DM 01 : E3A PSI 2005 MATHS2 EXERCICE 1

PSI 1 2025/2026 **pour vendredi 05 septembre 2025**

$\boxed{1}$ On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+(1/n)}\right) - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ donc, par développements limités, on a $u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) - \left(\dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, comme la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ est donc absolument convergente.

Cela donnait $u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) - \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} -\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ avec des développements limités en o, donc $\boxed{u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2} < 0}$ et on conclut de même.

Par dualité suite/série, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est donc convergente (vers $\gamma \sim 0,577$).

$\boxed{2}$ Premières études

$\boxed{2.1}$ h_x est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et $\forall t > 0,\ h_x'(t) = \dfrac{1 - x\ln(t)}{t^{x+1}}$. Ainsi, h_x est croissante sur $]0; e^{1/x}]$ et décroissante sur $[e^{1/x}; +\infty[$ avec, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 0^+} h_x(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} h_x(t) = 0^+$.

$\boxed{2.2}$ D'après 2.1 pour $x = 1$, $\forall n \geqslant 3,\ \forall t \in [n; n+1],\ \dfrac{\ln(t)}{t} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$ et $\forall n \geqslant 4,\ \forall t \in [n-1; n],\ \dfrac{\ln(n)}{n} \leqslant \dfrac{\ln(t)}{t}$ car h_1 est décroissante sur $[e; +\infty[$ et donc sur $[3; +\infty[$ car $e \sim 2,72 < 3$. Par croissance de l'intégrale, en intégrant ces inégalités respectivement sur $[n; n+1]$ et $[n-1; n]$, on obtient les inégalités demandées : $\boxed{\forall n \geqslant 3,\ \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}dt \leqslant \frac{\ln(n)}{n} \text{ et } \forall n \geqslant 4,\ \frac{\ln(n)}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t)}{t}dt}$ car les intervalles sont de longueur 1.

$\boxed{2.3}$ Pour $n \geqslant 3$ et en sommant la première inégalité précédente pour $k \in [\![3; n]\!]$, on obtient par la relation de Chasles : $\left[\dfrac{\ln(t)^2}{2}\right]_3^{n+1} = \displaystyle\int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}dt \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln^2(n+1) = +\infty$, le minorant étant de limite infinie, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln(n)}{n}$ diverge car la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Plus simplement, on avait la minoration $\forall n \geqslant 3,\ \dfrac{\ln(n)}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$ qui donne aussi la divergence par comparaison à la série harmonique.

Toujours est-il que $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n} \text{ n'est pas absolument convergente.}}$

$\boxed{3}$ Comparaison

$\boxed{3.1}$ Si $n \geqslant 3$, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} - \dfrac{1}{2}\Big(\ln^2(n+1) - \ln^2(n)\Big)$ et la seconde inégalité de la question 2.2 donne $\dfrac{1}{2}\Big(\ln^2(n+1) - \ln^2(n)\Big) = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}dt \geqslant \frac{\ln(n+1)}{n+1}$. On obtient donc $\boxed{\forall n \geqslant 3,\ a_{n+1} - a_n \leqslant 0.}$

$\boxed{3.2}$ Soit $n \geqslant 3$, en utilisant cette fois la première inégalité de 2.2 et en sommant pour $k \in [\![3; n]\!]$, on obtient $T_n = \dfrac{\ln(2)}{2} + \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \geqslant \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}dt \geqslant \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^{n} \frac{\ln(t)}{t}dt$ d'où $\forall n \geqslant 3,\ a_n \geqslant \dfrac{\ln(2)}{2} - \dfrac{\ln^2(3)}{2}$.

La suite $\boxed{(a_n)_{n\geqslant 1} \text{ est donc minorée.}}$ Étant décroissante à partir du rang 3, $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$

4 On évalue $a_{n+1}-a_n = T_{n+1}-T_n-\dfrac{\ln^2(n+1)-\ln^2(n)}{2} = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\ln(n)\Big(1+\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\Big)$ d'où $a_{n+1}-a_n = \dfrac{1}{n}\Big(\dfrac{1}{1+(1/n)}\Big)\Big(\ln(n)+\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\Big)-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\ln(n)\Big(2+\dfrac{1}{\ln(n)}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\Big)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &\underset{+\infty}{=} \frac{1}{n}\Big(1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\Big(\ln(n)+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)-\Big(\frac{1}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\ln(n)\Big(1+O\Big(\frac{1}{n\ln(n)}\Big)\Big)\\
&\underset{+\infty}{=} \frac{1}{n}\Big(\ln(n)+O\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big)\Big)-\ln(n)\Big(\frac{1}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\\
&\underset{+\infty}{=} O\Big(\frac{\ln(n)}{n^2}\Big)\underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)
\end{aligned}$$

donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}(a_{n+1}-a_n)$ converge absolument par Riemann et $\boxed{(a_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge par dualité suite/série.}}$

5 On découpe S_{2n} en deux parties contenant respectivement les termes d'indices pairs et impairs. Pour tout entier $n\geqslant 3$, on a donc

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}.$$

Dans la seconde somme, on ajoute et on enlève les termes d'indices pairs :

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k}-\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k}\Big)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k}$$

dont découle $S_{2n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\ln(2k)}{k}-\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{\ln(k)}{k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\ln(2)+\ln(k)}{k}-T_{2n}$.

En scindant la première somme, on a donc la relation

$$S_{2n}=T_n-T_{2n}+\ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

On fait intervenir les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et

$$\boxed{\forall n\geqslant 3,\ S_{2n}=(u_n+\ln(n))\ln(2)+a_n+\frac{\ln^2(n)}{2}-a_{2n}-\frac{\ln^2(2n)}{2}.}$$

6 En écrivant que $\dfrac{\ln^2(2n)}{2}=\dfrac{(\ln(n)+\ln(2))^2}{2}=\dfrac{\ln^2(n)}{2}+\ln(n)\ln(2)+\dfrac{\ln^2(2)}{2}$, on a donc avec la relation de la question précédente et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\gamma$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-a_{2n})=0$ car $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge, la limite suivante

$S_{2n}=u_n\ln(2)+(a_n-a_{2n})-\dfrac{\ln^2(2)}{2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\gamma\ln(2)-\dfrac{\ln^2(2)}{2}$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}=\gamma\ln(2)-\dfrac{\ln^2(2)}{2}.}$

7 Comme $S_{2n+1}=S_{2n}-\dfrac{\ln(2n+1)}{2n+1}$ et que $\ln(2n+1)\underset{+\infty}{=}o(2n+1)$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n+1}=\gamma\ln(2)-\dfrac{\ln^2(2)}{2}$.

Puisque $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ convergent vers la même limite $\gamma\ln(2)-\dfrac{\ln^2(2)}{2}$, la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ fait de même et $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n\dfrac{\ln(n)}{n}$ converge donc avec $\boxed{S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(n)}{n}=\gamma\ln(2)-\dfrac{\ln^2(2)}{2}\sim 0,173.}$