

DM 04 : POTION MAGIQUE

PSI 1 2025/2026

pour le vendredi 07/11/2025

OBÉLIX voudrait bien pouvoir goûter la potion magique. PANORAMIX lui propose alors un petit jeu.

Il place dans un panier $N \geq 1$ haricots blancs et N haricots noirs. OBÉLIX tire alors au hasard un haricot.

- S'il tire un haricot blanc : PANORAMIX accepte de lui donner un peu de potion et le jeu s'arrête.
- S'il tire un haricot noir, PANORAMIX replace ce haricot noir dans le panier et y ajoute des haricots noirs supplémentaires. On note alors u_1 le nombre de haricots noirs contenus dans le panier.

Et ainsi de suite... Pour $k \geq 1$:

- Si au k^e tirage, le haricot est blanc, PANORAMIX fait goûter la potion à OBÉLIX et le jeu s'arrête.
- Sinon, il replace le haricot noir dans le panier en y ajoutant des haricots noirs. On note alors u_k haricots noirs contenus dans le panier et on repart pour un tour...

On définit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les événements suivants :

- N_k = "OBÉLIX obtient un haricot noir au k^e tirage".
- A_k = "OBÉLIX gagne le droit de goûter la potion à l'issue du k^e tirage".
- R_k = "OBÉLIX n'obtient que des haricots noirs au cours des k premières tentatives".

On pose G = "OBÉLIX goûte la potion magique". On pose enfin $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $q_k = \mathbb{P}(R_k)$.

PARTIE 1 : PANORAMIX EST RÉGULIER

Dans cette partie, on suppose que PANORAMIX rajoute à chaque étape N haricots noirs dans le panier.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note u_k le nombre de haricots noirs contenus dans le panier avant le $(k+1)^e$ tirage.

1.1 Calculer u_k pour $k \geq 0$. Pour $k \geq 1$, exprimer R_k en fonction de $N_1, \dots, N_k$. En déduire que $\mathbb{P}(R_k) = \frac{1}{k+1}$.

1.2 Calculer $\mathbb{P}(A_1)$ puis $\mathbb{P}(A_k)$ pour tout entier $k \geq 2$.

1.3 On suppose que la potion magique gagne en puissance à force de rester dans la marmite.

Si OBÉLIX goûte la potion après k tentatives, la probabilité qu'il en ressente les effets vaut $\frac{k}{k+2}$.

Calculer la probabilité de l'évènement E = "OBÉLIX ressent les effets de la potion magique".

On pourra utiliser le fait que $\forall j \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(j+1)(j+2)} = \frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+2}$.

1.4 Exprimer $\bar{G}$ en fonction des R_k . En déduire la probabilité qu'OBÉLIX goûte la potion magique.

PARTIE 2 : PANORAMIX SE LÂCHE

On suppose dans cette partie que PANORAMIX rajoute à chaque étape un nombre quelconque de haricots.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note u_k le nombre de haricots noirs contenus dans le panier avant le $(k+1)^e$ tirage.

On a $u_0 = N$ et la suite $(u_k)_{k \geq 0}$ est croissante. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2.1 Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(R_k) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{u_j}{N + u_j}$.

2.2 Prouver que la suite $(q_k)_{k \geq 1}$ est monotone et que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 < q_k \leq \frac{1}{2}$.

En déduire que la suite $(q_k)_{k \geq 1}$ est convergente. On pose $L = \lim_{k \rightarrow +\infty} q_k$. Encadrer L .

Montrer que l'évènement G = "OBÉLIX goûte la potion" est quasi-certain si et seulement si $L = 0$.

2.3 Prouver que la suite $\left(\ln \left(\frac{1}{q_k} \right) \right)_{k \geq 1}$ converge si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{u_k}$ converge.

En déduire que G est un évènement quasi-certain si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{u_k}$ diverge.

DM 04 : POTION MAGIQUE

PSI 1 2025/2026

pour le vendredi 07/11/2025

On suppose choisie un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ pour modéliser cette expérience de telle sorte que les ensembles élémentaires N_k (tirage d'un haricot à l'étape k) soit un évènement : $\forall k \in \mathbb{N}^*, N_k \in \mathcal{A}$.

Il faut bien imposer quelque chose pour pouvoir travailler sur les probabilités de certains évènements.

PARTIE 1 : PANORAMIX EST RÉGULIER

1.1 La suite $(u_k)_{k \geq 0}$ est arithmétique de raison N et $u_0 = N$ donc $\boxed{\forall k \geq 0, u_k = N(k+1)}$.

Par définition, on a $\forall k \geq 1, R_k = N_1 \cap \dots \cap N_k$. Ceci prouve (par réunion d'évènements) que les R_k font aussi partie de la tribu $\mathcal{A}$ donc sont aussi des évènements. On en déduit par la formule des probabilités composées que $\mathbb{P}(R_k) = \mathbb{P}(N_1) \mathbb{P}_{N_1}(N_2) \dots \mathbb{P}_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}}(N_k)$. Si $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$ et $\omega \in N_1 \cap \dots \cap N_{i-1}$, le panier contient après le $(i-1)^e$ tirage u_{i-1} haricots noirs et N haricots blancs. Ainsi $\mathbb{P}_{N_1 \cap \dots \cap N_{i-1}}(N_i) = \frac{u_{i-1}}{u_{i-1} + N}$. On ob-

tient donc $\boxed{\forall k \geq 1, \mathbb{P}(R_k) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(N_i) = \prod_{i=1}^k \frac{u_{i-1}}{u_{i-1} + N} = \prod_{i=1}^k \frac{i}{i+1} = \frac{1}{k+1}}$ par télescopage multiplicatif.

1.2 Comme $A_1 = \overline{N_1} = \overline{R_1} \in \mathcal{A}$, on a $\boxed{\mathbb{P}(A_1) = 1 - \mathbb{P}(R_1) = 1 - \mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{2}}$.

De plus, pour $k \geq 2, A_k = R_{k-1} \cap \overline{N_k} \in \mathcal{A}$ donc $\boxed{\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(R_{k-1}) \mathbb{P}_{R_{k-1}}(\overline{N_k}) = \frac{1}{k} \times \frac{N}{kN + N} = \frac{1}{k(k+1)}}$ puisque pour le k^e tirage il y a $u_{k-1} = kN$ haricots noirs et N haricots blancs dans le panier.

1.3 On note $E_k = "$ OBÉLIX ressent les effets de la potion s'il la goûte après le k^e tirage".

D'après l'énoncé $E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (A_k \cap E_k)$ (réunion dénombrable) donc $E \in \mathcal{A}$. Ces évènements sont incompatibles et $\mathbb{P}(A_k \cap E_k) = \mathbb{P}(A_k) \mathbb{P}_{A_k}(E_k) = \frac{1}{k(k+1)} \times \frac{k}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ par hypothèse. Par σ -additivité, on

trouve $\boxed{\mathbb{P}(E) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k \cap E_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2}}$ par télescopage additif.

1.4 Par définition de G , $\boxed{\overline{G} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} R_k}$ (OBÉLIX ne goûte jamais la potion si on ne tire que des haricots noirs)

donc $G \in \mathcal{A}$. Comme $(R_k)_{k \geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion, par théorème de continuité décroissante :

$\boxed{\mathbb{P}(\overline{G}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(R_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k+1} = 0}$. Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(G) = 1}$ et OBÉLIX goûte presque sûrement la potion.

PARTIE 2 : PANORAMIX SE LÂCHE

2.1 On utilise à nouveau la formule des probabilités composées pour affirmer que, puisque $R_k = N_1 \cap \dots \cap N_k$,

on a $q_k = \mathbb{P}(R_k) = \mathbb{P}(N_1) \mathbb{P}_{N_1}(N_2) \cdots \mathbb{P}_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}}(N_k) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{u_j}{N + u_j}$ car il y a dans le panier après le j^e tirage (donc pour décider du $(j+1)^e$ u_j haricots noirs et N haricots blancs.

2.2 Pour $k \geq 1$, on a clairement $q_k > 0$. De plus, $\frac{q_{k+1}}{q_k} = \frac{u_k}{N + u_k} < 1$ (car $N > 0$) d'après la question précédente

donc la suite $(q_k)_{k \geq 1}$ est strictement décroissante. Ainsi $\forall k \geq 1, 0 < q_k \leq q_1 = \frac{N}{N + N} = \frac{1}{2}$.

Comme $(q_k)_{k \geq 1}$ est décroissante et minorée par 0, elle converge vers un réel $L = \lim_{k \rightarrow +\infty} q_k$ qui vérifie

$L \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ en passant à la limite dans l'encadrement $0 < q_k \leq \frac{1}{2}$.

Par définition, $G = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ (réunion dénombrable d'évènements incompatibles donc à nouveau $G \in \mathcal{A}$) ainsi,

par σ -additivité, on a $\mathbb{P}(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$. Mais on a mieux, comme à la question 1.4 : $\overline{G} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} R_k$. Et comme $(R_k)_{k \geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion, par continuité décroissante : $\mathbb{P}(\overline{G}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(R_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_k = L$.

Ainsi : $G \text{ est presque sûr} \iff \mathbb{P}(G) = 1 \iff \mathbb{P}(\overline{G}) = 0 \iff L = 0$.

2.3 La suite $\left(\ln\left(\frac{1}{q_k}\right)\right)_{k \geq 1}$ est à termes strictement positifs car $q_k \in]0; 1[$. On sait que $\left(\ln\left(\frac{1}{q_k}\right)\right)_{k \geq 1}$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq 1} \left(\ln\left(\frac{1}{q_{k+1}}\right) - \ln\left(\frac{1}{q_k}\right)\right)$ converge. Mais puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_k = +\infty$ par hypothèse, $\ln\left(\frac{1}{q_{k+1}}\right) - \ln\left(\frac{1}{q_k}\right) = \ln\left(\frac{q_k}{q_{k+1}}\right) = \ln\left(\frac{u_k + N}{u_k}\right) = \ln\left(1 + \frac{N}{u_k}\right) \sim \frac{N}{u_k}$ et N est une constante.

Par théorème de comparaison, on a donc $\left(\ln\left(\frac{1}{q_k}\right)\right)_{k \geq 1}$ converge $\iff \sum_{k \geq 0} \frac{1}{u_k}$ converge.

D'après la question précédente, G est presque sûr $\iff \lim_{k \rightarrow +\infty} q_k = 0 \iff \lim_{k \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{q_k}\right) = +\infty$. De plus, si $L > 0$, la suite $\left(\ln\left(\frac{1}{q_k}\right)\right)_{k \geq 1}$ converge vers $-\ln(L)$.

Ainsi, d'après ce qui précède, G est un évènement quasi-certain si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{u_k}$ diverge (ses sommes partielles tendant alors vers $+\infty$).