

DEVOIR 08 : INTÉGRALES DÉNOMBRÉES

PSI 1 2025-2026

mardi 04 novembre 2025

QCM

1 Convergence d'intégrale et intégrabilité : soit $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux

1.1 $f \sim_{+\infty} g \implies \left(\int_0^{+\infty} f \text{ ACV} \iff \int_0^{+\infty} g \text{ ACV} \right)$ **1.3** $(0 \leq f \leq g \text{ et } \int_0^{+\infty} f \text{ diverge}) \implies \int_0^{+\infty} g \text{ diverge}$

1.2 f intégrable sur $\mathbb{R}_+ \implies f$ bornée sur $\mathbb{R}_+$ **1.4** $(f = O(g) \text{ et } \int_0^{+\infty} g \text{ CV}) \implies f$ intégr.

2 Dans la classe, il y a 6 filles (ensemble F) et 33 garçons (ensemble G). Tous les élèves de la classe participent à un jeu et on met les trois premiers sur un podium

2.1 Il y a $\frac{33!}{6!}$ applic. inject. de F dans G **2.3** Il y a $\binom{39}{3}$ trinômes possibles

2.2 Il y a 33^6 applications de G dans F **2.4** Il y a $39 \times 38 \times 37$ podiums possibles (3 premiers ordonnés)

3 Fonctions entre ensembles finis : soit $f : E \rightarrow F$ où E est de cardinal n et F de cardinal p

3.1 f injective $\implies n \leq p$ **3.3** f injective $\iff f$ surjective $\iff f$ bijective

3.2 f surjective $\implies n \geq p$ **3.4** Si $n \geq p$, il y a $\binom{n}{p} \times (n-p)^p$ appl. surj. de E dans F

4 Trigonométrie

4.1 Pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{\tan(\theta)}$ **4.3** $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}'(\text{sh}(x)) = \frac{1}{\text{ch}(x)}$

4.2 Pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$ **4.4** $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(\text{Arctan}(\text{sh}(x))\right)' = \frac{1}{\text{ch}(x)}$

Énoncé Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Soit un réel α . Donner dans chacun des cas suivants la conclusion quant à l'intégrabilité ou non de f sur $]0; 1]$ ou $[1; +\infty[$.

- Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = k \neq 0$ avec $\alpha > 1$, alors
- Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ avec $\alpha \leq 1$, alors
- Si $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha f(t) = k \neq 0$ avec $\alpha \geq 1$, alors
- Si $f(t) = O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $\alpha < 1$, alors

Preuve Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x > 0$, $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

Montrer que $\int_1^{+\infty} f_\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 1 Par intégration par parties, montrer la convergence et calculer la valeur exacte de l'intégrale

$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx$. Indication : on choisira judicieusement la constante d'intégration lors de l'opération.

Exercice 2 a. Pour $a \in \mathbb{R}$ donner la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^a)$ selon la valeur de a .

b. Soit $a \in \mathbb{R}$, justifier que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$ converge. On note $I(a)$ sa valeur.

c. Par le changement de variable $x = \frac{1}{t}$ à justifier, montrer que $I(a) = \frac{\pi}{4}$.

DEVOIR 08	NOM :	PRÉNOM :
-----------	-------	----------

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

i · j	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1	X		X		
2			X	X	
3	X	X			
4		X		X	

1.1 Vrai : comparaison (iv) **1.2** Faux : cours **1.3** Vrai : cours **1.4** Faux : $f = g$ avec $\int_0^{+\infty} f$ semi-CV.

2.1 Faux : c'est $\frac{33!}{(33-6)!}$ **2.2** Faux : c'est 6^{33} **2.3** Vrai : 3-parties de la classe **2.4** Vrai : $A_{39}^3 = 39 \times 38 \times 37$.

3.1 Vrai : f injective implique $\text{card}(f(E)) = \text{card}(E) = n$ alors que $f(E) \subset F$ **3.2** Vrai : f surjective implique $f(E) = F$ et $\text{card}(f(E)) \leq \text{card}(E)$ **3.3** Faux : on n'a pas dit que $n = p$ **3.4** Faux : le protocole que cette formule sous-entend n'est pas bijectif.

4.1 : Faux : si $\theta = 0$ **4.2** Vrai : calcul **4.3** Faux : c'est $\frac{1}{\text{ch}^2(x)}$ **4.4** Vrai : $\left(\text{Arctan}(\text{sh}(x))\right)' = \frac{\text{ch}(x)}{1 + \text{sh}^2(x)}$.

Énoncé Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = k \neq 0$, alors f est intégrable sur $[1; +\infty[$.
- S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$, alors f n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$.
- S'il existe $\alpha \geq 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha f(t) = k \neq 0$, alors f n'est pas intégrable sur $]0; 1]$.
- S'il existe si $\alpha < 1$ et $f(t) = O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$, alors f est intégrable sur $]0; 1]$.

Preuve Pour tout α réels, la fonction f_α est continue sur $[1; +\infty[$.

Si $\alpha = 1$, $x \geq 1$: $\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\ln(t)\right]_1^x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$: $\int_1^{+\infty} f_1$ diverge.

Si $\alpha < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_1^x = +\infty$: $\int_1^{+\infty} f_\alpha$ diverge.

Si $\alpha > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{\alpha-1}$: $\int_1^{+\infty} f_\alpha$ converge et $\int_1^{+\infty} f_\alpha = \frac{1}{\alpha-1}$.

Exercice 1 $u : x \mapsto \ln(1-x^2)$ et $v : x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ sont C^1 sur $]0; 1[$. Or $\ln(1-x^2) \sim -x^2$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \ln(1-x) = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)v(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} u(x)v(x)$. Par le théorème d'IPP, $\int_0^1 u(x)v'(x)dx = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx$ et

$\int_0^1 u'(x)v(x)dx$ ont même nature. Or $u'(x)v(x) = \frac{2}{1+x}$ donc $\int_0^1 u'v$ converge car $u'v$ se prolonge par

continuité sur le segment $[0; 1]$. L'intégrale converge donc et $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx = -\int_0^1 \frac{2dx}{1+x} = -2\ln(2)$.

Exercice 2 **a.** Si $a = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^a) = 2$. Pour $a < 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^a) = +\infty$. Quand $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^a) = 1$.

b. $f_a : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)(1+x^a)}$ est continue sur $]0; +\infty[$, se prolonge par continuité en 0 en posant $f_0(0) = 1/2$,

$f_a(0) = 1$ si $a > 0$ et $f_a(0) = 0$ si $a < 0$ d'après **a.**. De plus, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall x \geq 0$, $0 \leq f_a(x) \leq \frac{1}{1+x^2} = g(x)$ et g est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $g(x) \sim \frac{1}{x^2}$. Par comparaison, f_a est aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

c. $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t}$ est C^1 , bijective et strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ donc, par le changement de variable $x = \frac{1}{t} = \varphi(t)$, on a $I(a) = \int_{+\infty}^0 \frac{-t^a}{(1+t^2)(1+t^a)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x^2)(1+x^a)} dx$. En sommant, par linéarité, $2I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^a}{(1+x^2)(1+x^a)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\text{Arctan}(x)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ donc $I(a) = \frac{\pi}{4}$.