DM 04 : POTION MAGIQUE

PSI 1 2025/2026 **pour le vendredi 07/11/2025**

On suppose choisie un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ pour modéliser cette expérience de telle sorte que les ensembles élémentaires N_k (tirage d'un haricot à l'étape k) soit un évènement : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ N_k \in \mathcal{A}$.

Il faut bien imposer quelque chose pour pouvoir travailler sur les probabilités de certains évènements.

PARTIE 1 : PANORAMIX EST RÉGULIER

1.1 La suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$ est arithmétique de raison N et $u_0 = N$ donc $\boxed{\forall k \geqslant 0,\ u_k = N(k+1).}$

Par définition, on a $\forall k \geqslant 1,\ R_k = N_1 \cap \cdots \cap N_k$. Ceci prouve (par réunion d'événements) que les R_k font aussi partie de la tribu $\mathcal{A}$ donc sont aussi des évènements. On en déduit par la formule des probabilités composées que $\mathbb{P}(R_k) = \mathbb{P}(N_1)\,\mathbb{P}_{N_1}(N_2)\cdots\mathbb{P}_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(N_k)$. Si $i \in [\![1;k]\!]$ et $\omega \in N_1 \cap \cdots \cap N_{i-1}$, le panier contient après le $(i-1)^e$ tirage u_{i-1} haricots noirs et N haricots blancs. Ainsi $\mathbb{P}_{N_1\cap\cdots\cap N_{i-1}}(N_i) = \dfrac{u_{i-1}}{u_{i-1}+N}$. On obtient donc $\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}(R_k) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(N_i) = \prod_{i=1}^{k} \frac{u_{i-1}}{u_{i-1}+N} = \prod_{i=1}^{k} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{k+1}}$ par télescopage multiplicatif.

1.2 Comme $A_1 = \overline{N_1} = \overline{R_1} \in \mathcal{A}$, on a $\boxed{\mathbb{P}(A_1) = 1 - \mathbb{P}(R_1) = 1 - \mathbb{P}(N_1) = \frac{1}{2}.}$

De plus, pour $k \geqslant 2$, $A_k = R_{k-1} \cap \overline{N_k} \in \mathcal{A}$ donc $\boxed{\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(R_{k-1})\,\mathbb{P}_{R_{k-1}}(\overline{N_k}) = \frac{1}{k} \times \frac{N}{kN+N} = \frac{1}{k(k+1)}}$

puisque pour le k^e tirage il y a $u_{k-1} = kN$ haricots noirs et N haricots blancs dans le panier.

1.3 On note E_k = "Obélix ressent les effets de la potion s'il la goûte après le k^e tirage".

D'après l'énoncé $E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (A_k \cap E_k)$ (réunion dénombrable) donc $E \in \mathcal{A}$. Ces évènements sont incompatibles et $\mathbb{P}(A_k \cap E_k) = \mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}_{A_k}(E_k) = \dfrac{1}{k(k+1)} \times \dfrac{k}{k+2} = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ par hypothèse. Par σ-additivité, on trouve $\boxed{\mathbb{P}(E) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k \cap E_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}}$ par télescopage additif.

1.4 Par définition de G, $\boxed{\overline{G} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} R_k}$ (Obélix ne goûte jamais la potion si on ne tire que des haricots noirs) donc $G \in \mathcal{A}$. Comme $(R_k)_{k\geqslant 1}$ est décroissante pour l'inclusion, par théorème de continuité décroissante : $\boxed{\mathbb{P}(\overline{G}) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(R_k) = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 0.}$ Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(G) = 1}$ et Obélix goûte presque sûrement la potion.

PARTIE 2 : PANORAMIX SE LÂCHE

2.1 On utilise à nouveau la formule des probabilités composées pour affirmer que, puisque $R_k = N_1 \cap \cdots \cap N_k$,

on a $\boxed{q_k = \mathbb{P}(R_k) = \mathbb{P}(N_1)\,\mathbb{P}_{N_1}(N_2)\cdots\mathbb{P}_{N_1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(N_k) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{u_j}{N+u_j}}$ car il y a dans le panier après le j^e tirage (donc pour décider du $(j+1)^e$) u_j haricots noirs et N haricots blancs.

2.2 Pour $k \geqslant 1$, on a clairement $q_k > 0$. De plus, $\dfrac{q_{k+1}}{q_k} = \dfrac{u_k}{N+u_k} < 1$ (car $N > 0$) d'après la question précédente

donc $\boxed{\text{la suite } (q_k)_{k\geqslant 1} \text{ est strictement décroissante.}}$ Ainsi $\boxed{\forall k \geqslant 1,\ 0 < q_k \leqslant q_1 = \frac{N}{N+N} = \frac{1}{2}.}$

Comme $(q_k)_{k\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0, elle converge vers un réel $L = \lim\limits_{k\to+\infty} q_k$ qui vérifie $\boxed{L \in \left[0; \frac{1}{2}\right]}$ en passant à la limite dans l'encadrement $0 < q_k \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Par définition, $G = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ (réunion dénombrable d'évènements incompatibles donc à nouveau $G \in \mathcal{A}$) ainsi, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(G) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$. Mais on a mieux, comme à la question **1.4** : $\overline{G} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} R_k$. Et comme $(R_k)_{k\geqslant 1}$ est décroissante pour l'inclusion, par continuité décroissante : $\mathbb{P}(\overline{G}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(R_k) = \lim\limits_{n\to+\infty} q_k = L$.

Ainsi : $\boxed{G \text{ est presque sûr} \iff \mathbb{P}(G) = 1 \iff \mathbb{P}(\overline{G}) = 0 \iff L = 0.}$

2.3 La suite $\left(\ln\left(\frac{1}{q_k}\right)\right)_{k\geqslant 1}$ est à termes strictement positifs car $q_k \in]0;1[$. On sait que $\left(\ln\left(\frac{1}{q_k}\right)\right)_{k\geqslant 1}$ converge si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\ln\left(\frac{1}{q_{k+1}}\right) - \ln\left(\frac{1}{q_k}\right)\right)$ converge. Mais puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_k = +\infty$ par hypothèse, $\ln\left(\frac{1}{q_{k+1}}\right) - \ln\left(\frac{1}{q_k}\right) = \ln\left(\frac{q_k}{q_{k+1}}\right) = \ln\left(\frac{u_k+N}{u_k}\right) = \ln\left(1+\frac{N}{u_k}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{N}{u_k}$ et N est une constante.

Par théorème de comparaison, on a donc $\boxed{\left(\ln\left(\frac{1}{q_k}\right)\right)_{k\geqslant 1} \text{ converge} \iff \sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{u_k} \text{ converge.}}$

D'après la question précédente, G est presque sûr $\iff \lim\limits_{k\to+\infty} q_k = 0 \iff \lim\limits_{k\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{q_k}\right) = +\infty$. De plus, si $L > 0$, la suite $\left(\ln\left(\frac{1}{q_k}\right)\right)_{k\geqslant 1}$ converge vers $-\ln(L)$.

Ainsi, d'après ce qui précède, $\boxed{G \text{ est un évènement quasi-certain si et seulement si la série } \sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{u_k} \text{ diverge}}$ (ses sommes partielles tendant alors vers $+\infty$).