PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 06

PSI 1 2025-2026 **du lundi 03/11 au vendredi 07/11**

1 Intégrales sur un segment, comparaison locale des fonctions, intégrales convergentes et divergentes : voir programme précédent

2 Fonctions intégrables :

- si $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, on dit que $\int_I f$ converge absolument si $\int_I |f|$ converge ;
- l'absolue convergence d'une intégrale implique sa convergence et inégalité triangulaire associée ;
- on dit que $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux est intégrable si $\int_I f$ est absolument convergente ;
- Chasles généralisé, caractérisation avec limite d'une "primitive" de $|f|$ aux bornes de l'intervalle ;
- théorème de comparaison : par $\sim$, O, o, majoration, minoration ;
- exemples d'intégrales convergentes associées à des fonctions non intégrables ;
- exemples de fonctions équivalentes dont les intégrales associées ne sont pas de même nature ;
- espaces $L^1(I, \mathbb{K})$, $L^2(I, \mathbb{K})$, produit scalaire sur les fonctions continues, inégalité de Cauchy-Schwarz ;
- pratique de la comparaison série/intégrale : surtout le principe graphique général à utiliser pour toute fonction monotone pour l'obtention de convergences, de limites ou d'équivalents ;

3 Dénombrement :

- révision sur les ensembles finis : définition et cardinaux, parties d'un ensemble fini, applications entre ensembles finis, fonctions caractéristiques et relation avec les cardinaux ;
- "révision" sur le dénombrement : cardinal d'une réunion disjointe, d'un produit cartésien, de l'ensemble des applications (injections) entre deux ensembles, des p-listes, des p-listes d'éléments distincts deux à deux, de l'ensemble des parties, de l'ensemble des parties de cardinal fixé, coefficient binomiaux et relations associées, formules du crible et du multinôme hors programme mais évoquées ;
- ensembles dénombrables : propriétés, quelques exemples et contre-exemples ;

4 Sommabilité : que des exercices d'applications, rien de théorique

- définition de l'ordre, de $+$ et $\times$ dans $[0; +\infty]$, existence de borne supérieure $A \subset [0; +\infty]$;
- définition de la somme $\sum_{i \in I} x_i$ d'une famille quelconque d'éléments de $[0; +\infty]$ par la borne supérieure dans $[0; +\infty]$ des sommes $\sum_{i \in J} x_i$ quand J parcourt les parties finies de I ;
- restriction, linéarité, croissance, sommation par paquets, commutativité de la somme, relation de Fubini, relations sur les familles produits dans le cas de somme de familles d'éléments de $[0; +\infty]$;
- définition d'une famille sommable de complexes ; somme de la famille dans ce cas ;
- comparaison, restriction, linéarité, croissance, sommation par paquets, commutativité de la somme, relation de Fubini, relations sur les familles produits pour les familles sommables complexes ;

QUESTIONS DE COURS :

1. définir la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ si $f :]a; b[\to \mathbb{K}$ est continue par morceaux (déf. 3.10)
2. énoncer le théorème de changement de variable sur des intervalles ouverts (th. 3.26)
3. énoncer le théorème d'intégration par parties sur des intervalles ouverts (th. 3.27)
4. énoncer le théorème de comparaison concernant l'intégrabilité (th. 3.30)
5. prouver que si f et g sont continues sur I et si $\int_I f$ CV et $\int_I g$ DV, alors $\int_I (f + g)$ DV (th. 3.25)
6. prouver que si $a \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha > 0$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{e^{iat}}{t^\alpha} dt$ converge (exem. 3.36)
7. prouver que si f et g sont de carré intégrable sur I, alors fg est intégrable sur I (prop. 3.34)

Prévision pour la prochaine semaine : révision sur intégrales, probabilités et début de la réduction