$ d'après RIEMANN. Ainsi, par somme, $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - \sin(t)}{t} dt$ converge si et seulement si $\lambda = 0$.

b. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on peut définir $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ la primitive de f qui s'annule en 0. De plus, f est continue sur le segment $[0; T]$ donc elle y est bornée, et étant T -périodique, elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

Méthode 1 : notons $M = \|f\|_{\infty, \mathbb{R}}$. Soit $x \geq 0$ et l'entier n_x tel que $n_x T$ soit le plus grand multiple de T inférieur à x , ce qui se traduit par $n_x T \leq x < (n_x + 1)T \iff n_x \leq \frac{x}{T} < n_x + 1$ donc $n_x = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$.

Par CHASLES, $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{n_x-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt + \int_{n_x T}^x f(t)dt$. Posons $I = \int_0^T f(t)dt$, ce qui donne $F(x) = n_x I + \int_{n_x T}^x f(t)dt$. Par inégalité triangulaire, on a $\left| \int_{n_x T}^x f(t)dt \right| \leq \int_{n_x T}^x M dt = M(x - n_x T) \leq MT$ et on a donc $F(x) = n_x I + O(1)$. L'inégalité $n_x T \leq x < (n_x + 1)T$ montre que $x - n_x T = O(1)$ donc $n_x = \frac{x}{T} + O(1)$.

Posons $m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt = \frac{I}{T}$ qui représente la valeur moyenne de f sur une période, de sorte que ce qui précède s'énonce $F(x) = \frac{1}{T} x + O(1) = mx + O(1)$.

Méthode 2 : posons $m = \frac{1}{T} \int_0^T f(u)du = \frac{F(T)}{T}$, $g : x \mapsto F(x) - mx$ et $h : x \mapsto g(x + T) - g(x)$. Comme F est dérivable par le théorème fondamental de l'intégration, g et h le sont aussi et on a $h'(x) = g'(x + T) - g'(x)$ donc $h'(x) = F'(x + T) - m - F'(x) + m = f(x + T) - f(x) = 0$ par hypothèse. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, h est constante et $h(0) = g(T) - g(0) = F(T) - F(0) = 0$ donc h est nulle sur $\mathbb{R}$. g est donc T -périodique et, comme avant puisque g est continue, elle est bornée sur $\mathbb{R}$ donc $F(x) = mx + O(1)$.

Concluons : les fonctions $u : t \mapsto \lambda t - F(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = \lambda - m$ car $u(t)v(t) = \frac{\lambda t - (mt + O(1))}{t}$. Par intégration par parties, $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda t - F(t)}{t^2} dt$ ont même nature. Comme $\frac{\lambda t - F(t)}{t^2} = \frac{\lambda t - mt - (F(t) - mt)}{t^2} = \frac{(\lambda - m)}{t} + \frac{F(t) - mt}{t^2}$ et $\frac{F(t) - mt}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'après ce qui précède, comme à la question **a.**, $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge si et seulement si $\lambda = m$.

3.108 a. Comme f est continue, positive et non nulle sur $[a; b]$, d'après la contraposée d'un théorème du cours, il

vient $A = \int_a^b f(x)dx > 0$. Comme f est continue sur $[a; b]$, d'après le théorème fondamental de l'intégration, $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a sur $[a; b]$. F est donc de classe C^1 , strictement croissante car $f > 0$ donc F réalise une bijection de l'intervalle $[a; b]$ dans $[0; A]$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les conditions imposées à $x_0, x_1, \dots, x_n$ reviennent à $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, F(x_k) - F(x_{k-1}) = \frac{A}{n}$ donc, puisque $x_0 = a$ est imposé donc $F(x_0) = 0$, les conditions imposées se résument à $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, F(x_k) = \frac{kA}{n}$. Ceci montre l'existence et l'unicité de la subdivision demandée et qu'on a $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, x_k = F^{-1}\left(\frac{kA}{n}\right)$.

b. Pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(F^{-1}\left(\frac{kA}{n}\right)\right) = \frac{1}{A} \times \left[\frac{A}{n} \sum_{k=0}^n g\left(\frac{kA}{n}\right) \right] = \frac{g(0)}{n} + \frac{1}{A} \times \left[\frac{A}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{kA}{n}\right) \right]$ en définissant $g : [0; A] \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = f \circ F^{-1}(x)$. Comme g est continue sur le segment $[0; A]$ par composition puisque F^{-1} est continue de $[0; A]$ dans $[a; b]$, le théorème sur les sommes de RIEMANN montre que l'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{A} \int_0^A g(x)dx = \frac{1}{A} \int_0^A f \circ F^{-1}(x)dx$. On peut effectuer le changement de variable $x = F(t)$ car F est de classe C^1 , bijective et strictement croissante de $[a; b]$ dans $[0; A]$ et on obtient la nouvelle expression

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{A} \int_a^b (f \circ F^{-1} \circ F(t)) \times f(t)dt = \frac{1}{A} \int_a^b f(t)^2 dt \text{ car } F'(t) = f(t). \text{ Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\int_a^b (f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

3.109 a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto x^n e^{\omega x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|f_n(x)| = x^n e^{-x/2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par

croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ existe. Pour tout entier $n \geq 1$, les fonctions $u : x \mapsto x^n$ et $v : x \mapsto \frac{e^{\omega x}}{\omega}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, $u(0)v(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, $I_n = -\frac{n}{\omega} \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{\omega x} dx = -\frac{n}{\omega} I_{n-1}$. Par une récurrence simple, on en déduit que $I_n = n!(-j)^{n+1}$ car $\omega = j^2$ donc $\frac{1}{\omega} = j$.

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{Im}(I_{3k-1}) = 0 = \text{Im}\left(\int_0^{+\infty} x^{3k-1} e^{\omega x} dx\right) = -\int_0^{+\infty} x^{3k-1} e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) dx$.

Dans $\int_0^{+\infty} x^{3k-1} e^{-x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) dx = 0$ (vue sur $\mathbb{R}_+^*$), on pose $x = \varphi(t) = t^{1/3}$ avec φ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{1}{3} \int_0^{+\infty} t^{k-(1/3)} e^{-t^{1/3}/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t^{1/3}\right) t^{-2/3} dt = 0$

donc, en posant, $n = k - 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} e^{-t^{1/3}/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t^{1/3}\right) t^n dt = 0$. En définissant $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(t) = e^{-\frac{\sqrt[3]{t}}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{t}\right)$, la fonction g est continue et non nulle sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} g(t)t^n dt = 0$.

b. L'énoncé nous incite à admettre le théorème de STONE-WEIERSTRASS, il s'agit de l'approximation uniforme de toute fonction continue sur un segment par des polynômes. Soit donc $\varepsilon > 0$, il existe par ce théorème un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall t \in [a; b], |f(t) - P(t)| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\|f - P\|_{\infty, [a; b]} \leq \varepsilon$.

Ainsi, en écrivant $P = \sum_{n=0}^d a_n X^n$, on a $\int_a^b (f - P)\bar{f} = \int_a^b |f|^2 - \int_a^b \bar{f}P$ or, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b \bar{f}P = \sum_{n=0}^d \int_a^b \bar{f}(t)t^n dt = \sum_{n=0}^d \int_a^b f(t)t^n dt = 0 \text{ donc } \int_a^b (f - P)\bar{f} = \int_a^b |f|^2. \text{ Or, par inégalité triangulaire,}$$

$\left| \int_a^b (f - P) \bar{f} \right| \leq \int_a^b |f - P| |f| \leq \|f - P\|_{\infty, [a; b]} \int_a^b |f| \leq \varepsilon(b - a) \|f\|_{\infty, [a; b]}$ car f est bornée sur $[a; b]$ puisque continue sur le segment $[a; b]$. En faisant tendre ε vers 0, il vient $\int_a^b |f|^2 = 0$. Comme $|f|^2$ est positive et continue sur $[a; b]$ non réduite à un point, $|f|^2$ est nulle sur $[a; b]$, donc f est nulle sur $[a; b]$ comme attendu. Question subsidiaire : on pose $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$, alors F est C^1 et croissante car $F' = f \geq 0$ sur l'intervalle $[a; b]$ et $F(a) = F(b)$ donc F est constante sur $[a; b]$ ce qui prouve que $F' = f = 0$.

3.110 Soit $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $g(t) = \frac{|\sin(t)|}{t}$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$ car $|\sin(t)| \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \sin(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t$. Comme g est maintenant continue sur le segment $[0; x]$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, c'est même d'après le théorème fondamental de l'intégration la primitive de g qui s'annule en 0. Comme la fonction g s'annule en tous les multiples de π , on va considérer $f(n\pi)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Par la relation de CHASLES, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(t) dt$. Pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on pose dans $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(t) dt$ le changement de variable affine $t = u + k\pi = \varphi_k$ avec φ_k de classe C^1 sur $[0; \pi]$ pour avoir $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(t) dt = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + k\pi} du$ car $\sin$ est positif sur $[0; \pi]$. On somme ces inégalités pour obtenir l'encadrement $\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{\pi + k\pi} du \leq f(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + k\pi} du \leq \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u} du + \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{k\pi} du$. En posant $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, il est classique que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$. De plus, $\int_0^\pi \sin(u) du = [-\cos(u)]_0^\pi = 2$ donc $\frac{2H_n}{\pi} \leq f(n\pi) \leq I + \frac{2H_{n-1}}{\pi}$ en posant $I = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u} du$. Comme $\frac{2H_n}{\pi} \underset{+\infty}{\sim} I + \frac{2H_{n-1}}{\pi} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{\pi}$ car $\ln(n-1) = \ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$, par encadrement, on a $f(n\pi) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{\pi}$.

De plus, par définition de la partie entière, pour $x \in \mathbb{R}_+$, en posant $n_x = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$, on a $n_x \leq \frac{x}{\pi} < n_x + 1$ donc $n_x\pi \leq x < (n_x + 1)\pi$. Comme la fonction f est croissante car $f' = g \geq 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $f(n_x\pi) \leq f(x) \leq f((n_x + 1)\pi)$. D'après ce qui précède, on a $f(n_x\pi) \underset{+\infty}{\sim} f((n_x + 1)\pi) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n_x)}{\pi}$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} n_x = +\infty$ puisque $n_x > \frac{x}{\pi} - 1$ donc, par encadrement, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n_x)}{\pi}$. Mais $\frac{x}{\pi} - 1 < n_x \leq \frac{x}{\pi}$ donc, par croissance de la fonction $\ln$, $\ln\left(\frac{x}{\pi} - 1\right) \leq \ln(n_x) \leq \ln\left(\frac{x}{\pi}\right)$ donc $\ln(n_x) \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{x}{\pi}\right) = \ln(x) - \ln(\pi) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$. Par conséquent, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln(x)}{\pi}$.

3.111 a. La fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est négative, continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$. De plus, $f(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) - \ln(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Ainsi, $f(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ par croissances comparées donc f est intégrable sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Par conséquent, $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) dx$ converge donc I existe.

b. On effectue le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t = \varphi(t)$ avec φ qui est de classe C^1 et une bijection strictement décroissante de $[0; \frac{\pi}{2}[$ dans $]0; \frac{\pi}{2}]$, ce qui garantit l'existence de $\int_{\pi/2}^0 \ln(\cos t)(-1) dt = K$ et le fait que $I = K$. Par linéarité de l'intégrale, vue ici sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$, comme on a la relation $\ln(\sin(x) \cos(x)) = \ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x))$, le réel J existe aussi et $J = I + K = 2I$.

c. En considérant les intégrales sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x \cos x) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x)) dx - \frac{\pi \ln 2}{2}$. On change de variable $x = \frac{t}{2} = \psi(t)$ avec ψ qui est de classe C^1 et une bijection strictement croissante de $]0; \pi[$ dans $]0; \frac{\pi}{2}[$, et on a $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x)) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin t) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ par symétrie par rapport à $\frac{\pi}{2}$ de la courbe de $t \mapsto \ln(\sin t)$ ou par changement de variable $t = \pi - s$. Alors $J = I + I = I - \frac{\pi \ln 2}{2}$ donc $I = -\frac{\pi \ln 2}{2}$. Cette intégrale est dite d'EULER.

3.112 a. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}}$. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et

$f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{nt}}{(e^t)^{n+1}} = e^{-t}$. Par comparaison, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $t \mapsto e^{-t}$ l'est. Ainsi, I_n existe.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, dans $\int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}} dt$, on pose $u : t \mapsto -\frac{(1+e^t)^{-n}}{n}$ et $v : t \mapsto e^{(n-1)t}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ car $u(t)v(t) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{e^{-t}}{n}$ d'où, par intégration par parties et linéarité de l'intégrale, $I_n = \int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt$, ce qui donne bien la relation $I_n = \frac{1}{n(1+1)^n} + \frac{n-1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{e^{(n-1)t}}{(1+e^t)^n} dt = \frac{1}{n2^n} + \frac{n-1}{n} I_{n-1}$.

c. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = nI_n = \frac{1}{2^n} + (n-1)I_{n-1}$ donc $J_n = J_{n-1} + \frac{1}{2^n}$.

d. On calcule $J_1 = I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2} dt = \left[-\frac{1}{1+e^t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$. Ainsi, avec la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = J_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (J_{k+1} - J_k) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - (1/2)^n}{1 - (1/2)} = 1 - \frac{1}{2^n}$ donc $I_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$.

e. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1$, on a $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

3.113 Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, f' est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. En prenant $\varepsilon = q > 0$,

il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]-\eta, \eta[$, $|f'(x) - f'(0)| < \varepsilon = q \implies f'(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante sur $] -\eta; \eta[$. Posons $m = \min(-f(-\eta), f(\eta)) > 0$. Si, par exemple, $m = f(\eta)$ (l'autre cas est similaire), par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel qu'on note $-\alpha \in]-\eta; 0[$ (avec $0 < \alpha < \eta$) tel que $f(-\alpha) = -m$ car f réalise une bijection entre $[-\eta; 0]$ et $[f(-\eta); 0]$ qui contient $-m$ (faire un dessin).

En posant $\beta = \eta > 0$, on a donc $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $m > 0$ tels que f réalise une bijection strictement croissante entre $] -\alpha; \beta[$ et $] -m; m[$. Notons encore f cette restriction de la fonction initiale et posons $\psi = f^{-1} \circ (-f)$. On le peut car $-f$ réalise une bijection strictement décroissante de $] -\alpha; \beta[$ dans $] -m; -(-m)[=] -m; m[$ et que f^{-1} réalise une bijection strictement croissante de $] -m; m[$ dans $] -\alpha; \beta[$. Par conséquent, par composition, ψ réalise une bijection strictement décroissante de $] -\alpha; \beta[$ dans $] -\alpha; \beta[$ et on a $\forall x \in] -\alpha; \beta[$, $\psi(x) = f^{-1} \circ (-f(x))$ donc $f(\psi(x)) = -f(x)$ et on a bien $f(x) = -f(\psi(x))$.

b. Comme $\forall x \in] -\alpha; \beta[$, $f'(x) > 0$, la fonction bijective $f^{-1} :] -\alpha; \beta[\rightarrow] -\alpha; \beta[$ est aussi de classe C^1 et ψ est donc de classe C^1 par composition. De plus, $\forall x \in] -\alpha; \beta[$, $\psi'(x) = -f'(x) \times \frac{1}{f'(f^{-1}(-f(x)))}$.

Enfin, ψ est involutive car $\forall x \in] -\alpha; \beta[$, $\psi^2(x) = f^{-1} \circ (-f(f^{-1} \circ (-f(x)))) = f^{-1} \circ (-(-f(x))) = f^{-1}(f(x)) = x$.

3.114 a. L'ensemble E est inclus dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et il est non vide car la fonction nulle, qui est continue sur $\mathbb{R}_+$, vérifie $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in E^2$, il existe par définition des réels strictement positifs α et β tels que $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $x^\beta g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Supposons par exemple que $\alpha \leq \beta$, comme la fonction $x \mapsto x^{\alpha-\beta}$ est bornée au voisinage de $+\infty$ car $\alpha - \beta \leq 0$, on a $x^\alpha(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda x^\alpha f(x) + \mu x^{\alpha-\beta} x^\beta g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $\lambda f + \mu g \in E$ car cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, E est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ donc est lui-même un espace vectoriel.

b. D'abord, pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $h : t \mapsto e^{-t}f(t)$ est continue sur $[x; +\infty[$. Par définition de E , il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $h(t) = t^{-\alpha} e^{-t} t^\alpha f(t) = o(t^{-\alpha} e^{-t}) = o(e^{-t})$. Par comparaison à une intégrale de référence, h est intégrable sur $[x; +\infty[$ donc g est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Par CHASLES, pour $x \in \mathbb{R}_+$, il vient $g(x) = e^x \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)dt - e^x \int_0^x e^{-t}f(t)dt$. Comme h est continue sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $H : x \mapsto \int_0^x e^{-t}f(t)dt$ est de classe C^1 sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ et $H(x) = h(x)$. Ainsi, par opérations, g est de classe C^1 et g est solution de (E_f) sur $\mathbb{R}_+$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = e^x \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)dt - e^x \int_0^x e^{-t}f(t)dt - e^x e^{-x}f(x) = g(x) - f(x)$.

Comme les solutions réelles de l'équation homogène $(E_{f,0}) : y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ sont toutes les fonctions $z_\lambda : x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, par théorème de structure, les solutions réelles de (E_f) sur $\mathbb{R}_+$ sont toutes les fonctions $y_\lambda : x \mapsto \left(\lambda + \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt\right)e^x$. On a $y_0 = g$, vérifions que $g \in E$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $|x^\alpha g(x)| = \left|x^\alpha e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt\right| \leq x^\alpha e^x \int_x^{+\infty} t^{-\alpha} e^{-t} |t^\alpha f(t)|dt$ par inégalité triangulaire. Soit $\varepsilon > 0$, comme $x^\alpha f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, il existe un réel $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall t \geq A$, $|t^\alpha f(t)| \leq \varepsilon$. Ainsi, dès que $x \geq A$, on a $|x^\alpha g(x)| \leq \varepsilon x^\alpha e^x \int_x^{+\infty} t^{-\alpha} e^{-t}dt \leq \varepsilon x^\alpha e^x x^{-\alpha} \int_x^{+\infty} e^{-t}dt$ car $\forall t \geq x$, $t^{-\alpha} \leq x^{-\alpha}$ car $\alpha \geq 0$. Comme $\int_x^{+\infty} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_x^{+\infty} = e^{-x}$, on a donc $\forall x \geq A$, $|x^\alpha g(x)| \leq \varepsilon$. Ainsi, $x^\alpha g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $g \in E$. Or $x \mapsto e^x$ n'appartient pas à E car $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$, $x^\alpha e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ par croissances comparées donc y_λ n'appartient à E que si $\lambda = 0$ et on peut donc conclure que $g : x \mapsto e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$ est l'unique solution de (E_f) appartenant à E .

3.115 a. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $f_x : t \mapsto \sin^x(t)$ est continue sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $f(x) = \int_0^{\pi/2} f_x(t)dt$ existe. Pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, la fonction $f_x : t \mapsto \sin^x(t)$ est continue sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $f_x(t) \sim_0 t^x = \frac{1}{t^{-x}}$ car $\sin(t) \sim_0 t$ donc, comme f_x est positive et par critère de RIEMANN, $\int_0^{\pi/2} f_x(t)dt$ converge si et seulement si $-x < 1 \iff x > -1$. Par conséquent, le domaine de définition D_f de f vaut $D_f =]-1; +\infty[$.

b. Pour $x > 0$, les fonctions $u_x : t \mapsto \sin^x(t)$ et $v : t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe C^1 sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u_x(t)v(t) = 0$ donc $f(x+1) = \int_0^{\pi/2} u_x(t)v'(t)dt = [u_x(t)v(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'_x(t)v(t)dt$ par intégration par parties d'où $f(x+1) = x \int_0^{\pi/2} \sin^{x-1}(t) \cos^2(t)dt$. Ainsi, $f(x+1) = x \int_0^{\pi/2} \sin^{x-1}(t)(1 - \sin^2(t))dt$ ce qui donne $f(x+1) = x(f(x-1) - f(x+1))$ par linéarité de l'intégrale (les deux convergent) donc $(x+1)f(x+1) = xf(x-1)$ ce qui donne $(x+1)f(x+1)f(x) = xf(x)f(x-1)$ d'où $\Phi(x+1) = \Phi(x)$.

c. Pour $(x, y) \in (D_f)^2$ tel que $x < y$, comme $\forall t \in]0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin(t) \leq 1$, on a $\sin^x(t) \geq \sin^y(t)$ donc, par croissance de l'intégrale, $f(x) \geq f(y)$. Ainsi, f est décroissante sur D_f ce qui entraîne, par positivité de f , que $f(x)f(x-1) \geq f(y)f(y-1)$ si $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $x < y$. La fonction $x \mapsto \frac{\Phi(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. D'après la question b. et par une récurrence facile, Φ est constante sur les entiers naturels non nuls et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\phi(n) = \phi(1) = f(0)f(1) = \frac{\pi}{2} \times [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$. De plus, soit $x > 1$, on a $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$ par définition de la partie entière donc, avec la question c., $\frac{\Phi(\lfloor x \rfloor + 1)}{\lfloor x \rfloor + 1} \leq \frac{\Phi(x)}{x} \leq \frac{\Phi(\lfloor x \rfloor)}{\lfloor x \rfloor}$ qui devient, comme on a $\lfloor x \rfloor > 0$, $\frac{x}{\lfloor x \rfloor + 1} \times \frac{\pi}{2} \leq \Phi(x) \leq \frac{x}{\lfloor x \rfloor} \times \frac{\pi}{2}$. Or $1 \leq \frac{x}{\lfloor x \rfloor} \leq 1 + \frac{1}{\lfloor x \rfloor} = 1 + \frac{1}{x-1}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\lfloor x \rfloor} = 1$ par encadrement. De même, il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\lfloor x \rfloor + 1} = 1$ donc, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \frac{\pi}{2}$. Enfin, pour un réel $x > 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Phi(x+n) = \Phi(x)$ avec la question b. donc, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(x+n) = \frac{\pi}{2}$ par caractérisation séquentielle de la limite, $\Phi(x) = \frac{\pi}{2}$. La fonction Φ est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$ où elle vaut $\frac{\pi}{2}$.

e. Comme f est décroissante sur D_f , pour $x > 0$, on a $f(x+1) \leq f(x) \leq f(x-1)$ donc, comme $f(x) > 0$, on a l'encadrement $f(x+1)f(x) \leq f(x)^2 \leq f(x)f(x-1)$ et, avec la question précédente, $\frac{\pi}{2(x+1)} \leq f(x)^2 \leq \frac{\pi}{2x}$.

Comme $\frac{\pi}{2(x+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$ et que $f(x) > 0$, par encadrement, on a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

3.116 a. Soit $z \in \mathbb{C}$, posons $f_z : t \mapsto e^{-zt}$ pour tout l'exercice. Traitons quatre cas :

- Si $z = 0$, la fonction f_z est constante et vaut 1 donc f_z admet une limite finie $\ell = 1$ en $+\infty$.
- Si $\operatorname{Re}(z) > 0$, comme $|f_z(t)| = e^{-\operatorname{Re}(z)t}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f_z(t)| = 0$ donc f_z admet une limite finie $\ell = 0$ en $+\infty$.
- Si $\operatorname{Re}(z) < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f_z(t)| = +\infty$ car $|f_z(t)| = e^{-\operatorname{Re}(z)t}$ donc f_z n'admet pas de limite finie en $+\infty$.
- Si $\operatorname{Re}(z) = 0$ et $\operatorname{Im}(z) \neq 0$, supposons que f_z admet une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en $+\infty$, par caractérisation séquentielle de la limite, on aurait $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_z\left(\frac{n\pi}{|\operatorname{Im}(z)|}\right) = \ell$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\pi}{|\operatorname{Im}(z)|} = +\infty$, ce qui s'écrit aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\pm i n \pi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = \ell$, et c'est absurde.

Ainsi, $t \mapsto e^{-zt}$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$ ou $z = 0$.

b. Comme $|f_z(t)| = |e^{-\operatorname{Re}(z)t - i \operatorname{Im}(z)t}| = e^{-\operatorname{Re}(z)t}$, qu'on sait, pour $a \in \mathbb{R}$, que $\int_0^{+\infty} e^{at} dt$ converge si et seulement si $a < 0$ d'après le cours, et que f_z est continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f_z est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.

c. Soit $z \in \mathbb{C}$, la fonction $g_z : t \mapsto e^{-zt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Si $z = 0$, g_z est constante et vaut 1 donc $\int_0^{+\infty} g_0(t) dt = \int_0^{+\infty} 1 dt$ diverge.
- Si $z \neq 0$, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^x e^{-zt} dt = \left[-\frac{e^{-zt}}{z} \right]_0^x = \frac{1 - e^{-zx}}{z}$. Ainsi, avec la question a., comme $\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_0^x e^{-zt} dt$ admet une limite finie en $+\infty$ par définition, $\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt$ converge si et seulement si $\operatorname{Re}(z) > 0$.

d. Comme $h : t \mapsto e^{-z_0 t} f(t)$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ car c'est la primitive de h qui s'annule en 0. Comme $\int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) dt$ converge par hypothèse, la fonction F admet une limite finie en $+\infty$ par définition. Comme F est continue

sur $\mathbb{R}_+$ et admet une limite finie $I = \int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) dt$ en $+\infty$, il est classique que F est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

En effet, en prenant $\varepsilon = 1$, il existe un réel $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geq A$, $|F(x) - I| \leq \varepsilon = 1$ ce qui montre que $|F(x)| = |(F(x) - I) + I| \leq |F(x) - I| + |I| \leq |I| + 1$. Comme F est continue sur le segment $[0; A]$, elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [0; A]$, $|F(x)| \leq M$. Par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|F(x)| \leq \max(|I| + 1, M)$ et F est bien bornée sur $\mathbb{R}_+$.

e. La fonction $a_z : t \mapsto e^{-(z-z_0)t} F(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $|a_z(t)| = |e^{-(z-z_0)t}| |F(t)| \underset{+\infty}{=} O(|e^{-(z-z_0)t}|)$ d'après la question précédente donc, d'après la question **b.** et par comparaison car $\operatorname{Re}(z - z_0) > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |a_z(t)| dt$ converge donc a_z est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

f. Comme $z \neq z_0$, en posant $u : t \mapsto -\frac{e^{-(z-z_0)t}}{z - z_0}$ et $v = F$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ d'après **d.** et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ d'après **d.** car F est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(z-z_0)t} = 0$ puisque $\operatorname{Re}(z - z_0) > 0$. Par intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-(z-z_0)t}}{z - z_0} \times (e^{-z_0 t} f(t)) dt$ et $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$ ont même nature. Or $t \mapsto e^{-(z-z_0)t} F(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après **e.** et $\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$ converge. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{-e^{-(z-z_0)t}}{z - z_0} \times (e^{-z_0 t} f(t)) dt = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-zt} f(t)}{z - z_0} dt$ converge et on a la relation $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-zt} f(t)}{z - z_0} dt = 0 - \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$ car $F(0) = 0$. Ainsi, par linéarité de l'intégrale, $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$.

Questions supplémentaires :

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$, $f : [\widetilde{a; b}] \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de classe C^{n+1} avec $n \in \mathbb{N}$, on a la formule de TAYLOR reste intégral, $f(b) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$.

- Avec ces conditions, on note $M_{n+1} = \max_{x \in [\widetilde{a; b}]} |f^{(n+1)}(t)|$ (qui existe car $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment

$[\widetilde{a; b}]$) et on a l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE $\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} \right| \leq \frac{M_{n+1} |b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

3.117 La fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$ est continue sur $[1; +\infty[$. De plus, $\operatorname{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^3)$

et, en intégrant ce développement limité, on a $\operatorname{Arcsin}(y) \underset{0}{=} y + \frac{y^3}{6} + o(y^4)$ car $\operatorname{Arcsin}(0) = 0$. Ainsi, on obtient

$f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ce qui montre que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6x^3}$. Par comparaison aux intégrales de

RIEMANN, on en déduit que la fonction f est intégrable sur $[1; +\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Méthode 1 : dans $I = \int_1^{+\infty} \left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right) dx$, on pose $u : x \mapsto x$ et $v = f$ qui sont de classe C^1 sur $]1; +\infty[$

et, comme $\lim_{x \rightarrow 1^+} u(x)v(x) = f(1) = \frac{\pi}{2} - 1$ par continuité de Arcsin en 1 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = 0$ car $xf(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{6x^2}$,

on obtient la relation $I = 1 - \frac{\pi}{2} - \int_1^{+\infty} x f'(x) dx = 1 - \frac{\pi}{2} - \int_1^{+\infty} x \left(\frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \right) \right) dx$ ce qui se simplifie

en $I = 1 - \frac{\pi}{2} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right) dx$. On pose ensuite $x = \frac{1}{\sin(u)} = \varphi(u)$ avec φ bijection strictement

décroissante de classe C^1 de $]0; \frac{\pi}{2}[$ dans $]1; +\infty[$ et $I = 1 - \frac{\pi}{2} - \int_{\pi/2}^0 \sin(u) \left(\frac{\cos(u) - 1}{\cos(u)} \right) \left(-\frac{\cos(u)}{\sin^2(u)} \right) du$.
Ainsi, $I = 1 - \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(u)}{\sin(u)} du = 1 - \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin^2(u/2)}{2 \sin(u/2) \cos(u/2)} du = 1 - \frac{\pi}{2} + \left[-2 \ln(\cos(u/2)) \right]_0^{\pi/2}$
et enfin $I = 1 + \ln(2) - \frac{\pi}{2} \sim 0,12$.

Méthode 2 : dans $I = \int_1^{+\infty} \left(\operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x} \right) dx$, on pose $\theta = \operatorname{Arcsin}(1/x)$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{\sin(\theta)} = \varphi(\theta)$ avec φ qui est une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $]0; \frac{\pi}{2}[$ dans $]1; +\infty[$. Par changement de variable, il vient $I = \int_{\pi/2}^0 (\theta - \sin(\theta)) \left(-\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} \right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) d\theta$. Les deux fonctions $a : \theta \mapsto \frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2}$ et $b : \theta \mapsto \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ ne sont pas intégrables en 0^+ car $a(\theta) \sim b(\theta) \sim \frac{1}{\theta}$. Par contre, on peut écrire $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} d\theta - \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta \right)$ car, pour $\varepsilon \in]0; \frac{\pi}{2}[$, les deux fonctions a et b sont continues sur le segment $[\varepsilon; \frac{\pi}{2}]$. Or $\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta = [\ln(\sin(\theta))]_{\varepsilon}^{\pi/2} = -\ln(\sin(\varepsilon))$ et, en posant les fonctions $u : \theta \mapsto \theta$ et $v : \theta \mapsto -\frac{1}{\sin(\theta)}$ qui sont de classe C^1 sur $[\varepsilon; \frac{\pi}{2}]$, par intégration par parties, $\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} d\theta = \left[-\frac{\theta}{\sin(\theta)} \right]_{\varepsilon}^{\pi/2} + \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(\theta)} d\theta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{\sin(\varepsilon)} + \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right]_{\varepsilon}^{\pi/2}$ ce qui donne $\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} d\theta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{\sin(\varepsilon)} - \ln \left(\tan \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \right)$. Alors, en regroupant les termes, on parvient à $\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} d\theta - \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{\sin(\varepsilon)} - \ln \left(\frac{\tan(\varepsilon/2)}{\sin(\varepsilon)} \right)$. Comme $\sin(\varepsilon) \sim \varepsilon$ et $\tan \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \sim \frac{\varepsilon}{2}$, en passant à la limite quand ε tend vers 0^+ , on a $I = 1 + \ln(2) - \frac{\pi}{2} \sim 0,12$.

3.118 a. La fonction $g : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[x; +\infty[$ pour $x > 0$ et $g(t) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'où g est intégrable sur $[x; +\infty[$ ce qui montre que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme, pour $x > 0$, on a $f(x) = \int_1^{+\infty} g(t) dt - \int_1^x g(t) dt$ et que $x \mapsto \int_1^x g(t) dt$ est la primitive de g qui s'annule en 1 par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = -g(x) = -\frac{\sin(x)}{x^2}$.

b. La fonction $h : u \mapsto \frac{\sin(u)}{u}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $h(0) = 1$ car $\sin(u) \sim u$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ converge si et seulement si $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ converge. Posons les fonctions $a : u \mapsto -\cos(u)$ et $b : u \mapsto \frac{1}{u}$ qui sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$ et vérifient $\lim_{u \rightarrow +\infty} a(u)b(u) = 0$ donc, par intégration par parties, les intégrales $\int_1^{+\infty} a'b = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ et $\int_1^{+\infty} ab' = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^2} du$ sont de même nature. Or la seconde est absolument convergente car $d : u \mapsto \frac{\cos(u)}{u^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et $d(u) \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{u^2}\right)$. Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ converge (mais pas absolument) et on pose $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$.

c. Pour $x > 0$, $f(x) = \int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = -\int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^1 \frac{\sin(t) - t}{t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$. La fonction $h : t \mapsto \frac{\sin(t) - t}{t^2}$ est continue sur $[0; 1]$ en la prolongeant par continuité en 0 en posant $h(0) = 0$ car $\sin(t) - t \sim -\frac{t^3}{6}$ donc $h(t) \sim -\frac{t}{6}$. Comme h est négative sur $[0; 1]$ par concavité de $\sin$ sur $[0; 1]$, on

a $\forall x \in]0; 1]$, $\left| \int_x^1 h(t) dt \right| = - \int_x^1 h(t) dt \leq \int_x^1 \|h\|_{\infty, [0; 1]} dt = \|h\|_{\infty, [0; 1]}$ car h est continue sur le segment $[0; 1]$ donc elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes. Par conséquent, $f(x) = -\ln(x) + O(1)$ qui montre, comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, que $f(x) = -\ln(x) + o(\ln(x))$ donc que $f(x) \sim -\ln(x)$.

d. Pour $x > 0$, par inégalité triangulaire, il vient $|f(x)| = \left| \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \right| \leq \int_x^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^2} dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ donc $|f(x)| \leq \left[-\frac{1}{t} \right]_x^{+\infty} = \frac{1}{x}$ et on a bien $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

e. Dans l'expression de $f(x)$, on pose $u : t \mapsto -\cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t^2}$ qui sont de classe C^1 sur $[x; +\infty[$ et vérifient $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ donc $f(x) = \int_x^{+\infty} u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} u(t)v'(t) dt$ par intégration par parties d'où $f(x) = \frac{-\cos(x)}{x^2} - 2 \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^3} dt$. Or, comme avant, $\left| \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^3} dt \right| \leq \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{2x^2}$ donc, puisque $\frac{-\cos(x)}{x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^3} dt = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, par somme, on obtient $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

f. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ puisqu'elle y est de classe C^1 , $f(x) \sim -\ln(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc, par comparaison aux intégrales de RIEMANN, f est intégrable en 0^+ et en $+\infty$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

g. Dans l'expression de $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$, on pose $u : x \mapsto x$ et $v = f$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après a. et que $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x)$ d'après c. et e. et par croissances comparées car $u(x)v(x) \sim -x \ln(x)$ et $u(x)v(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi, par intégration par parties, comme on sait d'après f. que ces intégrales convergent, $I = \int_0^{+\infty} u'(x)v(x) dx = 0 - \int_0^{+\infty} u(x)v'(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = J$.

En supposant pouvoir intervertir les intégrales double avec le théorème de FUBINI, on trouve (mais sans preuve) $I = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \right) dx = \iint_{0 < x < t} g(t) dt dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t g(t) dx \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = J$. Il se trouve que cette intégrale, dite de DIRICHLET, a pour valeur $\frac{\pi}{2}$, mais c'est une autre histoire !

3.119 a. Pour $x \in D$, comme $x^2 - 2x \cos(\theta) + 1 = (x - \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta) = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}) = |x - e^{i\theta}|^2 > 0$

car $x \neq \pm 1$, la fonction $f_x : \theta \mapsto \ln(x^2 - 2x \cos(\theta) + 1)$ est continue sur le segment $[0; 2\pi]$ donc $I(x)$ existe.

b. Comme $X^2 - 2X \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1 = \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(X - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, et que les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ sont les n racines n -ièmes de l'unité, comme les $e^{-\frac{2ik\pi}{n}}$, on peut factoriser $P_n = (X^n - 1)^2$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons la somme de RIEMANN $R_n(x) = \frac{2\pi - 0}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_x\left(0 + \frac{k(2\pi - 0)}{n}\right)$ associée à la fonction f_x continue sur le segment $[0; 2\pi]$. D'après le cours, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = \int_0^{2\pi} f_x(\theta) d\theta$. Avec la question précédente,

$$R_n(x) = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left((x - e^{\frac{2ik\pi}{n}})(x - e^{-\frac{2ik\pi}{n}})\right) = \frac{2\pi}{n} \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} (x^2 - 2x \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + 1)\right) = \frac{4\pi}{n} \ln(|x^n - 1|).$$

• Si $|x| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4\pi}{n} \ln(|x^n - 1|) = 0 \times 0 = 0$. Ainsi, $I(x) = 0$.

• Si $|x| > 1$, on a $R_n(x) = \frac{4\pi}{n} \ln(|x|^n |1 - x^{-n}|) = 4\pi \ln(|x|) + \frac{4\pi}{n} \ln(|1 - x^{-n}|)$ donc $I(x) = 4\pi \ln(|x|)$.

3.120 Petit rappel ou pas : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $x^z = e^{(a+ib) \ln(x)} = e^a e^{ib \ln(x)} = x^a (\cos(b \ln(x)) + i \sin(b \ln(x)))$. Ainsi, $|x^z| = x^a = x^{\operatorname{Re}(z)} > 0$.

a. Si $\operatorname{Re}(s) > 1$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|\frac{1}{k^s}\right| = \frac{1}{k^{\operatorname{Re}(s)}}$ et la série de RIEMANN $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\operatorname{Re}(s)}}$ converge d'après le

cours donc la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^s}$ converge absolument donc elle converge, ce qui assure que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s} \right)_{N \geq 1}$ converge. De plus, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{N^{1-s}}{1-s} \right| = \frac{N^{1-\operatorname{Re}(s)}}{|1-s|} = \frac{1}{|1-s| N^{\operatorname{Re}(s)-1}}$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{|1-s| N^{\operatorname{Re}(s)-1}} = 0$ car $\operatorname{Re}(s) > 1$. Par différence de suites convergentes, la suite $(S_N(s))_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge, ce qui assure l'existence de $\zeta(s)$ (la fonction de RIEMANN définie dans le cours si $s > 1$ est réel).

b. Avec $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, la fonction $g_s : t \mapsto \frac{1}{[t]^s}$ est continue par morceaux sur le segment $[1; N+1]$ donc $\int_1^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt$ existe. Avec la relation de CHASLES, et comme g_s est constante sur l'intervalle $[k; k+1[$ et vaut $\frac{1}{k^s}$ pour $k \in \llbracket 1; N \rrbracket$, on a $\int_1^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \frac{1}{[t]^s} dt = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \frac{1}{k^s} dt = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s}$.

c. On suppose $a = \operatorname{Re}(s) > 0$ et on pose $b = \operatorname{Im}(s)$, la fonction $h_s : t \mapsto \frac{1}{t^s} - \frac{1}{[t]^s}$ est continue par morceaux sur $[1; +\infty[$ puisqu'elle l'est sur tout segment inclus dans $[1; +\infty[$. Pour $t \in [1; +\infty[$, il vient $h_s(t) = \frac{1}{t^{a+ib}} - \frac{1}{[t]^{a+ib}} = \frac{[t]^{a+ib} - t^{a+ib}}{t^{a+ib} [t]^{a+ib}}$ donc $|h_s(t)| = \frac{|[t]^a e^{ib \ln([t])} - t^a e^{ib \ln(t)}|}{t^a [t]^a}$ qu'on peut écrire $|h_s(t)| = \frac{|[t]^a e^{ib \ln(\frac{[t]}{t})} - t^a|}{t^a [t]^a} = \frac{|(\frac{[t]}{t})^a e^{ib \ln(\frac{[t]}{t})} - 1|}{[t]^a}$. De plus, par définition de la partie entière, pour un réel $t > 1$, on a $0 < t - 1 < [t] \leq t$ donc $[t] \underset{+\infty}{\sim} t$ d'où $[t]^a \underset{+\infty}{\sim} t^a$ et, en posant $\{t\} = t - [t] \in [0; 1[$ la partie fractionnaire de t , on a $\frac{[t]}{t} = \frac{t - \{t\}}{t} = 1 - y \underset{+\infty}{\sim} 1 + O\left(\frac{1}{t}\right)$ en notant $y = \frac{\{t\}}{t} \in [0; \frac{1}{t}[$ et $|h_s(t)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{|(\frac{[t]}{t})^a e^{ib \ln(\frac{[t]}{t})} - 1|}{t^a} = \frac{|(1-y)^a e^{ib \ln(1-y)} - 1|}{t^a}$ et on arrive à $|h_s(t)| \underset{+\infty}{=} \frac{|(1-ay + o(y))e^{ib(-y+o(y))} - 1|}{t^a} \underset{+\infty}{=} \frac{|(1-ay + o(y))(1-iby + o(y)) - 1|}{t^a} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{a+1}}\right)$. Alors, par critère de RIEMANN, h_s est intégrable sur $[1; +\infty[$ car $a+1 > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^s} - \frac{1}{[t]^s} \right) dt$ existe.

Si s était un réel différent de 1, on aurait directement $\frac{N^{1-s} - 1}{1-s} = \int_1^N t^{-s} dt = \left[\frac{t^{1-s}}{1-s} \right]_1^N$. Vérifions que cette relation est vraie même si s est complexe. Pour $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $f_z : t \mapsto t^z = t^\alpha e^{i\beta \ln(t)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et $\forall t > 0$, $f'_z(t) = \alpha t^{\alpha-1} e^{i\beta \ln(t)} + t^\alpha \left(\frac{i\beta}{t} \right) e^{i\beta \ln(t)} = \frac{\alpha + i\beta}{t} t^\alpha e^{i\beta \ln(t)}$ donc $f'_z(t) = z f_{z-1}(t)$ donc, par le théorème fondamental de l'intégration, en prenant $z = 1-s \in \mathbb{C}^*$, on obtient $\int_1^N t^{-s} dt = \int_1^N f_{z-1} dt = \left[\frac{f_z(t)}{z} \right]_1^N = \left[\frac{t^{1-s}}{1-s} \right]_1^N = \frac{N^{1-s} - 1}{1-s}$.

Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(s) = \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s} \right) - \frac{N^{1-s}}{1-s} = \int_1^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt - \int_1^N t^{-s} dt - \frac{1}{1-s}$ qui s'écrit aussi, par linéarité de l'intégrale et CHASLES, $S_N(s) = \int_N^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt + \int_1^N \left(\frac{1}{[t]^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt - \frac{1}{1-s}$.

Comme $\left| \int_N^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt \right| = \left| \int_N^{N+1} \frac{1}{N^s} dt \right| = \left| \frac{1}{N^s} \right| = \frac{1}{N^{\operatorname{Re}(s)}}$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_N^{N+1} \frac{1}{[t]^s} dt = 0$ car $\operatorname{Re}(s) > 0$ et, avec la convergence précédente, $(S_N(s))_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge donc $\zeta(s)$ existe et, comme $\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(s)$, on obtient la relation $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{[t]^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt$.

3.121 a. La fonction $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $g(t) = o(e^{-t})$ et l'intégrale de référence $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge. Ainsi, par comparaison, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge pour tout $x > 0$ ce qui montre que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par CHASLES, $\forall x > 0$, $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$. En posant $G : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$, la fonction G est la primitive de g qui s'annule en 1 par le théorème fondamental de l'intégration car g est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, comme $f = G(1) - G$, par opérations, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = -G'(x) = -g(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$.

b. Méthode 1 : pour $x > 0$, comme $\forall t \geq x$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$ donc $\frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{x}$ car $e^{-t} > 0$, par croissance de l'intégrale, on a $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt = \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{x} [-e^{-t}]_x^{+\infty} = \frac{e^{-x}}{x}$.

Méthode 2 : soit $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{e^{-x}}{x} - f(x)$. D'après **a.**, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + \frac{e^{-x}}{x} = -\frac{e^{-x}}{x^2} < 0$ donc g est décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ en tant que reste d'une intégrale convergente, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ donc g reste positive sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui montre que $\forall x > 0$, $f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.

c. Pour $x > 0$, on pose $u : t \mapsto e^{-t}$ et $v : t \mapsto \ln(t)$. Comme les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[x; +\infty[$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on obtient, par intégration par parties, la relation $f(x) = \int_x^{+\infty} u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} u'(t)v(t) dt = -e^{-x} \ln(x) + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.

d. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après **b.**, $f(x) = o(e^{-x})$ donc, comme en **a.**, f est intégrable en $+\infty$. Soit $h : t \mapsto e^{-t} \ln(t)$, la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h(t) = o(e^{-t/2})$ par croissances comparées donc h est intégrable en $+\infty$. De plus, $h(t) \underset{0}{\sim} \ln(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et l'intégrale de RIEMANN $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge donc, par comparaison, h est intégrable en 0^+ . Par conséquent, h est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, $\forall x > 0$, $\left| \int_x^{+\infty} h(t) dt \right| \leq \int_x^{+\infty} |h(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} |h(t)| dt$ ce qui montre que $x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit avec **c.** que $f(x) \underset{0}{=} -e^{-x} \ln(x) + O(1) \underset{0}{=} -e^{-x} \ln(x) + o(e^{-x} \ln(x))$ qui s'écrit aussi $f(x) \underset{0}{\sim} -e^{-x} \ln(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et f est donc intégrable en 0^+ . Ainsi, $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v = f$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)v(x) = 0$ car $u(x)v(x) = xf(x) \underset{0}{\sim} x \ln(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ par croissances comparées et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = 0$ car $0 \leq u(x)v(x) = xf(x) \leq e^{-x}$ avec la question **b.** et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ (encadrement). Ainsi, par intégration par parties, on obtient la valeur

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(x)v'(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1.$$

$$\text{Avec FUBINI (HP), } \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t \frac{e^{-t}}{t} dx \right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

3.5 Officiel de la Taupe

3.122 Toutes les fonctions sont intégrables car continues sur des segments. On utilise le changement de variables

$t = nx$ puis CHASLES puis le changement de variables $t = s + k$ avec la 1-périodicité de g pour avoir la relation $\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \frac{1}{n} \int_0^n f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f\left(\frac{t}{n}\right)g(t)dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 f\left(\frac{s+k}{n}\right)g(s)ds$.

Comme f est de classe C^1 , par le théorème des accroissements finis : $\forall (x, y) \in [0; 1]^2$, $|f(x) - f(y)| \leq M_1|x - y|$ avec $M_1 = \max_{[0;1]} |f'|$ car $|f'|$ est continue sur un segment donc y est bornée et y atteint ses bornes.

Donc f est bien M_1 -lipschitzienne sur le segment $[0; 1]$.

En utilisant la relation montrée précédemment et la linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 f(x)g(nx)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 f\left(\frac{k}{n}\right)g(s)ds = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left(f\left(\frac{s+k}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)g(s)ds$$

Comme f est M_1 -lipschitzienne sur $[0; 1]$ et comme g est bornée sur $[0; 1]$ car elle y est continue :

$$\left| \int_0^1 f(x)g(nx)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 f\left(\frac{k}{n}\right)g(s)ds \right| \leq \frac{M_1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 s|g(s)|ds = \frac{M_1}{n} \int_0^1 s|g(s)|ds \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$$

On prend $g = 1$: $\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 f\left(\frac{k}{n}\right)ds \right| = \left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$.

Pour la suite, il faut aller un cran plus loin dans le développement de $f\left(\frac{s+k}{n}\right)$.

Par TAYLOR reste intégral, on a $f\left(\frac{s+k}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{s}{n}f'\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{k/n}^{(s+k)/n} \left(\frac{s+k}{n} - u\right)f''(u)du$. Comme f est de classe C^2 , avec $M_2 = \max_{[0;1]} |f''|$: $\left| \int_{k/n}^{(s+k)/n} \left(\frac{s+k}{n} - u\right)f''(u)du \right| \leq \frac{M_2}{2} \left[-\left(\frac{s+k}{n} - u\right)^2 \right]_{k/n}^{(s+k)/n} = \frac{M_2 s^2}{2n^2}$.

On peut intégrer entre 0 et 1 l'inégalité trouvée : $\left| \int_0^1 \left(f\left(\frac{s+k}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{s}{n}f'\left(\frac{k}{n}\right)\right)ds \right| \leq \int_0^1 \frac{M_2 s^2}{2n^2}ds = \frac{M_2}{6n^2}$.

Or : $\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left(f\left(\frac{s+k}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{s}{n}f'\left(\frac{k}{n}\right)\right)ds = n \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right)$ donc grâce à l'inégalité précédente, $\left| n \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$ qui tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Avec les sommes de RIEMANN, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)dt = \frac{f(1) - f(0)}{2}$ car f' continue sur $[0; 1]$.

Au final, on a bien : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \frac{f(1) - f(0)}{2}$.

3.123 La fonction $f_\alpha : x \mapsto \frac{x}{1 + x^\alpha (\sin(x^2))^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. La présence du x^2 dans le sin nous encourage

à simplifier cette étude en posant $x = \sqrt{t} = \varphi(t)$. En effet, φ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$; le théorème de changement de variable montre alors que $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ est de

même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{t}(1 + t^{\frac{\alpha}{2}}(\sin(t))^2)}dt$ ou encore, après simplification et multiplication par 2, que

l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_\alpha(t)dt$ avec $g_\alpha(t) = \frac{1}{1 + t^{\frac{\alpha}{2}} \sin^2(t)}$ et g_α est aussi continue sur $\mathbb{R}_+$.

On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $J_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+t^{\frac{\alpha}{2}} \sin^2(t)} dt$. On sait d'après le cours, puisque g_α est positive, que $\int_0^{+\infty} g_\alpha(t) dt$ a la même nature que la série numérique $\sum_{n \geq 0} J_n$.

On aurait très bien pu poser directement $I_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \frac{x}{1+x^\alpha \sin^2(x^2)} dx$ mais c'est plus lourd.

Pour $t \in [n\pi; (n+1)\pi]$, on a $(n\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \leq t^{\frac{\alpha}{2}} \leq ((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}}$ donc, par croissance de l'intégrale :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \sin^2(t)} dt \leq J_n \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+(n\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \sin^2(t)} dt.$$

Mais la fonction $\sin^2$ est π -périodique donc en posant $t = n\pi + u$ (facile à justifier), on trouve :

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \sin^2(u)} du \leq J_n \leq \int_0^\pi \frac{1}{1+(n\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \sin^2(u)} du.$$

Or, $\sin(\pi - t) = \sin(t)$, donc en posant $u = \pi - v$ dans $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{1}{1+((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \sin^2(u)} du$ par exemple, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{1}{1+((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \sin^2(u)} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \sin^2(v)} dv. \text{ Ainsi, on obtient l'encadrement}$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \sin^2(u)} du \leq J_n \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(n\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \sin^2(u)} du \quad (1).$$

Méthode 1 : on pose $u = \text{Arctan}(w) = \psi(w)$ (ou $w = \tan(u)$: BIOCHE) avec ψ qui est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et, pour $a > 0$ et car $\sin^2(u) = \frac{\tan^2(u)}{1+\tan^2(u)} = \frac{w^2}{1+w^2}$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a \sin^2(u)} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(1+a)w^2} dw = \left[\frac{1}{\sqrt{1+a}} \text{Arctan}(w\sqrt{1+a}) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}. \text{ Ainsi,}$$

$$u_n = \frac{\pi}{\sqrt{1+((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}} \leq J_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^{\frac{\alpha}{2}}}} = v_n.$$

Or $u_n \sim_{+\infty} \frac{\pi}{(n\pi)^{\frac{\alpha}{4}}} \sim_{+\infty} v_n$, ainsi, par le théorème des gendarmes, on a $J_n \sim_{+\infty} \frac{\pi}{(\pi)^{\frac{\alpha}{4}}} \times \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{4}}}$ et $\sum_{n \geq 0} J_n$, comme $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x) dx$, converge si et seulement si $\alpha > 4$ par RIEMANN.

Méthode 2 : on se débarrasse de $\sin$ dans l'encadrement (1) avec les inégalités classiques qui découlent de la concavité de la fonction $\sin$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: $\forall u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \frac{2u}{\pi} \leq \sin(u) \leq u$. Ainsi, avec $\lambda = \frac{2}{\pi}$:

$$a_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{2}} u^2} du \leq J_n \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(n\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \lambda^2 u^2} du = b_n.$$

On reconnaît à nouveau des primitives en Arctan , $a_n = 2 \left[\frac{1}{((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{4}}} \text{Arctan} \left(((n+1)\pi)^{\frac{\alpha}{4}} u \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{(n\pi)^{\frac{\alpha}{4}}}$

et $b_n = 2 \left[\frac{1}{\lambda(n\pi)^{\frac{\alpha}{4}}} \text{Arctan} \left(\lambda(n\pi)^{\frac{\alpha}{4}} u \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{\lambda(n\pi)^{\frac{\alpha}{4}}}$. On peut considérer deux cas, d'après RIEMANN :

- si $\alpha > 4$, $\sum_{n \geq 0} J_n$ converge donc l'intégrale I converge grâce à la majoration $J_n \leq b_n$.
- si $\alpha \leq 4$, $\sum_{n \geq 0} J_n$ diverge donc l'intégrale I diverge étant donnée la minoration $a_n \leq J_n$.

Toujours est-il que $\int_0^{+\infty} f_\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 4$.

3.124 D'abord, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On étudie f aux deux bornes de $\mathbb{R}_+^*$.

- Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} ((x+1)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}) = 1$, on obtient $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ par croissances comparées. Ainsi f est intégrable sur $]0; 1]$ avec RIEMANN (car $\frac{1}{2} < 1$).
 - $(x+1)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right) = x^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{1}{4x} - 1 + o\left(\frac{1}{x}\right) \right)$ donc $(x+1)^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}}$. Par conséquent, $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\ln(x)}{4x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{3}{4}}} = \frac{\ln(x)}{4x^{\frac{13}{12}}} = o\left(\frac{1}{x^{\frac{25}{24}}}\right)$ par croissances comparées donc f est intégrable sur $[1; +\infty[$ (car $\frac{25}{24} > 1$).
- Au final : f est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.125 a. Soit $\varphi : (x, t) \mapsto \frac{1}{\sqrt{(x^2 + t^2)(1 + t^2)}}$ définie sur $\mathbb{R}^* \times [0; 1]$. Si $x \neq 0$, $\varphi(x, \cdot)$ est continue sur $[0; 1]$ donc y est intégrable. Si $x = 0$, on a $\varphi(0, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t}$ donc $f(0)$ n'existe pas d'après RIEMANN.

Ainsi le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$ et f est strictement positive.

b. Comme f est clairement paire, on étudie sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit deux réels $0 < a < b$.

- Pour $t \in [0; 1]$, la fonction $\varphi(\cdot, t)$ est de classe C^1 par opérations.
- Pour $x > 0$, les fonctions $\varphi(x, \cdot)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \cdot)$ sont continues et intégrables sur $[0; 1]$.
- Pour $(x, t) \in [a; b] \times [0; 1]$, $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| = \left| \frac{-x}{\sqrt{1+t^2}(x^2+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \leq \frac{b}{\sqrt{1+t^2}(a^2+t^2)^{\frac{3}{2}}} = g(t)$.

Comme g est continue donc intégrable sur $[0; 1]$, par le théorème de LEIBNIZ, la fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = - \int_0^1 \frac{x dt}{\sqrt{1+t^2}(x^2+t^2)^{\frac{3}{2}}} < 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ceci justifie déjà l'existence

des limites (finies ou infinies) de f en 0^+ et en $+\infty$. De plus $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} = \left[\text{Argsh} \left(\frac{t}{x} \right) \right]_0^1 = \text{Argsh} \left(\frac{1}{x} \right)$.

c. • $\forall x > 0$, $f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Argsh} \left(\frac{1}{x} \right)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

• $\forall x > 0$, $f(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{x} \text{Argsh}(1)$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$.

• Comme $\text{Argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$, on a $\text{Argsh}(y) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(y)$ (après calculs). De plus, on peut encadrer

$$\left| f(x) - \text{Argsh} \left(\frac{1}{x} \right) \right| = \left| \int_0^1 \frac{\sqrt{1+t^2} - 1}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}} dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}} \times \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2} + 1} dt \right| \leq \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

avec des identités remarquables et des minoration comme $1+t^2 \geq 1$, $\sqrt{1+t^2} + 1 \geq 1$ et $\sqrt{x^2+t^2} \geq t$.

Par conséquent $f(x) - \text{Argsh} \left(\frac{1}{x} \right) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} O(1)$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

• Quand x tend vers $+\infty$, le terme en t^2 à côté de x^2 ne compte plus, ce qui nous conduit à considérer :

$$\left| xf(x) - \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \right| = \left| \int_0^1 \frac{\sqrt{x^2+t^2} - x}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)}} dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{(x^2+t^2)(1+t^2)(\sqrt{x^2+t^2} + x)}} dt \right| \text{ donc, en}$$

posant $I = \text{Argsh}(1) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} : |xf(x) - I| \leq \frac{1}{2x^2} \int_0^1 t^2 dt : f(x) - \frac{I}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{=} O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{I}{x}$.

3.126 Il est clair que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$.

Soit $f \in F$ telle que $\exists g \in G$, $f = g''$, alors il suffit de calculer $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g''(x) dx = g'(b) - g'(a) = 0$ et $\int_a^b xf(x) dx = [xg'(x)]_a^b - \int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a) = 0$ donc $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b xf(x) dx$.

Réciproquement, supposons que $f \in F$ et $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b xf(x) dx$, alors posons $g : x \mapsto \int_a^x \left(\int_a^t f(u) du \right) dt$.

Il est clair que g est deux fois dérivable et que $g'(x) = \int_a^x f(u)du$ et $g''(x) = f(x)$ avec $g(a) = 0$ et $g'(a) = 0$. Comme $\{(t, u) \mid a \leq u \leq t \leq x\}$ est un compact élémentaire (pour $x \in [a; b]$) pour lequel le théorème de FUBINI s'applique : $g(x) = \int_a^x \left(\int_u^x f(u)dt \right) du = \int_a^x (x - u)f(u)du = x \int_a^x f(u)du - \int_a^x uf(u)du$ (f est continue donc $(t, u) \mapsto f(u)$ aussi). Ainsi $g(b) = b \int_a^b f(u)du - \int_a^b uf(u)du = 0$ par hypothèse et $g'(b) = \int_a^b f(u)du = 0$.

L'équivalence de l'énoncé est donc établie.

Supposons l'existence de $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h(x) = u + vx$ (h affine) alors, pour une fonction $g \in G$, il vient $\int_a^b h(x)g''(x)dx = \int_a^b (u + vx)g''(x)dx = 0$ (calcul comme précédemment).

Réciproquement, si $h \in F$ et $\forall g \in G, \int_a^b h(x)g''(x)dx = 0$, alors l'existence de u et v vérifiant les deux conditions de l'énoncé provient du fait que le système linéaire associé est de CRAMER (matrice de HILBERT)

car il équivaut à $(b-a)u + \frac{(b-a)^2}{2}v = \int_a^b h(x)dx$ et $\frac{(b-a)^2}{2}u + \frac{(b-a)^3}{3}v = \int_a^b xh(x)dx$ or $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \neq 0$.

Avec ces valeurs de u et v (uniques mais dont les expressions en fonction de h importent peu), on déduit d'après la première partie de cet exercice qu'il existe $g \in G$ telle que $\forall x \in [a; b], h(x) - u - vx = g''(x)$.

En prenant cette fonction g dans l'hypothèse : $\int_a^b (u + vx + g''(x))g''(x)dx = 0$ mais on sait que l'on a $\int_a^b (u + vx)g''(x)dx = 0$ donc $\int_a^b g''(x)^2 dx = 0$. Comme g''^2 est continue et positive, ceci implique que $g'' = 0$ sur $[a; b]$ donc que g est affine et puisque $g \in G$, on en déduit que $g = 0$. Ainsi : $\forall x \in [a; b], h(x) = u + vx$ et h est bien affine.

On vient de montrer pour $h \in F$ que : $(h \text{ affine}) \iff (\forall g \in G, \int_a^b hg'' = 0)$.

3.127 • Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $(E_0) : y' - y = 0$ associée à (E) sont les $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $y(x) = \lambda e^x$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$). On cherche une solution particulière de (E) par variation de la constante, avec $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $y(x) = \lambda(x)e^x$ et, en reportant, $\lambda'(x)e^x = f(x)$, soit $\lambda(x) = \int_0^x e^{-t}f(t)dt$. En prenant pour λ la primitive de $x \mapsto e^{-x}f(x)$ qui s'annule en 0, $\lambda(x) = \int_0^x e^{-t}f(t)dt$, ce qui montre que $x \mapsto e^x \int_0^x e^{-t}f(t)dt$ est solution particulière de (E) . Par structure affine des solutions de (E) , les solutions de (E) sont les $F_C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $F_C : x \mapsto Ce^x + e^x \int_0^x e^{-t}f(t)dt = e^x \left(C + \int_0^x e^{-t}f(t)dt \right)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

• Pour l'existence, il semble logique de prendre la constante C qui rend petite la quantité $C + \int_0^x e^{-t}f(t)dt$ quand x tend vers $+\infty$. Tout d'abord, comme $\forall t \in \mathbb{R}_+, |e^{-t}f(t)| \leq |f(t)|$ et que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto e^{-t}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison donc $\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$ converge et on pose donc $C_0 = -\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, F_{C_0}(x) = -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$ par CHASLES. Vérifions que F_{C_0} est bornée sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $\forall t \in [x; +\infty[, |e^{-t}f(t)| \leq e^{-x}|f(t)|$, on obtient la majoration $|F_{C_0}(x)| = e^x \left| \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt \right| \leq e^x \int_x^{+\infty} |f(t)|e^{-t}dt \leq \int_x^{+\infty} |f(t)|dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f|$ donc F_{C_0} est bornée sur $\mathbb{R}$. Définissons donc $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = F_{C_0}(x) = -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$. Cette fonction F est solution de (E) et elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

• Les solutions de (E) sont donc aussi les $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $y(x) = F(x) + \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \neq 0$, comme F est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda e^x = \pm\infty$, la fonction y n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

• En conclusion, il existe donc une unique solution F de (E) bornée sur $\mathbb{R}$ et il s'agit de la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

définie par $F(x) = -e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$.

• On veut maintenant montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}$, or on dispose de la majoration établie précédemment $\forall x \in \mathbb{R}, |F(x)| \leq G(x) = e^x \int_x^{+\infty} |f(t)| e^{-t} dt$, ce qui nous conduit à nous intéresser à l'intégrabilité de G .

Or, en écrivant, $G(x) = e^x \left(\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-t} dt - \int_0^x |f(t)| e^{-t} dt \right)$, comme $t \mapsto |f(t)| e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'intégration, G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $G'(x) = G(x) - e^x |f(x)| e^{-x}$ donc $G' = G - |f|$. Par conséquent, G est une primitive de $G - |f|$, ce qui montre que $\int_{-\infty}^{+\infty} (G - |f|)$ converge si et seulement si G admet des limites finies en $\pm\infty$.

• Pour $x \in \mathbb{R}$, on a vu ci-dessus que $G(x) \leq \int_x^{+\infty} |f(t)| dt$ donc, comme $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ converge, on sait d'après le cours que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} |f(t)| dt = 0$ (reste). Par encadrement, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$.

• Soit $\varepsilon > 0$, comme $\int_{-\infty}^0 |f|$ converge, il existe $A \in \mathbb{R}_-$ tel que $\int_{-\infty}^A |f| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit un réel $x \leq A$, comme on a $G(x) = \left| e^x \int_x^A e^{-t} f(t) dt + e^x \int_A^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right| \leq e^x \left| \int_x^A e^{-t} f(t) dt \right| + e^x \left| \int_A^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right|$ par CHASLES et inégalité triangulaire. Alors, par inégalité de la moyenne, comme $\forall t \in [x; A], e^{-t} \leq e^{-x}$ et $\forall t \geq A, e^{-t} \leq e^{-A}$, on obtient $G(x) \leq \int_x^A |f(t)| dt + e^{x-A} \int_A^{+\infty} |f(t)| dt$. Or $[x; A] \subset]-\infty; A]$ et $|f|$ positive donc $0 \leq G(x) \leq \int_{-\infty}^A |f(t)| dt + e^{x-A} \int_A^{+\infty} |f(t)| dt$. Mais $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-A} \int_A^{+\infty} |f(t)| dt = 0$ donc il existe $B \leq A$ tel que $\forall x \leq B, e^{x-A} \int_A^{+\infty} |f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, $\forall x \leq B, G(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Enfin, $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$.

• Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} (G - |f|)$ converge avec ce qui précède donc, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} |f|$ converge par hypothèse, on en déduit la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} G$ ce qui équivaut, puisque G est positive, à l'intégrabilité de G sur $\mathbb{R}$. Par théorème de comparaison, comme $0 \leq |F| \leq G$, la fonction F est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$.

• Par construction, $F + f = F'$ car F est solution de (E) donc, comme avant, F est une primitive de $F + f$. Or $F + f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ par somme avec ce qui précède donc $\int_{-\infty}^{+\infty} (F + f) = [F]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$. Puisque $0 \leq |F| \leq G$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$. Par conséquent, $\int_{-\infty}^{+\infty} (F + f) = 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} F = - \int_{-\infty}^{+\infty} f$.

3.128 a. d est dérivable par opérations, $d'(t) = 1 - \sin(t) \geq 0$ et d' ne s'annule qu'en les $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; ainsi d est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $d(0) = 1$, on a bien d strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

Comme d est strictement croissante et positive, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par croissance de l'intégrale, si $x > 0$, on a $\frac{1}{x} \int_0^x f(x) dt \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(0) dt$ donc $f(x) \leq g(x) \leq f(0)$ et on conclut que $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = f(0) = 1$ par encadrement puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ par continuité de f en 0.

b. Soit $x > 0$, par intégration par parties en posant $u : x \mapsto g^2(x)$ et $v : x \mapsto x$, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x g^2(x) = 0$ d'après la question a., u et v étant de classe C^1 sur $]0; x]$, et puisque $g'(t) = \frac{f(t) - g(t)}{t}$ par calculs, on obtient

$\int_0^x g(t)^2 dt = [tg(t)^2]_0^x - \int_0^x 2tg(t)g'(t) dt = xg(x)^2 - \int_0^x 2tg(t) \frac{f(t) - g(t)}{t} dt = xg(x)^2 - \int_0^x 2g(t)(f(t) - g(t)) dt$ ce qui, en développant, devient la relation de l'énoncé : $\int_0^x g(t)^2 dt = 2 \int_0^x f(t)g(t) dt - xg(x)^2$.

c. • Pour $t \geq 2$, comme $d(t) \geq t - 1$, on a $f(t) \leq \frac{1}{t-1}$ et on en déduit que $g(x) = O\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$ car on a la majoration $g(x) \leq \frac{1}{x} \left(\int_0^2 f(t) dt + \int_2^x \frac{1}{t-1} dt \right) = \frac{1}{x} \left(\int_0^2 f(t) dt + \ln(x-1) \right) \leq \frac{\ln(x) + A}{x}$ pour $x \geq 2$ en

posant $A = \int_0^2 f(t)dt$. Ainsi : $xg(x)^2 = O\left(\frac{\ln(x)^2}{x}\right)$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} xg(x)^2 = 0$ par croissances comparées.

• Comme $d(t) \underset{+\infty}{\sim} t$, $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$. Mais $g(t) = O\left(\frac{\ln(t)^2}{t}\right)$ d'après ce qui précède. Par croissances comparées, $f(t)g(t) = O\left(\frac{\ln(t)^2}{t^2}\right) = o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ donc fg intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par RIEMANN ($\frac{3}{2} > 1$) : $\int_0^{+\infty} fg$ converge.

On en déduit donc que $x \mapsto 2 \int_0^x f(t)g(t)dt - xg(x)^2$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \int_0^x f(t)g(t)dt - xg(x)^2\right) = 2 \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$. Or g^2 est positive donc la convergence de $\int_0^{+\infty} g^2$, qu'on vient d'établir, montre l'intégrabilité de g^2 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$.

3.129 a. On calcule $f''(x) + 4\pi^2 f(x) = -8\pi^2 \sin(2\pi x\sqrt{2}) + 4\pi^2 \sin(2\pi x\sqrt{2}) = -4\pi^2 \sin(2\pi x\sqrt{2})$. S'il existait une période $T > 0$ de f , alors f'' serait aussi T -périodique donc $g : x \mapsto \sin(2\pi x\sqrt{2})$ le serait aussi d'après l'équation et $h : x \mapsto \sin(2\pi x)$ le serait encore par différence. Or les périodes de g sont les éléments de $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{Z}$ et celles de h sont les éléments de $\mathbb{Z}$. Comme $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$ car $\sqrt{2}$ est irrationnel, on aboutit à une contradiction.

Par conséquent : f n'est pas périodique.

b. Soit $q > 0$, posons $p = \lfloor q\sqrt{2} \rfloor + 1$, alors par définition de la partie entière : $p \leq q\sqrt{2} + 1 < p + 1$ mais $q \neq 0$ et $\sqrt{2}$ est irrationnel donc $p \neq q\sqrt{2} + 1$. Ainsi, on a bien $0 < p - q\sqrt{2} < 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour chaque $q \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $p_q \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < x_q = p_q - q\sqrt{2} < 1$ d'après ce qui précède. Les n réels $x_1, \dots, x_n$ sont dans l'intervalle $]0; 1[$ donc (par l'absurde), il en existe deux d'indices différents dont la distance relative est inférieure à $\frac{1}{n}$. Ainsi, il existe deux entiers $1 \leq q_1 < q_2 \leq n$ tels

que $|x_{q_1} - x_{q_2}| < \frac{1}{n}$ ce qui implique $|p_{q_1} - q_1\sqrt{2} - p_{q_2} - q_2\sqrt{2}| < \frac{1}{n}$ et on a bien $|p - q\sqrt{2}| < \frac{1}{n}$ avec $p = p_{q_1} - p_{q_2}$ et $q = q_1 - q_2 \in \mathbb{N}^*$. De plus $p \in \mathbb{N}^*$ car $|p - q\sqrt{2}| < 1$ et $q\sqrt{2} \geq \sqrt{2} > 1$.

c. Avec n tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, on construit $(p_1, q_1) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $|p_1 - q_1\sqrt{2}| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ d'après la question **b.**

Supposons r couples distincts $((p_k, q_k))_{1 \leq k \leq r}$ construits tels que $\forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $|p_k - q_k\sqrt{2}| < \varepsilon$. Alors prenons un entier n tel que $\forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $|p_k - q_k\sqrt{2}| > \frac{1}{n}$ et utilisons la question **b.** pour construire un nouveau couple $(p_{k+1}, q_{k+1}) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $|p_{k+1} - q_{k+1}\sqrt{2}| < \frac{1}{n} < |p_1 - q_1\sqrt{2}| < \varepsilon$.

Par récurrence, on construit ainsi une infinité de couples distincts deux à deux et vérifiant la condition.

d. ????

e. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et ℓ' associé à $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2\pi}$ dans la question précédente. Posons alors $\ell = \ell' + 1$. Soit $a > 0$

et $n = \lfloor a \rfloor + 1$. Alors par construction $[n; n + \ell'] \subset [a; a + \ell]$. Prenons alors un entier $q \in \mathbb{N}_{\varepsilon'}$ et posons $r = q$. Alors $r \in [a; a + \ell]$ et il existe un entier p tel que $|p - q\sqrt{2}| < \varepsilon'$. Pour tout réel x , on a donc $|f(x + r) - f(x)| = |\sin(2\pi(x + q)\sqrt{2}) + \sin(2\pi(x + q)) - \sin(2\pi x\sqrt{2}) + \sin(2\pi x)|$ donc par 2π -périodicité de $\sin$: $|f(x + r) - f(x)| = |\sin(2\pi(x\sqrt{2} + q\sqrt{2} - p)) - \sin(2\pi x\sqrt{2})| \leq 2\pi|p - q\sqrt{2}|$ car $\sin$ est 1-lipschitzienne. Enfin, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x + r) - f(x)| \leq 2\pi\varepsilon' = \varepsilon$.

3.130 a. ($\Rightarrow$) Supposons Φ croissante et soit P une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, on sait qu'elle admet alors une borne inférieure α . Soit $y \in \Phi(P)$, alors il existe $x \in P$ tel que $y = \Phi(x)$. Or $x \in P$ donc $\alpha \leq x$ et comme Φ est croissante, on a $\Phi(\alpha) \leq y = \Phi(x)$. Par conséquent $\Phi(\alpha)$ est un minorant de $\Phi(P)$ qui n'est pas vide. Comme la borne inférieure est le plus grand des minorants, on a $\Phi(\alpha) = \Phi(\inf(P)) \leq \inf(\Phi(P))$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\forall P \in M$, $\Phi(\inf(P)) \leq \inf(\Phi(P))$. Soit x, y réels tels que $x < y$. Posons $P = \{x, y\}$. Alors $P \in M$ donc $\Phi(x) = \Phi(\inf(P)) \leq \inf(\Phi(P)) = \inf(\{\Phi(x), \Phi(y)\}) \leq \Phi(y)$. Φ est donc croissante.

b. ($\Rightarrow$) Supposons que Φ croît et est continue à droite, alors d'après **a.** on a $\forall P \in M, \Phi(\inf(P)) \leq \inf(\Phi(P))$.

Soit $P \in M$ et $\alpha = \inf(P)$, montrons que $\inf(\Phi(P)) \leq \Phi(\alpha)$. Pour $\varepsilon > 0$, comme Φ est continue à droite en α , il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]\alpha; \alpha + \eta[$, $\Phi(\alpha) \leq \Phi(x) \leq \Phi(\alpha) + \varepsilon$. Or puisque $\alpha = \inf(P)$, pour $\eta > 0$, il existe $x \in P$ tel que $\alpha \leq x < \alpha + \eta$ ce qui donne par croissance de Φ : $\Phi(\alpha) \leq \Phi(x) \leq \Phi(\alpha) + \varepsilon$. Et comme $\Phi(x) \in \Phi(P)$, on a $\inf(\Phi(P)) \leq \Phi(\alpha) + \varepsilon$. Mais ceci est vrai pour tout réel $\varepsilon > 0$ ce qui implique que $\inf(\Phi(P)) \leq \Phi(\alpha)$. Comme on avait déjà $\Phi(\inf(P)) \leq \inf(\Phi(P))$, on en déduit que $\Phi(\inf(P)) = \inf(\Phi(P))$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\forall P \in M, \Phi(\inf(P)) = \inf(\Phi(P))$, alors d'après la question **a.**, la fonction Φ est déjà croissante. Si Φ n'était pas continue à droite partout, il existerait un réel x tel que $\Phi(x) < \lim_{t \rightarrow x^+} \Phi(t) = \beta$.

On prendrait alors $P =]x; +\infty[\in M$ et on aurait $\Phi(x) = \Phi(\inf(P)) < \inf(\Phi(P)) = \beta$ contredisant l'hypothèse. Ainsi, Φ est croissante et continue à droite partout.

3.131 a. La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 car $\sin(t) \sim_0 t$ donc $f(t) \sim_0 \sqrt{t}$ qui tend vers 0. Posons $u(t) = 1 - \cos(t)$ et $v(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, alors u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u'(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t)$ donc les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{2t\sqrt{t}} dt$ sont de même nature. Comme $\left| \frac{1 - \cos(t)}{2t\sqrt{t}} \right| \leq \frac{1}{t^{3/2}}$, la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{2t\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (prolongeable par continuité en 0) donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$ converge.

b. D'après la question **a.**, la suite $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ converge en posant $(-1)^n u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$. On a donc $(-1)^n u_n = \int_0^\pi \frac{\sin(u + n\pi)}{\sqrt{u + n\pi}} du = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{\sqrt{u + n\pi}} du$ avec le changement de variable $t = u + n\pi$ d'où $u_n = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{\sqrt{u + n\pi}} du > 0$. Comme $u + n\pi < u + (n+1)\pi$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et $0 < u_n < \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{\sqrt{n\pi}} du = \frac{2}{\sqrt{n\pi}}$ qui tend vers 0. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ par encadrement et on en déduit avec le critère spécial des séries alternées que $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ converge (on le savait déjà) et que la somme A de cette série est du signe du premier terme u_0 donc $A > 0$.

3.132 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto e^{-t^2} e^{-tx}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, on a la relation $e^t f_x(t) = e^{-t^2 - tx + t} = e^{t(1-x+t)}$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t f_x(t) = 0$ d'où $f_x(t) = o(e^{-t})$ et comme $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f_x l'est aussi. Par conséquent le réel $f(x)$ est défini pour tout réel x .

b. Pour $x > 0$, comme $\forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq e^{-t^2} \leq 1$, on a $0 \leq f(t) \leq e^{-tx}$ et par croissance de l'intégrale : $0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$. Par théorème d'encadrement, on a facilement (trop !) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

3.133 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{t^x}{e^t - 1} = \frac{e^{x \ln(t)}}{e^t - 1}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $t^2 f_x(t) \sim_{+\infty} t^{x+2} e^{-t}$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f_x(t) = 0$ d'où $f_x(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ d'après RIEMANN, la fonction f_x l'est aussi. De plus, $f_x(t) \sim_0 t^{x-1}$ car $e^t - 1 \sim_0 t$. D'après RIEMANN, f_x est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $1 - x < 1 \iff x > 0$. Le réel $f(x)$ est défini si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+^*$.

b. Soit $x > 0$, alors $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} dt > \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$ car $\forall t > 0, 0 < e^t - 1 < e^t$. Mais on reconnaît cette intégrale, c'est la célèbre fonction gamma d'EULER ainsi $f(x) > \Gamma(x+1)$.

Or $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = \int_0^1 t^x e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^x e^{-t} dt = F(x) + G(x)$. Or $0 \leq F(x) \leq 1$ donc F est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ et G est croissante car $x \mapsto t^x$ est croissante si $t \geq 1$. Ainsi G admet une limite en $+\infty$. De plus,

$\Gamma(n+1) = F(n) + G(n) = n!$ (classique) donc $G(n) = n! - F(n) \geq n! - 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} G(n) = +\infty$ d'où l'on déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$. Ainsi : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3.134 a. • D'abord $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, f est continue en 0 donc $f(t) = O(1)$ et

$t^\alpha f(t) = O\left(\frac{1}{t^{-\alpha}}\right)$ avec $-\alpha < 1$ par hypothèse donc $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable sur $]0; 1]$. Comme, par hypothèse, $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, on en déduit que $t \mapsto t^\alpha f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\int_0^{+\infty} t^\alpha f(t) dt$ converge.

• Pour $x > 0$, par intégration par parties avec $u(t) = t^{\alpha+1}$ et $v(t) = f(t)$, comme u et v sont de classe C^1 sur $]0; x]$ et que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\alpha+1} f(t) = 0$ car $\alpha + 1 > 0$, ce qui précède garantit que les intégrales suivantes convergent et qu'on a $\int_0^x (\alpha + 1) t^\alpha f(t) dt = x^{\alpha+1} f(x) - \int_0^x t^{\alpha+1} f'(t) dt$. On ne pouvait pas tout de suite faire ceci sur $\mathbb{R}_+^*$ car on ne connaît rien de la limite (ni même de son existence) de $x \mapsto x^{\alpha+1} f'(x)$ en $+\infty$.

• Or $t \mapsto t^{\alpha+1} f'(t)$ est continue et négative sur $\mathbb{R}_+$ car $\alpha + 1 > 0$, donc on a par le théorème de la limite monotone l'alternative suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t^{\alpha+1} f'(t) dt = \ell \in \mathbb{R}_-$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x t^{\alpha+1} f'(t) dt = -\infty$.

• Comme $x^{\alpha+1} f(x) = \int_0^x (\alpha + 1) t^\alpha f(t) dt + \int_0^x t^{\alpha+1} f'(t) dt$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha+1} f(x) = (\alpha + 1) \int_0^{+\infty} t^\alpha f(t) dt + \ell = \ell'$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha+1} f(x) = -\infty$. Or f est positive donc on a forcément $\ell' \in \mathbb{R}_+$ dans le premier cas.

• Si on avait $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha+1} f(x) = -\infty$, on aurait $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1/x)}{x^{\alpha+1} f(x)} = 0$ qui se traduit par $\frac{1}{x} = o(x^{\alpha+1} f(x))$ or ceci est absurde par RIEMANN car $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge alors que $\int_1^{+\infty} x^{\alpha+1} f(x) dx$ converge d'après a..

• Si on avait $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha+1} f(x) = \ell' > 0$, alors $f(x) \sim \frac{\ell'}{x^{\alpha+1}}$ ce qui à nouveau absurde avec la question a..

• On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha+1} f(x) = 0$, ce qui montre l'intégrabilité de $t \mapsto t^{\alpha+1} f'(t)$ car $x \mapsto \int_0^x t^{\alpha+1} f'(t) dt$ admet une limite finie en $+\infty$ et que cette fonction est négative (de signe constant).

b. On reprend l'intégration par parties précédente avec toujours $u(t) = t^{\alpha+1}$ et $v(t) = f(t)$, comme u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'on sait maintenant que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\alpha+1} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha+1} f(t) = 0$, on a directement la relation attendue : $\int_0^{+\infty} t^{\alpha+1} f'(t) dt = -(\alpha + 1) \int_0^{+\infty} t^\alpha f(t) dt$.

3.135 a. Méthode 1 : Supposons $\int_0^1 f(t) dt = 0$, si f continue sur $[0; 1]$ ne s'annulait pas sur $]0; 1[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, f garderait un signe constant sur cet intervalle, par exemple positif. On aurait donc f positive, continue avec $\int_0^1 f(t) dt = 0$ et on sait qu'alors $f = 0$ sur $[0; 1]$ ce qui contredit l'hypothèse.

Ainsi on a bien l'implication suivante : $\int_0^1 f(t) dt = 0 \implies f$ s'annule au moins une fois sur $]0; 1[$.

Méthode 2 (directe) : Soit $F : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, alors F est de classe C^1 sur $[0; 1]$ et $F' = f$ d'après le théorème fondamental de l'intégration. De plus $F(0) = F(1) = 0$ avec l'hypothèse, alors avec le théorème de ROLLE, on a l'existence de $c \in]0; 1[$ tel que $F'(c) = f(c) = 0$.

b. Méthode 1 : Comme $\frac{1}{2} = \int_0^1 t dt$, on a $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \iff \int_0^1 (f(t) - t) dt = 0$. D'après question a., comme $g : t \mapsto f(t) - t$ est continue sur $[0; 1]$, $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \iff g$ s'annule au moins une fois sur $]0; 1[$. Or f admet en c un point fixe sur $]0; 1[$ si et seulement si $f(c) = c$, c'est-à-dire $g(c) = 0$. Par conséquent, on a bien l'implication suivante : $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \iff f$ admet au moins un point fixe sur $]0; 1[$.

Méthode 2 (directe) : Soit $G : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tdt = F(x) - \frac{x^2}{2}$. Alors G est de classe C^1 sur $[0; 1]$ et $G'(x) = F'(x) - x = f(x) - x$. De plus $G(0) = G(1) = 0$ par hypothèse donc, avec le théorème de ROLLE, il existe $c \in]0; 1[$ tel que $G'(c) = 0 = f(c) - c$.

3.136 • Si $f(0) > 0$, par continuité de f en 0, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [0; \alpha]$, $f(x) > \frac{f(0)}{2}$.

Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $f\left(\frac{k}{n^2}\right) > \frac{f(0)}{2}$ (dès que $\frac{1}{n_0} < \alpha$).

Alors $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq \frac{(n+1)f(0)}{2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

• De même, si $f(0) < 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

• Si $f(0) = 0$, par dérivabilité de f en 0 : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in [0; \alpha]$, $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) \right| \leq \varepsilon$. Ainsi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in [0; \alpha]$, $|f(x) - xf'(0)| \leq \varepsilon x$. Soit donc $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n_0} < \alpha$ associé à ε .

Alors $\forall n \geq n_0$, $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n} \leq \alpha$ donc $\left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right| \leq \frac{\varepsilon k}{n^2}$. On obtient donc, en notant

$$v_n = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2} f'(0), |u_n - v_n| = \left| \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right) \right| \leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0) \right| \leq \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon k}{n^2} = \frac{(n+1)\varepsilon}{2n} \leq \varepsilon.$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ et comme $v_n = \frac{(n+1)f'(0)}{2n}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{f'(0)}{2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{f'(0)}{2}$.

3.137 • Pour la première intégrale, on calcule $\frac{1}{x} \int_0^x \sin^2(t)dt = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{x} \left[\frac{2t - \sin(2t)}{4} \right]_0^x$ pour $x > 0$ donc $\frac{1}{x} \int_0^x \sin^2(t)dt = \frac{1}{2} - \frac{\sin(2x)}{4x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sin^2(t)dt = \frac{1}{2}$.

• L'exercice est plus général quand on constate que les fonctions $t \mapsto \sin^2(t)$ et $t \mapsto |\sin t|$ sont π -périodiques. Prenons donc une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, continue et T -périodique avec $T > 0$.

Soit $x > 0$, alors $x = n_x T + y_x$ avec $n_x = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$ et $y_x \in [0; T[$ car $n_x \leq \frac{x}{T} < n_x + 1 \iff n_x T \leq x < (n_x + 1)T$.

Cette double inégalité se transforme en $\frac{1}{T} - \frac{1}{x} \leq \frac{n_x}{x} \leq \frac{1}{T}$, donc, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n_x}{x} = \frac{1}{T}$.

On décompose $\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x} \left(\sum_{k=0}^{n_x-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt + \int_{n_x T}^x f(t)dt \right)$ par CHASLES. Or par T -périodicité de f ,

on a $\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$ donc $\frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n_x-1} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)dt = \frac{n_x}{x} \int_0^T f(t)dt$ qui tend donc vers $\frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$

quand x tend vers $+\infty$. Or $\left| \int_{n_x T}^x f(t)dt \right| \leq \int_{n_x T}^x |f(t)|dt \leq \int_0^T |f(t)|dt$ est borné : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_{n_x T}^x f(t)dt = 0$.

On en conclut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt$.

Comme $\int_0^\pi |\sin(t)|dt = \int_0^\pi \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^\pi = 2$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x |\sin(t)|dt = \frac{2}{\pi}$.

3.138 Comme Arctan est impaire et ch paire, $x \mapsto |\text{Arctan}(\text{sh } x)|$ et $x \mapsto \alpha + \beta \text{Arccos}\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)$ sont paires donc il suffit de trouver α et β qui conviennent sur $\mathbb{R}_+$. De plus, si la relation est vérifiée, en $x = 0$, cela donne $0 = \alpha$ et en prenant la limite en $+\infty$, on obtient $\frac{\pi}{2} = \beta \frac{\pi}{2}$ donc $\beta = 1$.

Il s'agit de prouver que : $\forall x \geq 0$, $g(x) = \text{Arctan}(\text{sh } x) - \text{Arccos}\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right) = 0$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car Arccos est dérivable sur $] -1; 1[$ et on a classiquement :

$\forall x > 0, g'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{1 + \text{sh}^2(x)} - \left(-\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{ch}^2(x)}}} \right)$. Comme $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$, on trouve en simplifiant que $g'(x) = 0$ donc que g est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = 0$. On en conclut que $\forall x \in \mathbb{R}, \left| \text{Arctan}(\text{sh}(x)) \right| = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)$.

3.139 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x) - \ln(1 - e^{-x})}{x} e^{-\alpha x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

• $\ln(x) - \ln(1 - e^{-x}) = -\ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right)$ or $\frac{1 - e^{-x}}{x} \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ par DL donc $\frac{\ln(x) - \ln(1 - e^{-x})}{x} \underset{0}{=} -\frac{1}{2} + o(1)$ et f se prolonge par continuité en 0 avec $f(0) = -\frac{1}{2}$. Ainsi f est intégrable sur $]0; 1]$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - e^{-x}) = 0$ donc $\ln(x) - \ln(1 - e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$ d'où $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x} e^{-\alpha x} \underset{+\infty}{=} o(e^{-\alpha x}) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ car $\alpha > 0$ et on conclut avec RIEMANN que f est intégrable sur $[1; +\infty[$.

Par conséquent $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x) - \ln(1 - e^{-x})}{x} e^{-\alpha x} dx$ existe pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

3.140 Si $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n : x \mapsto \ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) \cos(nx)$ et $g_n : x \mapsto \sin(nx) \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ sont continues sur $]0; \pi]$. De

plus $f_n(x) \underset{0}{\sim} \ln x \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ donc f_n est intégrable sur $]0; \pi]$ par RIEMANN. Enfin g_n se prolonge par continuité en 0 en posant $g_n(0) = 2n$ (car $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$) donc g_n est intégrable sur $[0; \pi]$.

Pour $n \geq 1$, on effectue une intégration par parties en posant $u(x) = \ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right)$ et $v(x) = \sin(nx)$, alors les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $]0; \pi]$ et $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées car $u(x)v(x) \underset{0}{\sim} nx \ln(x)$, de sorte que $nI_n = \int_0^\pi uv' = [uv]_0^\pi - \int_0^\pi u'v = -\frac{1}{2}J_n$.

De plus, $J_{n+1} = \int_0^\pi \sin((n+1)x) \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} dx$ or $\sin((n+1)x) - \sin(nx) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left((n+\frac{1}{2})x\right)$ ainsi on obtient $J_{n+1} = J_n + 2 \int_0^\pi \cos\left((n+\frac{1}{2})x\right) \cos \frac{x}{2} dx$. De plus, $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ donc $2 \int_0^\pi \cos\left((n+\frac{1}{2})x\right) \cos \frac{x}{2} dx = \int_0^\pi (\cos((n+1)x) + \cos(nx)) dx = 0$ si $n \geq 1$. Ainsi, $(J_n)_{n \geq 1}$ est constante et $J_1 = \int_0^\pi 2 \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int_0^\pi (1 + \cos x) dx = \pi$. Par conséquent : $J_0 = 0$ et $\forall n \geq 1, J_n = \pi$ et $I_n = -\frac{\pi}{2n}$.

La convergence des intégrales $\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx$ et $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$ se montre comme avant. De plus, le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$ transforme l'une en l'autre : $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx$.

Ainsi $I_0 = \int_0^\pi \ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) dx$, avec le changement de variable $x = 2u$: $I_0 = 2 \int_0^{\pi/2} \ln(2 \sin u) du = \pi \ln 2 + 2I$.

Puis $2I = I + I = \int_0^{\pi/2} (\ln(\cos x) + \ln(\sin x)) dx = \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(2x)) - \ln 2) dx = -\frac{\pi \ln 2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln(\sin t) dt$ (en ayant posé $x = \frac{t}{2}$). Mais comme $\sin(\pi - t) = \sin(t)$, on a $\int_0^\pi \ln(\sin t) dt = 2 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt = 2I$. Par conséquent $I = -\frac{\pi \ln 2}{2}$ (intégrales d'EULER). Enfin on arrive à $I_0 = 0$.

3.141 f étant continue sur le segment $[0; 1]$, elle est bornée et atteint ses bornes ; on pose $m = \min_{[a; b]} f = f(c) > 0$

et $M = \max_{[a; b]} f = f(d) > 0$ avec $(c, d) \in [a; b]^2$. Comme $\forall t \in [a; b], f(t) \leq M$, on a la majoration suivante

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(\int_0^1 f(t)^n dt \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_0^1 M^n dt \right)^{\frac{1}{n}} = M$. De plus, par continuité de f en d (l'un des réels en le(s)quel(s) f atteint son maximum) : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in [a; b] \cap [d - \alpha; d + \alpha], M - \varepsilon/2 \leq f(t) \leq M$. Soit $\delta = y - x > 0$ le diamètre de l'intervalle $[a; b] \cap [d - \alpha; d + \alpha] = [x; y]$. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il vient $u_n = \left(\int_0^1 f(t)^n dt \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_x^y f(t)^n dt \right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(M - \frac{\varepsilon}{2} \right) \delta^{\frac{1}{n}} = w_n$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = M - \frac{\varepsilon}{2}$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0, w_n \geq M - \varepsilon$. Conclusion : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, M - \varepsilon \leq w_n \leq u_n \leq M$. Ceci garantit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = M = \max_{[a; b]} f$.

3.142 Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto 1 - 2x \cos t + x^2 = \sin^2 t + (x - \cos t)^2 \geq 0$ est continue sur $]0; \pi[$. Elle ne peut s'y annuler car $\sin t > 0$ si $t \in]0; \pi[$ ainsi $g : t \mapsto \ln(1 - 2x \cos t + x^2)$ est continue sur $]0; \pi[$. De plus $\sin^2 t + (x - \cos t)^2 = 0 \iff ((t = 0 \text{ et } x = 1) \text{ ou } (t = \pi \text{ et } x = -1))$. Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}$ car :

- si $x \neq \pm 1$, g est même continue sur $[0; \pi]$ donc $f(x)$ existe.
- si $x = 1$, g est continue sur $]0; \pi]$, $g(t) = \ln(2) + \ln(1 - \cos t) \underset{0}{\sim} 2 \ln(t) \underset{0}{\sim} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$: g est intégrable sur $]0; \pi]$.
- si $x = -1$, g est continue sur $[0; \pi[$, $g(\pi - t) = \ln(2) + \ln(1 - \cos t) \underset{0}{\sim} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$: g est intégrable sur $[0; \pi[$.
- Avec le changement de variable $t = \pi - u$, on a $f(x) = f(-x)$ car la fonction $\cos$ vérifie $\cos(\pi - u) = -\cos(u)$.
- Si $x \neq 0$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^\pi \ln\left(\frac{1 - 2x \cos t + x^2}{x^2}\right) dt$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) - 2\pi \ln |x|$.
- $f(x) + f(-x) = \int_0^\pi (\ln(1 - 2x \cos t + x^2) + \ln(1 + 2x \cos t + x^2)) dt$. Un petit calcul montre que l'on a $(1 - 2x \cos t + x^2)(1 + 2x \cos t + x^2) = (1 + x^2)^2 - 4x^2 \cos^2(t) = x^4 - 2x^2 \cos(2t) + 1$. Donc, en effectuant le changement de variable $t = \frac{u}{2}$: $f(x) + f(-x) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \ln(x^4 - 2x^2 \cos u + 1) du$. Mais par 2π -périodicité et parité de $\cos$, on a $f(x) + f(-x) = f(x^2) = 2f(x)$.

On en déduit que $f(1) = 2f(1)$ donc $f(1) = 0$. On a simplement $f(0) = \int_0^\pi 0 = 0$.

Soit $x \in]0; 1[$, alors posons $u_n = x^{2^n}$ de sorte que $u_{n+1} = u_n^2$ et $f(u_{n+1}) = 2f(u_{n+1})$, puis, par récurrence : $f(u_n) = f(x^{2^n}) = 2^n f(x)$. Or f est bornée au voisinage de 0, en effet la fonction $g : K = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \times [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \ln(1 - 2x \cos t + x^2)$ est continue sur le compact (ou fermé borné mais il faut se méfier :-)) K donc elle est bornée (par M disons). Alors $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], f(x) = \int_0^\pi g(x, t) dt$ vérifie $|f(x)| \leq M$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x^{2^n})}{2^n} = 0 = f(x)$ car $\left| \frac{f(x^{2^n})}{2^n} \right| \leq \frac{M}{2^n}$. Si $x > 1$: $f(x) = 2 \ln x - f\left(\frac{1}{x}\right) = 2\pi \ln x$.

Enfin par parité de f : $\forall x \in [-1; 1], f(x) = 0$ et $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, f(x) = 2\pi \ln |x|$.

On peut aussi dériver $f(x)$ sous le signe somme, poser le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ qui s'impose avec les règles de BIOCHE et intégrer la fraction rationnelle qui en découle : légèrement hors programme.

3.143 Les solutions de $(E_0) : y' - y = 0$ sont les $y : t \mapsto \lambda e^t$ et par variation de la constante, les solutions de (E) sont

les $y : t \mapsto \lambda e^t + e^t \int_0^t f(u) e^{-u} du = \left(\lambda + \int_0^t f(u) e^{-u} du \right) e^t$. Or $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda + \int_0^t f(u) e^{-u} du = 0$ si et seulement si $\lambda = - \int_0^{+\infty} f(u) e^{-u} du$ qui existe car f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (même $\mathbb{R}$) et $\forall u \geq 0, |f(u) e^{-u}| \leq |f(u)|$.

Considérons donc $y_0 : t \mapsto \left(\int_0^t f(u) e^{-u} du - \int_0^{+\infty} f(u) e^{-u} du \right) e^t = - \int_t^{+\infty} f(u) e^{t-u} du$ la solution particulière. y_0 est bornée sur $\mathbb{R}$ car $\forall t \in \mathbb{R}, |y_0(t)| = \left| - \int_t^{+\infty} f(u) e^{t-u} du \right| \leq \int_t^{+\infty} |f(u)| du \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)| du$ puisque $\forall u \in [t; +\infty[, 0 < e^{t-u} \leq 1$. Les solutions de (E) sont donc, par structure, les $y : t \mapsto \alpha e^t + y_0(t)$

et les fonctions $t \mapsto \alpha e^t$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha = 0$ ainsi la seule solution de (E) qui soit bornée sur $\mathbb{R}$ est la fonction $h = y_0$.

Si $a > 0$, en intégrant $h = h' - f$: $\int_{-a}^a h(t) dt = h(a) - h(-a) - \int_{-a}^a f(t) e^t dt = h(a) - h(-a) - \int_{-a}^a f(t) dt$ (1).

On sait que $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$. On a déjà vu que $|h(t)| = |u(t)v(t)| \leq \int_t^{+\infty} |f(u)| du$ donc

$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$ (reste d'intégrale convergente). De plus $h(t) = -e^t \int_t^{+\infty} f(u) e^{-u} du$. Et en $-\infty$?

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, alors avec la relation de CHASLES, l'inégalité de la moyenne, on obtient l'inégalité suivante $\forall t \leq t_0$, $|h(t)| \leq \int_t^{t_0} |f(u)| e^{t-u} du + e^t \int_{t_0}^{+\infty} |f(u)| e^{-u} du$. Soit $\varepsilon > 0$ et t_0 tel que $\int_{-\infty}^{t_0} |f(u)| du \leq \frac{\varepsilon}{2}$, comme

$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$, $\exists t_1 \leq t_0$, $\forall t \leq t_1$, $0 \leq e^t \int_{t_0}^{+\infty} |f(u)| e^{-u} du \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $t \leq t_1$, comme $\forall u \in [t; t_0]$, $e^{t-u} \leq 1$:

$0 \leq \int_t^{t_0} |f(u)| e^{t-u} du \leq \int_t^{t_0} |f(u)| du \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, $\forall t \leq t_1$, $|h(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ et on arrive à

$\lim_{t \rightarrow -\infty} h(t) = 0$. Par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} h$ converge et, en passant à la limite quand a tend vers $+\infty$ dans la relation (1) : $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$.

On recommence, pour $a > 0$, $\int_{-a}^a |h(t)| dt \leq \int_{-a}^a G(t) e^t dt$ en notant $G(t) = - \int_t^{+\infty} |f(u)| e^{-u} du$ pour montrer que h est intégrable (à faire) en effectuant une IPP et en majorant comme ci-dessus.

3.144 $I(x)$ ne peut être défini que si $\sin(2\theta) > 0$ pour $\theta \in]0; \widetilde{x}[$ donc pour $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$. Si $f : \theta \mapsto \sqrt{\frac{1}{\sin(2\theta)} - 1}$,

alors f est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ (car $\sin(2\theta) \in]0; 1[$) et $f(\theta) \sim \frac{1}{\sqrt{\theta}}$ donc f est intégrable sur $]0; \frac{\pi}{4}[$. De même,

f est intégrable sur $]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$ car $f(\frac{\pi}{2} - \theta) = f(\theta)$. Ainsi, on peut définir $I(x)$ pour $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ en prolongeant

par continuité : $I(0) = 0$ (reste) et $I(\frac{\pi}{2}) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{\sin(2\theta)} - 1} d\theta$.

Soit $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $I(\frac{\pi}{2} - x) = \int_0^{\pi/2-x} \sqrt{\frac{1}{\sin(2\theta)} - 1} d\theta$; on pose $\theta = \frac{\pi}{2} - t$: $I(\frac{\pi}{2} - x) = \int_x^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{\sin(2t)} - 1} dt$

car $\sin(\pi - 2t) = \sin(2t)$. Par conséquent $I(\frac{\pi}{2} - x) + I(x) = I(\frac{\pi}{2})$ ce qui montre que le graphe de la fonction

I est symétrique par rapport au point $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2} I(\frac{\pi}{2}))$.

On sait que $\sin(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$ donc $I(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - 2 \tan \theta + \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}} d\theta$. Le changement

de variable $t = \tan \theta = \varphi(\theta)$ avec φ qui est bien de classe C^1 et bijective de $]0; x]$ dans $]0; \tan x]$, donne $I(x) = \int_0^{\tan(x)} \frac{|1-t| dt}{\sqrt{2t(1+t^2)}}$. Par la symétrie précédente, on peut se contenter de calculer $I(x)$ pour $x \in]0; \frac{\pi}{4}[$

et on a donc $I(x) = \int_0^{\tan(x)} \frac{(1-t) dt}{\sqrt{2t(1+t^2)}}$ car $\tan(x) \leq 1$. On pose $t = u^2$ et $I(x) = \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{\tan(x)}} \frac{(1-u^2) du}{(1+u^4)}$.

Comme $1 + X^4 = (1 + X^2)^2 - 2X^2 = (1 + \sqrt{2}X + X^2)(1 - \sqrt{2}X + X^2)$, on décompose la fraction en éléments simples $\frac{1-X^2}{1+X^4} = \frac{\sqrt{2}X+1}{2(1+\sqrt{2}X+X^2)} - \frac{\sqrt{2}X-1}{2(1-\sqrt{2}X+X^2)}$.

On reconnaît des logarithmes, il en découle la formule $\forall x \in]0; \frac{\pi}{4}[$, $I(x) = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{1+\sqrt{2}u+u^2}{1-\sqrt{2}u+u^2} \right) \right]_0^{\sqrt{\tan(x)}}$.

3.145 La fonction $f_n : x \mapsto \tan(x) - x$ est continue sur I_n , $\lim_{x \rightarrow (\frac{-\pi}{2} + n\pi)^+} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + n\pi)^-} f_n(x) = +\infty$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. De plus, $f'_n(x) = \tan^2(x) \geq 0$ et $f'_n(x)$ ne s'annule qu'en $x = n\pi$ donc f_n est

strictement croissante sur I_n ce qui prouve d'après le théorème de la bijection que f_n réalise une bijection de I_n sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f_n ne s'annule qu'une seule fois sur I_n , en un réel qu'on note $x_n \in I_n$.

Comme $x_n \in I_n$, $-\frac{\pi}{2} + n\pi \leq x_n \leq \frac{\pi}{2} + n\pi$ donc $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$. Si on pose $y_n = x_n - n\pi$ alors $y_n \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ donc $y_n \underset{+\infty}{=} O(1)$. De plus $\tan(y_n + n\pi) = x_n$ donc $\tan(y_n) = x_n \iff y_n = \text{Arctan}(x_n)$ car $\tan$ est π -périodique.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{\pi}{2}$. On peut donc écrire $y_n = \frac{\pi}{2} - z_n$ avec $z_n \in]0; \pi[$ et $z_n \underset{+\infty}{=} o(1)$.

À nouveau $\tan\left(\frac{\pi}{2} - z_n\right) = x_n = \frac{1}{\tan(z_n)}$ donc $z_n = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$ d'où $z_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$. Enfin, comme on a

$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$, on a $z_n = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right) \underset{+\infty}{=} \text{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$ ce

qui donne $z_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ avec le $DL_2(0)$ de Arctan qui s'écrit $\text{Arctan}(x) \underset{0}{=} x + o(x^2)$. On en déduit

le développement asymptotique avec une précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ souhaité : $x_n \underset{+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

3.146 Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$. f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'_n(x) = 5x^4 + n$ donc f'_n est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui garantit l'injectivité de f_n sur $\mathbb{R}_+$. Comme f_n est strictement négative sur $\mathbb{R}_-$, que $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = n \geq 0$, il existe par le TVI un unique réel $u_n \in]0; 1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$. Ceci garantit bien l'existence et l'unicité de cette suite.

Or $\forall x \in [0; 1]$, $f_{n+1}(x) = x^5 + (n+1)x - 1 \geq x^5 + nx - 1$. Alors $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 = f_n(u_n) \geq f_n(u_{n+1})$ mais comme f_n est strictement croissante sur $[0; 1]$, cela implique que $u_n \geq u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers $\ell \in [0; 1]$.

Or $\forall n \geq 1$, $\frac{u_n^5}{n} + u_n - \frac{1}{n} = 0$ ce qui donne en passant à la limite $0 + \ell - 0 = 0$ donc $\ell = 0$.

Pour $n > 0$, on a $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5} > 0$ donc $u_n \in]0; \frac{1}{n}[$ et on a donc $u_n \underset{+\infty}{=} o(1)$: ceci montre aussi que la limite de la suite est nulle mais sans la décroissance.

Ainsi $u_n^5 \underset{+\infty}{=} o(1)$ donc $u_n - \frac{1}{n} = -\frac{u_n^5}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^6}$ ce qui donne $u_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$ qui est le développement asymptotique à deux termes cherché.

3.147 La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur chaque segment $\left[\frac{1}{x}; x\right]$ pour $x \neq 0$. La fonction Φ est donc bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

Soit $F : x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ la primitive (de classe C^1) de f qui s'annule en 1. On a $\forall x > 0$, $\Phi(x) = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$

(par CHASLES) donc Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations. De même, si on note $G : x \mapsto \int_{-1}^x f(t)dt$ la primitive de f qui s'annule en -1 : $\forall x < 0$, $\Phi(x) = G(x) - G\left(\frac{1}{x}\right)$ donc Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$.

Par conséquent, Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $x \neq 0$, effectuons le changement de variable $t = -u$ (assez facile à justifier) dans $\Phi(x)$, on a donc $\Phi(x) = \int_{-1/x}^{-x} e^{-(-u)^2}(-1)du = -\Phi(-x)$: Φ est donc impaire.

Si $x > 0$, comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car elle y est continue et $e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} f(t)dt$.

De même, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et que F est continue en 0, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = F(0) = -\int_0^1 f(t)dt$. Comme

$\Phi(x) = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de GAUSS).

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = \int_{+\infty}^0 e^{-t^2} dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et Φ est impaire : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \Phi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc Φ n'est pas prolongeable par continuité en 0. Comme $f > 0$, $\forall x \in]0; 1]$, $\frac{1}{x} \geq x \implies \Phi(x) \leq 0$ et $\forall x \in [1; +\infty[$, $\frac{1}{x} \leq x \implies \Phi(x) \geq 0$.

3.148 Même si ce n'est pas dit dans l'énoncé, on suppose a positif.

On écrit TAYLOR reste intégral : $\forall t \in [0; a]$, $f(t) = f(0) + tf'(0) + \int_0^t (t-u)f''(u)du = \int_0^t (t-u)f''(u)du$.

De plus, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ : $\int_0^a |f(t)f''(t)|dt \leq \sqrt{\int_0^a f^2(t)dt} \sqrt{\int_0^a f''^2(t)dt}$.

Comme f est continue sur le segment $[0; a]$, f y est bornée et y atteint ses bornes donc il existe $c \in [0; a]$ tel que $|f(c)| = \sup_{t \in [0; a]} |f(t)|$. Or $f(c)^2 = \left(\int_0^c (c-u)f''(u)du \right)^2 \leq \int_0^c (c-u)^2 du \int_0^c f''^2(u)du \leq \frac{c^3}{3} \int_0^c f''^2(u)du$ donc $\int_0^a f^2(t)dt \leq af(c)^2 \leq \frac{a^4}{3} \int_0^a f''^2(u)du$ car $c \leq a$. Mais on ne trouve que $\int_0^a |f(t)f''(t)|dt \leq \frac{a^2}{\sqrt{3}} \int_0^a f''^2(t)dt$.

La bonne méthode était la suivante : comme $f(0) = 0$, on a $f(t) = \int_0^t f'(u)du$ et on majore avec l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ : $f^2(t) = \left(\int_0^t 1 \cdot f'(u)du \right)^2 \leq \int_0^t 1 du \int_0^t f'^2(u)du = t \int_0^t f'^2(u)du \leq t \int_0^a f'^2(u)du$.

En intégrant entre 0 et a : $\int_0^a f^2(t)dt \leq \int_0^a f'^2(u)du \int_0^a t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^a f'^2(u)du$.

Comme $f'(0) = 0$, il vient $f'(t) = \int_0^t f''(u)du$, et on obtient de même $\int_0^a f'^2(t)dt \leq \frac{a^2}{2} \int_0^a f''^2(u)du$.

Enfin, $\left(\int_0^a |f(t)f''(t)|dt \right)^2 \leq \int_0^a f^2(t)dt \int_0^a f''^2(t)dt \leq \frac{a^4}{4} \left(\int_0^a f''^2(t)dt \right)^2$ et on passe à la racine.

On a égalité dans cette inégalité si les trois inégalités de CAUCHY-SCHWARZ et $\int_0^t f'^2(u)du \leq \int_0^a f'^2(u)du$ sont des égalités, c'est-à-dire si $a = 0$ ou si f est constante. On ne sait donc pas si cette inégalité est optimale.

3.149 a. G est bien définie car $t \mapsto |x-t|g(t)$ est continue sur le segment $[0; 1]$ pour tout $x \in [0; 1]$. Pour justifier

la régularité de G , on écrit $G(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x-t|g(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)g(t)dt + \frac{1}{2} \int_x^1 (t-x)g(t)dt$ par CHASLES car $|x-t| = x-t$ si $t \in [0; x]$ et $|x-t| = t-x$ si $t \in [x; 1]$. On en déduit par linéarité de l'intégrale que $G(x) = \frac{x}{2} \int_0^x g(t)dt - \frac{1}{2} \int_0^x tg(t)dt + \frac{1}{2} \int_x^1 tg(t)dt - \frac{x}{2} \int_x^1 g(t)dt$. Comme les fonctions $t \mapsto g(t)$ et $t \mapsto tg(t)$ sont continues sur $[0; 1]$, le théorème fondamental de l'intégration montre que G est de classe C^1 sur $[0; 1]$ avec $G'(x) = \frac{1}{2} \int_0^x g(t)dt + \frac{x}{2}g(x) - \frac{xg(x)}{2} - \frac{xg(x)}{2} - \frac{1}{2} \int_x^1 g(t)dt + \frac{x}{2}g(x) = \frac{1}{2} \int_0^x g(t)dt - \frac{1}{2} \int_x^1 g(t)dt$. Sous cette forme, G' est aussi de classe C^1 car g est continue, donc G est de classe C^2 , avec $G''(x) = \frac{g(x)}{2} + \frac{g(x)}{2} = g(x)$.

b. Si on pose $f(x) = G(x) + ax + b$, alors $f(0) = G(0) + b$ donc $f(0) = 0 \iff b = -G(0)$. De plus $f(1) = G(1) + a + b$ d'où $f(1) = 0 \iff a = -b - G(1) = G(0) - G(1)$. Par conséquent la fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = G(x) - (G(1) - G(0))x - G(0)$ vérifie bien $f(0) = f(1) = 0$ et $f'' = G'' = g$.

c. Si $h : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie aussi h de classe C^2 sur $[0; 1]$, $h'' = g$ et $h(0) = h(1) = 0$, alors $f'' - h'' = (f-h)'' = 0$ ce qui prouve, comme $[0; 1]$ est un intervalle, que $(f-h)'$ est constante puis que $f-h$ est affine. Or $(f-h)(0) = 0 - 0 = 0$ et $(f-h)(1) = 0 - 0 = 0$. Ainsi, la fonction affine $f-h$ s'annulant en deux points distincts, on a $f-h = 0$ donc $h = f$.

Conclusion : il existe une unique $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f'' = g$, $f(0) = f(1) = 0$ et on a $f(x) = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 |x-t|g(t)dt - \left(\int_0^1 (1-t)g(t)dt - \int_0^1 tg(t)dt \right)x - \int_0^1 tg(t)dt \right) = \int_0^1 \frac{|x-t| - x + 2tx - t}{2} g(t)dt$.

3.150 Pour $n = 0$, $(e^{-x^2})^{(0)} = e^{-x^2} = P_0(x)e^{-x^2}$ avec $P_0 = 1$. Si, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $(e^{-x^2})^{(n)} = P_n(x)e^{-x^2}$, alors

$(e^{-x^2})^{(n+1)} = (P_n(x)e^{-x^2})' = P_n'(x)e^{-x^2} - 2xP_n(x)e^{-x^2} = P_{n+1}(x)e^{-x^2}$ en posant $P_{n+1} = P_n'(x) - 2xP_n(x)$ qui est bien polynomiale.

On conclut par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(e^{-x^2})^{(n)} = P_n(x)e^{-x^2}$. Par récurrence avec $P_{n+1} = P_n'(x) - 2xP_n(x)$, on montre que P_n est de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$.

On se rappelle de la valeur de l'intégrale de GAUSS : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{2\pi}$.

Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $P_n P_m$ est un polynôme (de degré d) donc $P_n(x)P_m(x)e^{-x^2} = O(x^d e^{-x^2}) = O(e^{-x^2})$ ainsi $x \mapsto P_n(x)P_m(x)e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Même chose sur $\mathbb{R}_-$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)P_m(x)e^{-x^2} dx$ converge bien.

Si $m \geq 1$, $u(x) = P_n(x)$ et $v(x) = P_m(x)e^{-x^2} = (e^{-x^2})^{(m)}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x)v(x) = 0$ et u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)P_m(x)e^{-x^2} dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} P_n'(x)(e^{-x^2})^{(m-1)} dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} P_n'(x)P_{m-1}(x)e^{-x^2} dx$.

Si $0 \leq n < m$, en répétant ceci m fois, $\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)P_m(x)e^{-x^2} dx = (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} P_n^{(m)}(x)e^{-x^2} dx = 0$ car $P_n^{(m)} = 0$.

Si $n = m$, on parvient à $\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)^2 e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} P_n^{(n)}(x)e^{-x^2} dx$ or $P_n^{(n)}(x) = (-2)^n n!$ car $\deg(P_n) = n$ et $\text{dom}(P_n) = (-2)^n$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)^2 e^{-x^2} dx = (-1)^n (-2)^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$.

3.151 $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ avec un prolongement par continuité en 0 : $f(0) = 1$. Ainsi $\int_0^1 f$

converge. Posons $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t}$. Ces deux fonctions sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0$ (car $u(t)v(t) \sim \frac{t}{2}$) et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ (car $u(t) = O(1)$). Par théorème, les intégrales

$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ sont de même nature.

Or si on pose $g : t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ avec un prolongement par continuité en

0 : $g(0) = \frac{1}{2}$. Ainsi $\int_0^1 g$ converge. De plus $g(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc g est intégrable sur $[1; +\infty[$ et l'absolue

convergence implique la convergence de cette intégrale. Par conséquent : $\int_0^{+\infty} g$ converge et il en est de

même pour $\int_0^{+\infty} f$. Cette intégrale est dite de DIRICHLET et $I = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}$ mais c'est une autre histoire.

3.152 Méthode 1 : Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan } x + \text{Arctan}(x+1)$.

Comme la fonction Arctan , la fonction f est continue et strictement croissante, elle réalise donc d'après le théorème du même nom une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= \left] -\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$. Ainsi, il existe un unique réel x tel que $f(x) = \frac{\pi}{2}$. Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{\pi}{4} + \text{Arctan}(2) > \frac{\pi}{2}$, il vient $x \in]0; 1[$.

$\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } x$ donc $\tan(\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x+1)) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan } x\right)$

donc $\tan(\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x+1)) = \frac{1}{\tan(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{x}$ car $\text{Arctan}(x) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, comme

$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$, il vient $\frac{2x}{1 - (x^2 - 1)} = \frac{1}{x} \iff 2x^2 = 2 - x^2 \iff x = \sqrt{\frac{2}{3}} \sim 0,82$.

Méthode 2 : On sait que $\text{Arctan}(y)$ est un argument du complexe $1 + iy$ si $y \in \mathbb{R}$ car on peut écrire

$1 + iy = \sqrt{1+y^2}e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ (faire un dessin) et $1 + iy = \sqrt{1+y^2}(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ donc $\tan(\theta) = y$ ce qui montre bien que $\theta = \text{Arctan}(y)$.

On sait aussi que $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$ donc, en itérant, $\arg(zz'z'') \equiv \arg(z) + \arg(z') + \arg(z'') \pmod{2\pi}$. Ainsi $\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan } x + \text{Arctan}(x+1) \equiv \text{Arg}((1+i(x-1))(1+ix)(1+i(x+1))) \pmod{2\pi}$ et l'équation devient $\arg(2-3x^2 + (4x-x^3)i) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ ce qui équivaut à $2-3x^2 + (4x-x^3)i \in i\mathbb{R}_+^*$ et, à nouveau, on trouve $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (car si $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ la partie imaginaire de $2-3x^2 + (4x-x^3)i$ est strictement négative).

3.153 La fonction $f : x \mapsto \frac{\text{th}(3x) - \text{th } x}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 avec $f(0) = 2$ car

$\text{th}(t) \underset{0}{=} t + o(t^2)$ donc $f(t) \underset{0}{=} \frac{3t - t + o(t^2)}{t} \underset{0}{=} 2 + o(t)$. De plus, $\text{th}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} = 1 - \frac{2e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}$ donc $\text{th}(t) \underset{+\infty}{=} 1 + O(e^{-2t})$. Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{1 + O(e^{-6x}) - 1 + O(e^{-2x})}{x} \underset{+\infty}{=} \frac{O(e^{-2x})}{x} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{e^{-2x}}{x}\right) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$.

Par comparaison avec une fonction de référence intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $u > 0$, $\int_0^u \frac{\text{th}(3x) - \text{th } x}{x} dx = \int_0^u \frac{\text{th}(3x)}{x} dx - \int_0^u \frac{\text{th } x}{x} dx$ (les deux intégrales convergent). On pose $x = \frac{y}{3} = \varphi(y)$ dans la première intégrale (avec φ de classe C^1 sur le segment $[0; 3u]$) et on obtient la relation $\int_0^u \frac{\text{th}(3x) - \text{th } x}{x} dx = \int_0^{3u} \frac{\text{th}(y)}{y} dy - \int_0^u \frac{\text{th } x}{x} dx = \int_u^{3u} \frac{\text{th } x}{x} dx$ (par CHASLES). Or $\frac{\text{th } x}{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ donc $\int_0^u \frac{\text{th}(3x) - \text{th } x}{x} dx = \int_u^{3u} \frac{1}{x} dx + \int_u^{3u} \frac{\text{th } x - 1}{x} dx = \ln(3) - \int_u^{3u} \frac{1 - \text{th } x}{x} dx$. Or $0 \leq 1 - \text{th } x \leq 2e^{-x}$ donc $0 \leq \int_u^{3u} \frac{1 - \text{th } x}{x} dx \leq \int_u^{3u} \frac{2e^{-x}}{x} dx \leq 2(3u - u) \frac{e^{-u}}{u} = 4e^{-u}$. Ainsi, comme $\lim_{u \rightarrow +\infty} 4e^{-u} = 0$, on en déduit par encadrement la valeur de $I : I = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u \frac{\text{th}(3x) - \text{th } x}{x} dx = \ln(3)$.

3.154 Comme la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $D =]0; 1[\cup]1; +\infty[$, la fonction f est bien définie sur D

car pour tout réel x appartenant à D , le segment $[\widetilde{x}; x^2]$ est inclus dans D .

Soit G une primitive de g sur D , alors $f(x) = [G(t)]_x^{x^2} = G(x^2) - G(x)$ donc f est C^∞ sur D car G l'est.

Si $x \in]0; 1[$, g étant décroissante sur $[x^2; x]$, on a $\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)} dt = \frac{x^2 - x}{2 \ln(x)} \leq g(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln(x)} = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x)} dt$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{\ln(x)} = 0$ donc, par encadrement, f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Comme $g(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{t-1}$, on est conduit à transformer $f(x)$ en $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt + \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right) dt$.

Or $\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt = \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \ln(x+1)$ tend vers $\ln(2)$ quand x tend vers 1. De plus, en posant

$h : t \mapsto \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}$, on trouve par DL que $h(1+u) \underset{0}{=} \frac{1}{2} + o(1)$ donc h se prolonge par continuité en 1 en posant $h(1) = \frac{1}{2}$. Ceci signifie que h est bornée (par M) sur un voisinage de 1. Sur ce même voisinage, on a

donc $\left| \int_x^{x^2} h(t) dt \right| \leq M|x^2 - x| \rightarrow 0$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 1} \int_x^{x^2} h(t) dt = 0$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ln(2)$.

Par conséquent, la fonction f prolongée par $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

D'après ce qui précède, f est C^∞ sur D avec $f'(x) = 2xg'(x^2) - G'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ donc,

classiquement, $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 1$. Par le théorème de prolongement C^1 , f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'(1) = 1$.

Soit $\varphi :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \frac{\ln(1+t)}{t}$ et $\varphi(0) = 1$, alors φ ne s'annule jamais sur son ensemble de définition et, d'après ce qui précède : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{\varphi(x-1)}$.

La fonction φ est DSE sur $] -1; 1[$ car, classiquement : $\forall t \in] -1; 1[, \varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n}$. Ainsi, φ est de classe C^∞ sur $] -1; 1[$, et aussi comme rapport de telles fonctions sur $] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$ donc finalement sur $] -1; +\infty[$. Par composée et inverse, f' , donc f , est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\ln x} = 0^+$ donc $f'(0) = 0$ par le théorème de prolongement C^1 . Mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x \ln x} = +\infty$ et $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{x-1}{x \ln x}$ donc f n'est pas deux fois dérivable en 0 : f n'est pas de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.

3.155 On suppose que $a < b$, la fonction $f : t \mapsto (b-t)^\alpha (t-a)^n$ est continue sur $[a; b]$ et $f(t) \underset{t \rightarrow b^-}{\sim} \frac{(b-a)^n}{(b-t)^{-\alpha}}$

donc f est intégrable sur $[a; b]$ si et seulement si $-\alpha < 1 \iff \alpha > -1$ d'après RIEMANN et $I_{\alpha,n}$ existe.

Si on a $\alpha > -1$, on commence par le cas simple :

- si $n = 0$, alors on a $I_{\alpha,0} = \left[-\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_a^b = \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

- si $n \geq 1$, par IPP en définissant les deux fonctions de classe C^1 u et v par posant $u(t) = -\frac{(b-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et

$v(t) = (t-a)^n$, on a $\int_a^b (b-t)^\alpha (t-a)^n dt = \left[\frac{(b-t)^{\alpha+1} (t-a)^n}{\alpha+1} \right]_a^b + \frac{n}{\alpha+1} \int_a^b (b-t)^{\alpha+1} (t-a)^{n-1} dt$ donc

$I_{\alpha,n} = \frac{n}{\alpha+1} I_{\alpha+1,n-1}$. Par une récurrence simple $I_{\alpha,n} = \frac{n}{\alpha+1} \times \frac{n-1}{\alpha+2} \times \dots \times \frac{1}{\alpha+n} I_{\alpha+n,0}$ donc, compte

tenu du point précédent : $I_{\alpha,n} = \frac{n!(b-a)^{\alpha+n+1}}{\prod_{k=1}^{n+1} (\alpha+k)}$.

3.156 $f : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 1$ (classique). Les fonctions $u : t \rightarrow 1 - \cos(t)$ et

$v : t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par DL ou croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t)$.

Ainsi, par IPP, les intégrales $\int_0^{+\infty} u'v = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} uv' = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$ ont même nature.

Or la seconde est absolument convergente car la fonction $g : t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ se prolonge par continuité en 0 en

posant $g(0) = \frac{1}{2}$ par DL et $g(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Ainsi, $\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge (mais pas absolument) pour $x \geq 0$.

Soit donc $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. Comme f est continue

sur $\mathbb{R}_+$, la fonction F y est C^1 et vérifie $F'(x) = -f(x) = -\frac{\sin x}{x}$ par le théorème fondamental de l'intégration.

$G : x \mapsto x$ est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ donc, par IPP, on a $\int_0^a F(x)G'(x)dx = [F(x)G(x)]_0^a - \int_0^a F'(x)G(x)dx$

pour un réel $a \geq 0$; ce qui donne $\int_0^a F(x)dx = aF(a) + \int_0^a \sin(x)dx = aF(a) + 1 - \cos(a)$.

Or par IPP encore, $aF(a) = a \left[\frac{1-\cos t}{t} \right]_a^{+\infty} + a \int_a^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \cos(a) - 1 + a \int_a^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ et

on obtient $\int_0^a F(x)dx = a \int_a^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = a \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx - a \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = 1 - a \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ qui se

transforme par une ultime IPP, $u(x) = \sin x$ et $v(x) = \frac{1}{x^2}$, en $\int_0^a F(x)dx = 1 + \frac{\sin a}{a} - 2a \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx$.

Enfin $\left| \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx \right| \leq \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2a^2}$ donc $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\sin a}{a} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx = 0$ et on peut enfin conclure à la convergence l'intégrale proposée et que $I = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a F(x) dx = 1$.

3.157 Récurrence descendante sur k . Pour $k = n$, la fonction $f^{(0)} = f$ s'annule au moins n fois par hypothèse.

Si $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et si on suppose que $f^{(n-k)}$ s'annule au moins k fois, en des réels $x_1 < \dots < x_k$, d'après le théorème de ROLLE appliqué sur chaque intervalle $[x_i; x_{i+1}]$, la fonction $(f^{(n-k)})' = f^{(n-k+1)}$ s'annule en $y_i \in]x_i; x_{i+1}[$ donc $f^{(n-(k-1))}$ s'annule en $y_1 < \dots < y_{k-1}$ donc elle s'annule au moins $k-1$ fois.

Par principe de récurrence, $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ $f^{(n-k)}$ s'annule au moins k fois.

Si $\deg(P) = n$ et si on suppose que l'équation $P(x) = e^x$ admet au moins $n+2$ solutions, donc que la fonction $f : x \mapsto P(x) - e^x$ de classe C^∞ s'annule au moins $n+2$ fois, alors d'après ce qui précède, $f^{(n+1)}$ s'annule au moins $n+2 - (n+1) = 1$ fois ce qui est absurde puisque $f^{(n+1)} = -e^x$ ne s'annule jamais.

Par conséquent, si $P \in \mathbb{R}[X]$, l'équation $P(x) = e^x$ possède au maximum $\deg(P) + 1$ solutions.

3.158 Si $n \geq 3$, $P'_n = n(x^{n-1} - 1)$ donc la fonction polynomiale P_n (qui est clairement continue) est strictement décroissante sur $]0; 1[$ car pour tout $x \in]0; 1[$, $0 < x^{n-1} < 1$ donc $P'_n(x) < 0$. Or $P_n(0) = 1 > 0 > 2 - n = P_n(1)$. Ainsi, par le théorème de la bijection continue : $\exists ! x_n \in]0; 1[$, $P_n(x_n) = 0$.

Comme $x_n^n - nx_n + 1 = 0$, on a $nx_n - 1 = x_n^n \in]0; 1[$ donc $1 \leq nx_n \leq 2$, d'où $x_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n = 0$ car $0 < x_n^n < x_n$ et on a donc $x_n = \frac{1+x_n^n}{n} \sim \frac{1}{n}$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+x_n^n) = 1$.

$x_n \leq \frac{2}{n}$ si $n \geq 4$ donc $0 \leq x_n^n \leq \left(\frac{2}{n}\right)^n$ et on en déduit que $x_n^n = o\left(\frac{1}{2^n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ par croissances comparées.

De plus, $x_n - \frac{1}{n} = \frac{x_n^n}{n}$, ainsi $x_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\ln(x_n) = \ln\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\ln(n) + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Par conséquent, $n \ln(x_n) = -n \ln(n) + o(1)$ donc $x_n^n = e^{n \ln(x_n)} \sim \frac{1}{n^n}$. Au final, on a $x_n - \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^{n+1}}$.

3.159 Les fonctions $a : x \mapsto 0$ et $b : x \mapsto x^4 + 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et (E) : $y'' + ay' + by = 0$ donc il existe d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire une unique fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable (et même de classe C^∞ par récurrence) qui vérifie le problème de CAUCHY : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = (x^4 + 1)f(x)$, $f(0) = f'(0) = 1$.

Comme $\frac{1}{f^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on a l'existence de $H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2} - \int_0^x \frac{dt}{f(t)^2}$. Par conséquent, H est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a $H'(x) = -\frac{1}{f^2(x)}$. Par produit, g est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec

$g'(x) = f'(x)H(x) + f(x)H'(x) = f'(x)H(x) - \frac{1}{f(x)}$. À nouveau, comme f est supposée ne pas s'annuler, g'

est dérivable et $g''(x) = f''(x)H(x) - \frac{f'(x)}{f^2(x)} + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = f''(x)H(x) = (x^4 + 1)f(x)H(x) = (x^4 + 1)g(x)$ puisque

$f''(x) = (x^4 + 1)f(x)$. Ainsi, g est aussi solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

Supposons que f s'annule sur $\mathbb{R}_+$ et posons $\alpha = \inf\{x > 0 \mid f(x) = 0\}$. Par continuité de f en α , on a $\alpha > 0$. Ainsi, f est strictement positive sur $[0; \alpha[$, donc f'' aussi d'où f' est strictement croissante sur $[0; \alpha[$ mais comme $f'(0) > 0$, on a f' strictement positive sur $[0; \alpha[$ donc f est strictement croissante sur $[0; \alpha[$ et $f(\alpha) > f(0) = 1$ ce qui est absurde compte tenu de la continuité de f en α . Par conséquent, f reste strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. Alors $f'' > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a donc $\forall t \geq 0$, $f'(t) \geq f'(0) = 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt \geq 1 + \int_0^x dt = 1 + x$. On a donc $\frac{1}{f(x)^2} \leq \frac{1}{(1+x)^2}$; or $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc, par comparaison, $\frac{1}{f^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3.160 Soit, pour $n \geq 3$, la fonction $f_n : x \mapsto e^x - nx$ définie sur $\mathbb{R}_+$. On a $f'_n(x) = e^x - n$ donc f_n est strictement croissante sur l'intervalle $[\ln(n); +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0; \ln(n)]$. Comme $f_n(0) = 1 > 0$,

$f_n(\ln(n)) = n(1 - \ln(n)) < 0$ car $n \geq 3 > e$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ par croissance comparée, il existe bien d'après le théorème de la bijection appliqué à f_n sur les intervalles $[\ln(n); +\infty[$ et $[0; \ln(n)]$ seulement deux réels x_n et y_n tels que $0 < x_n < \ln(n) < y_n$ et $f_n(x_n) = f_n(y_n) = 0$.

Comme $f_n(1) = e - n < 0$ et que $1 \in [0; \ln(n)]$, on a par l'étude de $f_n : 0 < x_n < 1$.

Il s'agit de constater que $\forall x > 0, f_n(x) > f_{n+1}(x)$ de sorte que :

- Ainsi $f_n(x_{n+1}) > f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n)$ et $x_{n+1} \in [0; 1] \subset [0; \ln(n)]$, intervalle sur lequel f_n est strictement décroissante donc $x_{n+1} < x_n$ et la suite $(x_n)_{n \geq 3}$ est strictement décroissante.

- De même, $f_n(y_{n+1}) > f_{n+1}(y_{n+1}) = 0 = f_n(y_n)$ et $y_{n+1} \in [\ln(n+1); +\infty[\subset [\ln(n); +\infty[$, intervalle sur lequel f_n est strictement croissante donc $y_{n+1} > y_n$ et la suite $(y_n)_{n \geq 3}$ est strictement croissante.

La suite $(x_n)_{n \geq 3}$ est donc décroissante minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \geq 0$. Or $x_n = \frac{e^{x_n}}{n}$ et

on a les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{x_n} = e^\ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ par produit.

La suite $(y_n)_{n \geq 3}$ est croissante et $y_n \geq \ln(n)$ par construction donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$ par encadrement.

Soit $\varepsilon > 0$, alors $f_n((1+\varepsilon)\ln(n)) = n^{1+\varepsilon} - n(1+\varepsilon)\ln(n) = n(n^\varepsilon - (1+\varepsilon)\ln(n))$. Par croissance comparée, on a $\ln(n) = o(n^\varepsilon)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n((1+\varepsilon)\ln(n)) = +\infty$. Ainsi, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, (1+\varepsilon)\ln(n) \in [\ln(n); +\infty[$ et $f_n((1+\varepsilon)\ln(n)) > 0$. L'étude de la fonction f_n montre alors que $y_n \leq (1+\varepsilon)\ln(n)$.

Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ln(n) \leq y_n \leq (1+\varepsilon)\ln(n)$. Ceci montre que $y_n \sim_{+\infty} \ln(n)$.

3.161 • $f : t \mapsto \frac{e^{\sin t}}{t}$ est continue et positive sur $[1; +\infty[$ mais $\forall t \geq 1, \frac{e^{\sin t}}{t} \geq \frac{1}{et}$ car $\sin(t) \geq -1$ et

l'exponentielle est croissante. Or $t \mapsto \frac{1}{et}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$. Ainsi I diverge et f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

- $g : t \mapsto \sin t \sin \frac{1}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$. De plus,

$g(t) = \sin t \sin \frac{1}{t} = \frac{\sin(t)}{t} + \sin(t) \left(\sin \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \right)$. On pose $g_1 : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ et $g_2 : t \mapsto \sin \frac{1}{t} - \frac{1}{t}$. g_1 et g_2 se

prolongent par continuité en 0 en posant $g_1(0) = 1$ et $g_2(0) = -1$. Il est classique que $\int_0^{+\infty} g_1$ converge (par

IPP en se ramenant à $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ qui est absolument convergente). De plus, par DL : $g_2(t) = O\left(\frac{1}{t^3}\right)$

donc g_2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par somme, $\int_0^{+\infty} g$ converge mais g n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3.162 On a $\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{x+x+1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$. On peut bien sûr aussi appliquer les techniques usuelles ou procéder par identification.

La fonction $f : t \mapsto t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0; 1]$ (c'est-à-dire continue par morceaux sur tout segment inclus dans $]0; 1]$) car ses seuls points de discontinuité sont les réels $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et tout segment inclus dans $]0; 1]$ ne contient qu'un nombre fini de tels points.

De plus, f est positive et majorée par 1 car $\forall t \in]0; 1], 0 \leq \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leq \frac{1}{t} < \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor + 1$ donc $0 \leq t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leq 1$, ainsi,

par comparaison, f est intégrable sur $]0; 1]$. On en déduit que $\int_0^1 f(t) dt$ converge d'où l'existence de I .

Or $I = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$. D'après CHASLES, en coupant aux points de discontinuité de

f , on a $\int_{1/n}^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt = \sum_{k=1}^{n-1} k \int_{1/(k+1)}^{1/k} t dt$ car $\forall t \in \left] \frac{1}{k+1}; \frac{1}{k} \right], \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor = k$.

Or, $\int_{1/(k+1)}^{1/k} t dt = \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{2k^2(k+1)^2}$. Ainsi, $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{2k^2(k+1)^2}$. La série $\sum_{k \geq 1} \frac{2k+1}{2k^2(k+1)^2}$

converge car $\frac{2k+1}{2k(k+1)^2} \sim \frac{1}{k^2}$ (on le savait déjà car $\int_0^1 f(t)dt$ converge) donc $I = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1}{2k(k+1)^2}$.

Mais $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k(k+1)^2}$ vérifie $S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2}$ et, avec la classique valeur de $\zeta(2)$, on a $I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) = \frac{\pi^2}{12} \sim 0,82$.

3.163 Comme $\frac{\cos(t)}{t} \sim \frac{1}{t}$, on écrit $\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt - \int_x^{3x} \frac{1 - \cos(t)}{t} dt = \ln(3) + \int_x^{3x} f(t) dt$ où l'on pose $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1 - \cos t}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 0$ (prolongement par continuité avec DL). La fonction f étant continue sur le segment $[-3; 3]$, on peut poser $M = \max_{t \in [-3; 3]} |f(t)|$ de sorte que $\forall x \in [-1; 1], \left| \int_x^{3x} f(t) dt \right| \leq \left| \int_x^{3x} M dt \right| = 2M|x|$. Ainsi, par encadrement : $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \ln(3)$.

3.164 Méthode 1 : la fonction $f : x \mapsto \frac{\text{sh } 2x}{\text{ch } 3x}$ est continue sur le segment $[0; \ln(2)]$ donc I existe. Les règles

de BIOCHE nous poussent à écrire $I = \int_0^{\ln(2)} \frac{\text{sh } 2(x)}{\text{ch } 4(x)} \text{ch}(x) dx = \int_0^{\ln(2)} \frac{\text{sh } 2(x)}{(1 + \text{sh } 2(x))^2} \text{ch}(x) dx$ car $\text{ch } 2(x) = 1 + \text{sh } 2(x)$ et $\text{sh}'(x) = \text{ch}(x)$, et à effectuer le changement de variable $t = \text{sh}(x)$, licite car sh est une bijection strictement croissante et C^1 de $[0; \ln(2)]$ dans $[0; \text{sh}(\ln(2)) = \left[0; \frac{3}{4}\right]$ car $\text{sh}(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 - (1/2)}{2} = \frac{3}{4}$, ce qui montre que $I = \int_0^{\ln 2} \frac{\text{sh } 2x}{(1 + \text{sh } 2x)^2} (\text{ch } x) dx = \int_0^{3/4} \frac{t^2}{(1 + t^2)^2} dt$.

On pose alors $u(t) = \frac{t}{2}$ et $v(t) = -\frac{1}{1+t^2}$ de sorte que $u'(t) = \frac{1}{2}$ et $v'(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$ et, comme u et v sont C^1 sur $\left[0; \frac{3}{4}\right]$, par intégration par parties, $I = \left[-\frac{t}{2(1+t^2)} \right]_0^{3/4} + \frac{1}{2} \int_0^{3/4} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \text{Arctan} \left(\frac{3}{4} \right) - \frac{6}{25} \sim 0,08$.

Méthode 2 : on aurait aussi pu effectuer directement une intégration par parties avec $u(x) = \frac{1}{\text{ch } 2(x)}$ et $v(x) = -\frac{\text{sh}(x)}{2}$, u et v étant de classe C^1 sur le segment $[0; \ln(2)]$ avec $u'(x) = -\frac{2\text{sh}(x)}{\text{ch } 3(x)}$ et $v'(x) = -\frac{\text{ch}(x)}{2}$ donc $u'(x)v(x) = f(x)$, pour avoir $I = \int_0^{\ln(2)} u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_0^{\ln(2)} - \int_0^{\ln(2)} u(x)v'(x) dx$ ce qui donne $I = \left[-\frac{\text{sh}(x)}{2\text{ch } 2(x)} \right]_0^{\ln(2)} + \frac{1}{2} \int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{\text{ch}(x)} = \left[-\frac{\text{sh}(x)}{2\text{ch } 2(x)} + \text{Arctan}(e^x) \right]_0^{\ln(2)} = \text{Arctan}(2) - \frac{\pi}{4} - \frac{6}{25}$ car $\text{ch}(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}}{2} = \frac{2 + (1/2)}{2} = \frac{5}{4}$. C'est bien sûr la même valeur que précédemment avec la méthode 1 car en notant $\alpha = \frac{1}{2} \text{Arctan} \left(\frac{3}{4} \right)$ et $\beta = \text{Arctan}(2) - \frac{\pi}{4}$, on a $\tan(2\alpha) = \tan \left(\text{Arctan} \left(\frac{3}{4} \right) \right) = \frac{3}{4}$ et $\tan(2\beta) = -\tan \left(\frac{\pi}{2} - 2 \text{Arctan}(2) \right) = -\frac{1}{\tan(2 \text{Arctan}(2))} = -\frac{1 - \tan^2(\text{Arctan}(2))}{2 \tan(\text{Arctan}(2))} = -\frac{1-4}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$. De plus, les réels 2α et 2β appartiennent clairement à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel $\tan$ est injective, donc $\alpha = \beta$.

3.165 Si $\alpha = 2$, comme $u_n > 0$, posons $v_n = \ln(u_n^{1/n}) = \frac{1}{n} \ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k^2}{n^2} \right)$. On reconnaît une somme de RIEMANN associée à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$ sur le segment $[0; 1]$ sur lequel f est continue. Par un théorème du cours, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_0^1 f(x) dx = I$. Par IPP, en posant $u : x \mapsto x$ et $v = f$ qui sont C^1 sur $[0; 1]$, $I = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} dx = \ln(2) - \int_0^1 \frac{2(x^2+1)-2}{1+x^2} dx = \ln(2) - 2 + 2[\text{Arctan}(x)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2} = \ell$ avec $\ell \sim 0,2639$. Par continuité de la fonction exp, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{1/n} = e^\ell = a \sim 1,302$.

Il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0, u_n^{1/n} > 1.2$ donc $\forall n \geq n_0, u_n \geq (1,2)^n$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Soit $\alpha \in [0; 1]$, on effectue une comparaison série-intégrale classique, puisque $g : x \mapsto x^\alpha$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et on a $\forall k \geq 1, \int_{k-1}^k g(x)dx \leq k^\alpha \leq \int_k^{k+1} g(x)dx$ donc $\int_0^n g(x)dx \leq a_n \leq \int_1^{n+1} g(x)dx$. Ainsi, $\forall n \geq 1, \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq n^2 a_n \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1}$ ainsi $a_n \sim_{+\infty} \frac{n^{\alpha-1}}{\alpha+1}$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ si $\alpha \in [0; 1[$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$ si $\alpha = 1$ ce qu'on savait déjà car si $\alpha = 1, a_n = \frac{n+1}{2n}$.

Si $\alpha \in [0; 1[$, d'après l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$, comme $u_n \geq 1$, on a $\forall n \geq 1, 0 \leq \ln(u_n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha}{n^2} = a_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Ainsi, par le théorème d'encadrement, on conclut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Pour $x \in [0; 1]$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ et la convergence se fait avec les conditions du CSSA donc, d'après ce théorème, on a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ (ce qu'on peut aussi prouver facilement par des études de fonctions). Ainsi, si $\alpha = 1, \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \right) \ln(u_n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$. Par le théorème des gendarmes toujours, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \frac{1}{2}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{1/2} \sim 1,65$.

Si $\alpha \in]1; 2[$, d'après l'inégalité précédente, comme $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \frac{k^\alpha}{n^2} \in [0; 1], u_n \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{k^\alpha}{n^2} - \frac{k^{2\alpha}}{2n^4} \right) = w_n$ or $w_n \sim_{+\infty} \frac{n^{\alpha-1}}{\alpha+1}$ d'après la comparaison série-intégrale qui précède. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ car $\alpha > 1$. Bien sûr, si $\alpha \geq 2$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ car $u_n \geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2} \right)$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^\alpha}{n^2} \right) = +\infty$ comme vu avant.

3.166 Posons, pour tout $n \geq 3$, la fonction $f_n : x \mapsto e^x - nx$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'_n(x) = e^x - n$ donc

f_n est strictement décroissante sur $[0; \ln(n)]$ et strictement croissante sur $[\ln(n); +\infty[$. Or $f_n(0) = 1 > 0$, $f_n(\ln(n)) = n(1 - \ln(n)) < 0$ car $\ln(n) \geq \ln(3) > \ln(e) = 1$ et, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$. On en déduit que f_n s'annule exactement deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$, en $x_n \in]0; \ln(n)[$ et en $y_n \in]\ln(n); +\infty[$.

Comme $f_{n+1}(x_n) = e^{x_n} - (n+1)x_n = f_n(x_n) - x_n = -x_n < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$ et que $0 < x_n < \ln(n+1)$ et puisque f_{n+1} est strictement décroissante sur $[0; \ln(n+1)]$, que $0 < x_{n+1} < x_n$. Ainsi, la suite $(x_n)_{n \geq 3}$ est strictement décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $\ell \in]0; x_3]$. Comme $x_n = \frac{e^{x_n}}{n}$, que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{x_n} = e^\ell$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, il vient par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

De même, $f_n(y_{n+1}) = e^{y_{n+1}} - ny_{n+1} = f_{n+1}(y_{n+1}) + y_{n+1} = y_{n+1} > 0 = f_n(y_n)$ et $y_{n+1} > \ln(n+1) > \ln(n)$ donc, comme f_n est strictement croissante sur $[\ln(n); +\infty[$, on a $y_n < y_{n+1}$. Ainsi, la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. Si elle convergeait vers un réel $a > 0$, alors on aurait $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{y_n} - ny_n) = +\infty$ ce qui est impossible puisque $e^{y_n} - ny_n = 0$. Alors, on a forcément $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$ (limite monotone).

On reprend la relation $nx_n = e^{x_n}$ pour avoir de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1$ donc $x_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$. On reporte pour avoir $x_n = \frac{1}{n} \left(e^{1/n + o(1/n)} \right) = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Soit $\varepsilon > 0$, posons $z_n = (1 + \varepsilon) \ln(n) \in]\ln(n); +\infty[$, alors on obtient par croissances comparées la limite $f_n(z_n) = n^{1+\varepsilon} - (1 + \varepsilon)n \ln(n) = n(n^\varepsilon - (1 + \varepsilon) \ln(n)) \rightarrow +\infty$. Ainsi, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, f_n(z_n) > 0 = f_n(y_n)$. Or f_n est strictement croissante sur $[\ln(n); +\infty[$ donc $y_n < z_n = (1 + \varepsilon) \ln(n)$.

Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ln(n) \leq y_n \leq (1 + \varepsilon) \ln(n)$ ce qui signifie que $y_n \sim_{+\infty} \ln(n)$.

3.167 D'abord, comme $f_n : x \mapsto (1-x)^n e^{-2x}$ est continue sur le segment $[0; 1]$, l'intégrale $\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$ converge et I_n existe pour tout entier n . Comme $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers la fonction $f = 0$ (fonction nulle) sur $]0; 1]$, que les f_n et f sont continues sur $]0; 1]$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0; 1], |f_n(x)| \leq \varphi(x) = 1$ avec φ intégrable sur $]0; 1]$, le théorème de convergence dominée montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f = 0$.

On effectue une intégration par parties en posant $u(x) = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$ et $v(x) = e^{-2x}$, u et v sont de classe C^1 sur $[0; 1]$ donc $I_n = -\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} e^{-2x}\right]_0^1 - \frac{2}{n+1} \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx$ donc $I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2I_{n+1}}{n+1}$.

On multiplie par n et $nI_n = \frac{n}{n+1} - \frac{2n}{n+1} I_{n+1}$. Or d'après ce qui précède, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n+1} I_{n+1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1$ ce qui donne l'équivalent $I_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$. On a donc déjà $a = 0$ et $b = 1$. D'après la relation

précédente, $n^2 \left(I_n - a - \frac{b}{n} \right) = \frac{n^2}{n+1} - \frac{2n^2}{n+1} I_{n+1} - n = -\frac{n}{n+1} - \frac{2n^2 I_{n+1}}{n+1}$. Or $I_{n+1} \sim_{+\infty} \frac{1}{n+1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 I_{n+1}}{n+1} = 2$. Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(I_n - a - \frac{b}{n} \right) = -3$ ce qui donne enfin $c = -3$ et $I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

3.168 Notons $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - \ln n$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \ln n$ pour $n \geq 1$. $v_n - u_n = \frac{2}{n}$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

De plus, $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$

donc $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante et $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$. Ainsi,

comme $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$, on a $v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$ donc $(v_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

$(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont donc adjacentes, on sait qu'elles convergent vers la constante $\gamma \sim 0,577$.

3.169 Si $x < 0$, la fonction positive $f_x : t \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x = 0$, la fonction f_0 vérifie $f_0(t) \sim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}$ donc f_0 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par contre, si $x > 0$, la fonction f_x est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $f_x(t) = o(e^{-t})$ donc f_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, l'ensemble de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $x > 0$, $F(x) = \int_0^1 f_x(t) dt + \int_1^{+\infty} f_x(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt - \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{x+t} dt + \int_1^{+\infty} f_x(t) dt$. Or, par l'inégalité

$\ln(1+y) \leq y$, on a aussi $e^u \geq 1+u$ donc $0 \leq 1-e^{-t} \leq t$ donc $0 \leq \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{x+t} dt \leq \int_0^1 \frac{t}{x+t} dt \leq 1$. De plus,

$0 \leq \int_1^{+\infty} f_x(t) dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+x} dt = \frac{1}{1+x} \left[-e^{-t} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{e(1+x)} \leq 1$. Mais $\int_0^1 \frac{1}{x+t} dt = \ln(1+x) - \ln(x)$.

Par conséquent, $F(x) = -\ln(x) + O(1)$ donc $F(x) \sim_{+\infty} -\ln(x)$.

3.170 La fonction $t \mapsto \ln(\sin t)$ est négative et continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$. De plus, $f(t) = \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) - \ln(t) \sim_{t \rightarrow 0} -\ln(t)$

car $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$. Ainsi $f(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc f est intégrable sur $]0; \frac{\pi}{2}]$: I existe. On effectue le changement

de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ (facile à justifier) qui garantit l'existence de $\int_{\pi/2}^0 \ln(\cos u)(-1) du = J$ et $I = J$. En

considérant les intégrales sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, on a $I + J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t) dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t)) dt - \frac{\pi \ln 2}{2}$. On

change de variable $v = 2t$ (facile à justifier), $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t)) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin v) dv = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin v) dv$

par symétrie par rapport à $\frac{\pi}{2}$ de la courbe de $v \mapsto \ln(\sin v)$ ou par changement de variable $w = \pi - v$. Alors

$I + J = I + I = I - \frac{\pi \ln 2}{2}$ donc $I = J = -\frac{\pi \ln 2}{2}$. Cette intégrale est dite d'EULER.

3.171 $f : x \mapsto \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x(1+x^2)\operatorname{Arctan} x}$ est continue sur $]0; +\infty[$. Comme $\operatorname{Arctan}(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{3}$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. De plus, $x - \operatorname{Arctan}(x) \underset{+\infty}{\sim} x$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi x^2}$ donc f intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par RIEMANN : I existe. $\frac{1}{(x^2+1)x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$ donc $f(x) = \frac{\operatorname{Arctan}' x}{\operatorname{Arctan} x} - \frac{1}{x} + \frac{x}{1+x^2}$: $\int_a^b f(x)dx = [\ln(\operatorname{Arctan} x) - \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)]_a^b = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(1+b^2)\operatorname{Arctan}^2 b}{b^2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(1+a^2)\operatorname{Arctan}^2 a}{a^2}\right)$. On fait rendre b vers $+\infty$ et on obtient : $\forall a > 0$, $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \ln(\pi/2) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(1+a^2)\operatorname{Arctan}^2(a)}{a^2}\right)$. On fait maintenant tendre a vers 0^+ et on a enfin $I = \ln(\pi/2) \sim 0,45$.

3.172 Par construction, $f(x)$ est défini si $1 - [x] \neq 0$ donc si $x \notin [1; 2[$. Ainsi $\mathcal{D}_f =]-\infty; 1[\cup [2; +\infty[$.

- f n'est pas définie en 1 où l'on ne peut donc pas étudier sa continuité.
- Il vient $f(2) = 3 = 4 - 1 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ donc f est continue en 2.
- De même $f(-2) = 4 = 4 + 0 = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ donc f est continue en -2 .
- De plus, $f(-1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 1 = 1 = 1 + \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ donc f est continue en -1 .

En général, on a les différentes expressions de $f(x)$ selon les intervalles :

- Si $x \leq 0$, $[x] \leq -1$ donc $1 - [x] \geq 2$ donc $0 < \frac{1}{1 - [x]} \leq \frac{1}{2}$ donc $f(x) = x^2$.
- Si $x \in [0; 1[$, $[x] = 0$ donc $f(x) = x^2 + 1$.
- Si $x > 2$, $[x] \geq 2$ donc $1 - [x] \leq -1$ d'où $-1 \leq \frac{1}{1 - [x]} < 0$ et on a donc $f(x) = x^2 - 1$.

On constate que f n'est pas continue en 0 car $f(0) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

3.173 On remarque que par IPP en posant $x = t^2$ (facile à justifier), on a $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2tf(t^2)dt$. Or, en écrivant $\frac{1}{3} = \int_0^1 t^2 dt$, les fonctions cherchées vérifient $\int_0^1 (f(t^2)^2 - 2tf(t^2) + t^2)dt = 0$, c'est-à-dire $\int_0^1 (f(t^2) - t)^2 dt = 0$. Mais $t \mapsto (f(t^2) - t)^2$ est continue et positive, un théorème du cours annonce l'équivalence suivante : $\int_0^1 (f(t^2) - t)^2 dt = 0 \iff \forall t \in [0; 1], f(t^2) = t$.

Ainsi, il existe une unique fonction vérifiant les hypothèses imposées, il s'agit de $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

3.174 Comme $\forall x \in [a; b]$, $f(x) = \int_a^x f'(t)dt$, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on obtient la majoration $f(x)^2 = \left(\int_a^x f'(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^x 1^2 dt\right) \left(\int_a^x f'(t)^2 dt\right) \leq (x-a) \left(\int_a^b f'(t)^2 dt\right)$. On intègre cette inégalité pour avoir $\int_a^b f^2(x)dx \leq \left(\int_a^b (x-a)dt\right) \left(\int_a^b f'(t)^2 dt\right) = \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(x)dx$.

3.175 Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g : t \mapsto \operatorname{Min}\left(x, \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) = x$ donc g n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Si $x = 0$, g est nulle sur $\mathbb{R}_+$ donc y est intégrable.
- Si $x > 0$, g est positive et $g(t) = x$ au voisinage de 0 donc g est intégrable sur $]0; 1[$ d'après RIEMANN. De plus, $g(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc g est intégrable sur $[1; +\infty[$ d'après RIEMANN.

Ainsi f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $\frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{t^2} \iff t \leq 1$, on a $f(x) = \int_0^1 \operatorname{Min}\left(x, \frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt + \int_1^{+\infty} \operatorname{Min}\left(x, \frac{1}{t^2}\right)dt$.

- Si $x \in [0; 1]$, $f(x) = \int_0^1 x dt + \int_1^{1/\sqrt{x}} x dt + \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 2\sqrt{x}$.

- Si $x \geq 1$, $f(x) = \int_0^{1/x^2} x dt + \int_{1/x^2}^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 3 - \frac{1}{x}$.

f est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $f(1) = 2\sqrt{1} = 3 - \frac{1}{1} = 2$ mais elle n'est dérivable que sur

$\mathbb{R}_+^*$ car $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2} = 1$ donc $f'(1) = 1$ mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$.

3.176 La fonction $f_\alpha : t \mapsto e^{\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}} - 1$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} = 0$ donc,

comme on sait que $e^u - 1 \sim_0 u$, on a $f_\alpha(t) \sim_{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} \geq 0$ (fonctions positives). Traitons deux cas :

- Si $\alpha > 1$, $\forall t > 0$, $0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ donc f_α aussi par comparaison.

- Si $\alpha \leq 1$, $\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} = \frac{1}{2t^\alpha} - \frac{\cos(2t)}{2t^\alpha}$. Classiquement, par intégration par parties en posant $u(t) = \frac{\sin(2t)}{2}$

et $v(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, u et v sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t^\alpha} dt$ a même

nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^{\alpha+1}} dt$ qui est absolument convergente (comme ci-dessus). Mais $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ diverge par

RIEMANN, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} dt$ diverge (somme d'une convergente et d'une divergente) donc $\int_0^{+\infty} f_\alpha$ diverge.

De plus, à propos de l'étude locale au voisinage de 0, comme $\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} \sim_0 t^{2-\alpha}$:

- Si $\alpha < 2$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} = 0$ donc f_α se prolonge par continuité en posant $f_\alpha(0) = e^0 - 1 = 0$.

- Si $\alpha = 2$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} = 1$ donc f_α se prolonge par continuité en posant $f_\alpha(0) = e^1 - 1 \sim 1,72$.

- Si $\alpha > 2$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} = +\infty$. Si $n \geq 1$, $\left(\frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}\right)^n \sim_0 \frac{1}{t^{n(\alpha-2)}} = o(f_\alpha(t))$ car $u^n \underset{+\infty}{=} o(e^u) \underset{+\infty}{=} o(e^u - 1)$.

Pour n tel que $n(\alpha-2) \geq 1$, comme $\int_0^1 \frac{dt}{t^{n(\alpha-2)}}$ diverge par RIEMANN, $\int_0^1 f_\alpha(t) dt$ diverge par comparaison.

Au final, $\int_0^{+\infty} f_\alpha$ converge $\iff \left(\int_0^1 f_\alpha \text{ converge et } \int_1^{+\infty} f_\alpha \text{ converge}\right) \iff \alpha \in]1; 2]$.

3.177 a. Si $f \in E$, comme f est de classe C^2 sur $[0; 1]$, la fonction f'' est continue sur $[0; 1]$ donc ϕ va bien de E dans F . Sa linéarité provient de la linéarité de la dérivation.

Soit $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue, on sait qu'il existe une primitive g_1 de g et une primitive g_2 de g_1 sur l'intervalle $[0; 1]$ (théorème fondamental de l'intégration). Ainsi, $g_2'' = (g_2')' = g_1' = g$. Comme les seules fonctions dont

la dérivée seconde est nulle sont les fonctions affines, les fonctions dont une dérivée seconde est g sont les fonctions $G : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ définies par $G(x) = g_2(x) + ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. La condition $G(0) = G(1) = 0$ se traduit donc par $g_2(0) + b = 0$ et $g_2(1) + a + b = 0$ donc par $a = g_2(0) - g_2(1)$ et $b = -g_2(0)$.

En conclusion, la seule fonction de E telle que $\phi(G) = g$ est la fonction $G : x \mapsto g_2(x) - (g_2(1) - g_2(0))x - g_2(0)$.

Ceci prouve la bijectivité de ϕ : ϕ est donc un isomorphisme de E dans F .

Si on prend $g_1(x) = \int_0^x g(t) dt$ et $g_2(x) = \int_0^x g_1(t) dt = \int_0^x \left(\int_0^t g(u) du\right) dt$ pour laquelle $g_2(0) = 0$ et $g_2(1) = \int_0^1 \left(\int_0^t g(u) du\right) dt$. Ainsi, $\phi^{-1}(g)(x) = \int_0^x g_1(t) dt = \int_0^x \left(\int_0^t g(u) du\right) dt - x \int_0^1 \left(\int_0^t g(u) du\right) dt$.

b. G est bien définie car $t \mapsto |x - t|g(t)$ est continue sur le segment $[0; 1]$. On a une autre expression

de G qui va justifier sa régularité : $G(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 |x-t|g(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)g(t)dt + \frac{1}{2} \int_x^1 (t-x)g(t)dt$.

Ainsi : $G(x) = \frac{x}{2} \int_0^x g(t)dt - \frac{1}{2} \int_0^x tg(t)dt + \frac{1}{2} \int_x^1 tg(t)dt - \frac{x}{2} \int_x^1 g(t)dt$. Comme les fonctions $t \mapsto g(t)$ et $t \mapsto tg(t)$ sont continues sur $[0; 1]$, le théorème fondamental de l'intégration montre que G est dérivable et que $G'(x) = \frac{1}{2} \int_0^x g(t)dt + \frac{x}{2}g(x) - \frac{xg(x)}{2} - \frac{xg(x)}{2} - \frac{1}{2} \int_x^1 g(t)dt + \frac{x}{2}g(x) = \frac{1}{2} \int_0^x g(t)dt - \frac{1}{2} \int_x^1 g(t)dt$.

Sous cette forme, on voit que G' est à nouveau dérivable et on obtient $G''(x) = \frac{g(x)}{2} + \frac{g(x)}{2} = g(x)$. Comme g est continue, G est bien de classe C^2 et on a $G'' = g$ sur $[0; 1]$.

c. On sait d'après la question **a.** (cette fois-ci $g_2 = G$) que $\phi^{-1}(g)(x) = G(x) - (G(1) - G(0))x - G(0)$ donc $\phi^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 |x-t|g(t)dt - \left(\int_0^1 (1-t)g(t)dt - \int_0^1 tg(t)dt \right)x - \int_0^1 tg(t)dt \right)$. On regroupe sous une même intégrale, ce qui donne $\phi^{-1}(g)(x) = \int_0^1 \frac{|x-t| - x + 2tx - t}{2} g(t)dt$. Si on définit $k : [0; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $k(x, t) = \frac{|x-t| - x + 2tx - t}{2}$, on a donc $\forall x \in [0; 1], \phi^{-1}(g)(x) = \int_0^1 k(x, t)g(t)dt$.

d. La fonction k est continue sur le fermé borné (compact) $[0; 1]^2$ donc elle y est bornée et y atteint ses bornes. Elle n'est de classe C^1 que sur les deux triangles ouverts $T_1 = \{(x, t) \in [0; 1]^2 \mid 0 < t < x < 1\}$ et $T_2 = \{(x, t) \in [0; 1]^2 \mid 0 < x < t < 1\}$. Cherchons les points critiques dans T_1 (par exemple). Si $(x, t) \in T_1$, on a $k(x, t) = \frac{x-t-x+2tx-t}{2} = t(x-1) < 0$; si k admet en $(x, t) \in T_1$ un point critique, alors $\frac{\partial k}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial k}{\partial t}(x, t) = 0$ donc $x-1 = t = 0$: non car $(1, 0) \notin T_1$. De même, k n'admet pas de point critique dans T_2 car $k(x, t) = \frac{t-x-x+2tx-t}{2} = x(t-1) < 0$ si $(x, t) \in T_2$. Les extrema de k sont donc atteints sur $S_1 = \{(x, 0) \mid x \in [0; 1]\}$, $S_2 = \{(0, t) \mid t \in [0; 1]\}$, $S_3 = \{(x, 1) \mid x \in [0; 1]\}$, $S_4 = \{(1, t) \mid t \in [0; 1]\}$ ou $S_5 = \{(x, x) \mid x \in [0; 1]\}$. Or $k(x, 0) = k(0, t) = k(x, 1) = k(1, t) = 0$. Par contre, $k(x, x) = x^2 - x \leq 0$ qui est minimal en $x = x_0 = \frac{1}{2}$ avec $k(x_0, x_0) = -\frac{1}{4}$. Ainsi, $\max_{[0; 1]^2} k = 0$ et $\min_{[0; 1]^2} k = -\frac{1}{4}$ d'où $\|k\|_{\infty, [0; 1]^2} = \frac{1}{4}$.

Si $g \in E$, $|\phi^{-1}(g)(x)| = \left| \int_0^1 k(x, t)g(t)dt \right| \leq \int_0^1 |k(x, t)||g(t)|dt \leq \|k\|_{\infty, [0; 1]^2} \|g\|_{\infty, [0; 1]} = \frac{\|g\|_{\infty, [0; 1]}}{4}$ pour $x \in [0; 1]$. Alors $\|\phi^{-1}(g)\|_{\infty, [0; 1]} \leq \frac{\|g\|_{\infty, [0; 1]}}{4}$ donc ϕ^{-1} est $\frac{1}{4}$ -lipschitzienne donc continue.

Si ϕ était continue en 0, on aurait : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall f \in E, \|f\|_{\infty, [0; 1]} \leq \alpha \implies \|\phi(f)\|_{\infty, [0; 1]} \leq \varepsilon$. En prenant $\varepsilon = 1$, il existerait donc $\alpha > 0$ tel que (par homogénéité) $\forall f \in E, \|f\|_{\infty, [0; 1]} \leq 1 \implies \|\phi(f)\|_{\infty, [0; 1]} < \frac{1}{\alpha}$. La

fonction ϕ serait donc bornée sur la boule unité de E pour la norme infinie. Or, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \mapsto \sin(n\pi x)$, on a clairement $f_n \in E$ et $\|f_n\|_{\infty, [0; 1]} = 1$.

Pourtant, comme $\phi(f_n) = f_n'' = -n^2\pi^2 f_n$, $\|\phi(f_n)\|_{\infty, [0; 1]} = n^2\pi^2$ qui tend vers $+\infty$ si n tend vers $+\infty$.

Par conséquent, ϕ n'est pas continue en 0 (et comme ϕ est linéaire ϕ n'est continue nulle part).

3.178 a. La fonction $f : u \mapsto \frac{\cos(u)}{u}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et, comme $u \mapsto \sin(u)$ et $u \mapsto \frac{1}{u}$ sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$ et que $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sin u}{u} = 0$, le théorème d'intégration par parties montre que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ a même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2} du$. Or $\left| \frac{\sin u}{u^2} \right| \leq \frac{1}{u^2}$ donc, par comparaison, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2} du$ converge absolument par RIEMANN. Ainsi, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ converge.

b. Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. La fonction $g : u \mapsto \frac{\cos(\alpha u) - \cos(\beta u)}{u}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$ car $\cos(\alpha u) - \cos(\beta u) \underset{0}{=} 1 - \frac{\alpha^2 u^2}{2} - 1 + \frac{\beta^2 u^2}{2} + o(u^2) \underset{0}{=} O(u^2)$ donc $g(u) \underset{0}{=} o(1)$. Ainsi, g est intégrable sur $[0; 1]$. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha u) - \cos(\beta u)}{u} du$ existe d'après la question précédente car $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\alpha u)}{u} du$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\beta u)}{u} du$ convergent et $I(\alpha, \beta) = \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{+\infty} g(u) du$.

Pour $x > 0$, toujours d'après la question a., $\int_x^{+\infty} g(u) du = \int_x^{+\infty} \frac{\cos(\alpha u)}{u} du - \int_x^{+\infty} \frac{\cos(\beta u)}{u} du$. On effectue les changements de variable $t = \alpha u$ et $t = \beta u$ (faciles à justifier) dans ces intégrales et on a $\int_x^{+\infty} g(u) du = \int_{\alpha x}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt - \int_{\beta x}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{\cos t}{t} dt$ par CHASLES.

Or $\psi(t) = \frac{\cos t}{t} = \frac{1}{t} + \frac{\cos t - 1}{t} = \frac{1}{t} + \varphi(t)$ avec φ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$ (avec $\varphi(0) = 0$). Comme φ est continue sur le segment $[0; \max(\alpha, \beta)]$, elle y est bornée par $M \geq 0$ donc on obtient la majoration $\forall x \in [0; 1], \left| \int_{\alpha x}^{\beta x} \varphi(t) dt \right| \leq M|\beta - \alpha|x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\alpha x}^{\beta x} \varphi(t) dt = 0$. Comme $\int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{1}{t} dt = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, par linéarité de l'intégrale $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{\cos t}{t} dt = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. Ainsi, $I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha u) - \cos(\beta u)}{u} du = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

3.179 $f : x \mapsto \frac{\text{th}(3x) - \text{th } x}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité en 0 avec $f(0) = 2$ car $\text{th}(t) \underset{0}{=} t + o(t^2)$

donc $f(t) \underset{0}{=} \frac{3t - t + o(t^2)}{t} \underset{0}{=} 2 + o(t)$. De plus, $\text{th}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} = 1 - \frac{2e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} \underset{+\infty}{=} 1 + O(e^{-2t})$.

Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{1 + O(e^{-6x}) - 1 + O(e^{-2x})}{x} \underset{+\infty}{=} \frac{O(e^{-2x})}{x} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{e^{-2x}}{x}\right) \underset{+\infty}{=} O(e^{-x})$. Par comparaison avec une

fonction de référence intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $u > 0$, $\int_0^u \frac{\text{th}(3x) - \text{th } x}{x} dx = \int_0^u \frac{\text{th}(3x)}{x} dx - \int_0^u \frac{\text{th } x}{x} dx$ (les deux intégrales convergent). On pose $x = \frac{y}{3} = \varphi(y)$ dans la première intégrale (avec φ de classe C^1 sur le segment $[0; 3u]$) et on obtient la

relation $\int_0^u \frac{\text{th}(3x) - \text{th } x}{x} dx = \int_0^{3u} \frac{\text{th}(y)}{y} dy - \int_0^u \frac{\text{th } x}{x} dx = \int_u^{3u} \frac{\text{th } x}{x} dx$ (par CHASLES). Or $\frac{\text{th } x}{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ donc

$\int_0^u \frac{\text{th}(3x) - \text{th } x}{x} dx = \int_u^{3u} \frac{1}{x} dx + \int_u^{3u} \frac{\text{th } x - 1}{x} dx = \ln(3) - \int_u^{3u} \frac{1 - \text{th } x}{x} dx$. Or $0 \leq 1 - \text{th } x \leq 2e^{-x}$ donc

$0 \leq \int_u^{3u} \frac{1 - \text{th } x}{x} dx \leq \int_u^{3u} \frac{2e^{-x}}{x} dx \leq 2(3u - u) \frac{e^{-u}}{u} = 4e^{-u}$. Ainsi, $I = \lim_{u \rightarrow +\infty} \int_0^u \frac{\text{th}(3x) - \text{th } x}{x} dx = \ln(3)$.

3.180 a. La fonction f est de classe C^∞ sur $] -1; +\infty[$ par opérations et $f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x} > 0$ donc f est strictement

croissante. Comme $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, la fonction f réalise une bijection de $] -1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par le théorème de la bijection. Comme f' ne s'annule pas, $g = f^{-1}$ est aussi de classe C^∞ .

b. Comme $f(0) = 0$, on a directement $g(0) = 0$. De plus, on sait que $g'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$.

c. Comme g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, f admet par le théorème de TAYLOR-YOUNG un développement limité à tout ordre en tout point. Notamment, g admet un $DL_3(0)$ donné par $g(x) \underset{0}{=} 0 + \frac{x}{2} + ax^2 + bx^3 + o(x^3)$ avec

$a = \frac{g''(0)}{2}$ et $b = \frac{g'''(0)}{6}$. Mais f admet aussi un $DL_3(0)$ donné classiquement par $f(x) \underset{0}{=} 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Il suffit de composer pour avoir $f \circ g(x) \underset{0}{=} 2\left(\frac{x}{2} + ax^2 + bx^3\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + ax^2 + bx^3\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} + ax^2 + bx^3\right)^3 + o(x^3)$.

En ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à 3, $f(g(x)) \underset{0}{=} x + \left(2a - \frac{1}{8}\right)x^2 + \left(2b - \frac{a}{2} + \frac{1}{24}\right)x^3 + o(x^3)$.

Or $f(g(x)) = x$ donc, par unicité du développement limité, on a le système : $2a - \frac{1}{8} = 2b - \frac{a}{2} + \frac{1}{24} = 0$ donc $a = \frac{1}{16}$ et $b = -\frac{1}{192}$. Le développement limité à l'ordre 3 de g en 0 est donc $g(x) = x + \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{192} + o(x^3)$.

3.181 a. La fonction $t \mapsto \ln(\sin t)$ est négative et continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$. De plus, $f(t) = \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) - \ln(t) \underset{0}{\sim} -\ln(t)$

car $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$. Ainsi $f(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc f est intégrable sur $]0; \frac{\pi}{2}]$: I existe. On effectue le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ (facile à justifier) qui garantit l'existence de $\int_{\pi/2}^0 \ln(\cos u)(-1)du = J$ et $I = J$.

b. En considérant les intégrales sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, $I + J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t)dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))dt - \frac{\pi \ln 2}{2}$. On change de variable $v = 2t$ (facile à justifier), $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin v)dv = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin v)dv$ par symétrie par rapport à $\frac{\pi}{2}$ de la courbe de $v \mapsto \ln(\sin v)$ ou par changement de variable $w = \pi - v$. Alors $I + J = I + I = I - \frac{\pi \ln 2}{2}$ donc $I = J = -\frac{\pi \ln 2}{2}$. Cette intégrale est dite d'EULER.

3.182 a. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{\tan^n(x)}$ est continue sur le segment $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ en prolongeant f_n par continuité en $\frac{\pi}{2}$ avec $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Ainsi, $I_n = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\tan^n x}$ existe.

b. On pose $t = \tan(x) = \varphi(x)$ avec φ bijective de classe C^1 de $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[1; +\infty[$, d'après le théorème de changement de variable : $I_n = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{(1 + \tan^2(x)) \tan^n x} \times (1 + \tan^2(x))dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)t^n} dt$.

c. On identifie $\frac{1}{t^2(1 + t^2)} = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + \frac{ct + d}{1 + t^2} = \frac{a(1 + t^2) + bt(1 + t^2) + (ct + d)t^2}{t^2(1 + t^2)}$ ce qui donne le système $c + b = a + d = b = a - 1 = 0$ donc $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = -1$.

d. D'après les questions b. et c. : $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)t^2} dt = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1 + t^2}\right) dt$ donc, en intégrant simplement, $I_2 = \left[-\frac{1}{t} - \text{Arctan}(t)\right]_1^{+\infty} = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} \sim 0,21$.

De plus, avec le changement de variable $u = \varphi(t) = t^2$: $I_3 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)t^3} dt = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{2t dt}{(1 + t^2)(t^2)^2}$ donc $I_3 = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{du}{(1 + u)u^2} = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} + \frac{1}{1 + u}\right) du = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{u} + \ln\left(1 + \frac{1}{u}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{1 - \ln(2)}{2} \sim 0,15$.

Enfin, $I_2 + I_4 = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{(1 + t^2)t^2} + \frac{1}{(1 + t^2)t^4}\right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4} = \left[-\frac{1}{3t^3}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{3}$: $I_4 = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \sim 0,12$.

3.183 a. Des primitives des fonctions continues $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$ et $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}$ sont respectivement Arcsin et

$t \mapsto -\sqrt{1 - t^2}$ sur $[0; 1[$. Comme ces deux fonctions admettent des limites finies en 1^- , les deux intégrales de l'énoncé convergent et on a $I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = [\text{Arcsin}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{2}$ et $I_2 = \int_0^1 \frac{t dt}{\sqrt{1 - t^2}} = [-\sqrt{1 - t^2}]_0^1 = 1$.

b. La fonction $f_3 : t \mapsto \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2}}$ est continue sur $[0; 1[$ et $f_3(t) = \frac{t^2}{\sqrt{1 - t}\sqrt{1 + t}} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{1 - t}}$ donc f_3 est intégrable sur $[0; 1[$ par RIEMANN donc I_3 existe. On pose $t = \sin(u) = \varphi(u)$ où φ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $]0; \frac{\pi}{2}[$ dans $[0; 1[$ et on obtient $I_3 = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2(u) du$

donc $I_3 = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos(2u)}{2}\right) du = \left[\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.