

DM 01 : E3A PSI 2005 MATHS2 EXERCICE 1

PSI 1 2025/2026

pour vendredi 05 septembre 2025

Pour tout entier $n \geq 3$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}, \quad T_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} \quad \text{et} \quad a_n = T_n - \frac{(\ln(n))^2}{2}.$$

Pour tout réel $x > 0$, on définit $h_x :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $h_x(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}$.

- 1** Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

On note γ la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Ainsi $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln(n) \right)$.

2 Premières études

- 2.1** Déterminer le tableau de variation de h_x .

- 2.2** Justifier les inégalités : $\forall n \geq 3, \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \frac{\ln(n)}{n}$ et $\forall n \geq 4, \frac{\ln(n)}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{\ln(t)}{t} dt$.

- 2.3** Prouver que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ n'est pas absolument convergente.

3 Comparaison : grâce aux inégalités obtenues au 2.2, montrer que

- 3.1** La suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.

- 3.2** La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge.

- 4** Indépendamment de la question 3, et sans utiliser les inégalités de la question 2.2, montrer d'une autre manière que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge.

- 5** Montrer que $\forall n \geq 3, S_{2n} = T_n - T_{2n} + \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \ln(2)$.

En déduire une expression de S_{2n} où figurent a_n, a_{2n} et u_n .

- 6** Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}$ (on exprimera cette limite en fonction de γ et de $\ln(2)$).

- 7** En déduire la convergence de $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ et donner la valeur de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.