

CHAPITRE 6

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

PARTIE 6.1 : MODES DE CONVERGENCE

DÉFINITION 6.1 :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. On dit que :

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge simplement** sur I vers $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ (sa **limite simple**) si $\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniformément** sur I vers f si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$ ($f_n - f$ bornée si n assez grand).
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur tout segment** de I vers f si pour tout segment $[a; b] \subset I$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a; b]$ (comme son nom l'indique).

REMARQUE 6.1 : • Convergence simple : $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

- Convergence uniforme : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
- Conv. unif. sur tout segment : $\forall \varepsilon > 0, \forall [a; b] \subset I, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in [a; b], |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
- CVS : n_0 dépend de ε et x . CVU : n_0 dépend de ε seulement. CVUTS : n_0 dépend de ε et de a, b .
- Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement (resp. uniformément) sur I , elle le fait sur tout partie J de I .
- Pour I segment, les notions de convergence uniforme sur I et sur tout segment de I sont équivalentes.

PROPOSITION 6.1 :

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVU vers f sur $I \implies (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVU vers f sur TS de $I \implies (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVS vers f sur I .

DÉFINITION 6.2 :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, on dit que :

- $\sum f_n$ **converge simplement** sur I si $\forall x \in I, \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ converge. On note $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ sa somme.
- $\sum f_n$ **converge uniformément** sur I si $\left(S_n = \sum_{k=0}^n f_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I ou encore que $\left(R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur I ($\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty} = 0$).
- $\sum f_n$ **converge uniformément sur tout segment** de I si $\forall [a; b] \subset I, \sum f_n$ CVU sur $[a; b]$.
- $\sum f_n$ **converge normalement** sur I si $\sum_{n \geq n_0} \|f_n\|_{\infty, I}$ converge (f_n bornée pour n assez grand).
- $\sum f_n$ **converge normalement sur tout segment** de I si $\forall [a; b] \subset I, \sum f_n$ CVN sur $[a; b]$.

REMARQUE 6.2 : • Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ CVS sur I alors $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVS vers la fonction nulle sur I .

- Si $\sum f_n$ CVS (resp. CVU, CVN) sur I et si $J \subset I$, alors $\sum f_n$ CVS (resp. CVU, CVN) sur J .
- Si $\sum f_n$ CVN sur I , alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVU vers la fonction nulle sur I .
- Si $\sum f_n$ CVN sur tout segment de I alors $\forall x \in I, \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ CVA.
- S'il existe $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in I, |f_n(x)| \leq \alpha_n$ avec $\sum \alpha_n$ CV, alors $\sum f_n$ CVN sur I .

THÉORÈME 6.2 :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. À propos de convergence sur I :

$\sum f_n$ CVN $\Rightarrow \sum f_n$ CVNTS $\Rightarrow \sum f_n$ CVUTS $\Rightarrow \sum f_n$ CVS et aussi

$\sum f_n$ CVN $\Rightarrow \sum f_n$ CVU $\Rightarrow \sum f_n$ CVUTS $\Rightarrow \sum f_n$ CVS.

PARTIE 6.2 : THÉORÈMES DE DOMINATION**THÉORÈME ÉNORME 6.3 :**

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On suppose que :

(H₁) la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f ,

(H₂) les fonctions f_n et la fonction f sont continues par morceaux sur I ,

(H₃) $\exists \varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$.

Alors les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f$ (TCD).

THÉORÈME ÉNORME 6.4 :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On suppose que :

(H₁) la série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers S ,

(H₂) les fonctions f_n et la fonction S sont continues par morceaux sur I ,

(H₃) les fonctions f_n sont intégrables sur I et la série $\sum \left(\int_I |f_n| \right)$ converge.

Alors S est intégrable sur I , $\sum \int_I f_n$ converge et surtout $\int_I S = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$ (TITT).

PARTIE 6.3 : CONTINUITÉ ET LIMITE**THÉORÈME 6.5 :**

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur I (ou sur tout segment de I) vers la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, alors :

(i) Soit $a \in I$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a alors f est continue en a .

(ii) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I alors f est continue sur I .

THÉORÈME ÉNORME 6.6 :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On suppose que :

(i) $\sum f_n$ CVU (ou CVN ou CVUTS ou CVNTS) sur I vers S ,

(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I .

Alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

REMARQUE 6.3 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, a un réel adhérent à I ($a = \pm\infty$ est possible). On suppose :

(H₁) la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (vers f),

(H₂) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie ℓ_n en a .

Alors $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n$ i.e. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$.

THÉORÈME ÉNORME 6.7 :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et a un réel adhérent à I ($a = \pm\infty$ est possible) ; on suppose de plus avoir les deux hypothèses suivantes :

- (H₁) la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément (ou normalement) sur I vers S ,
- (H₂) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie ℓ_n en a .

Alors $\sum \ell_n$ converge et $\lim_{x \rightarrow a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ i.e. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$.

REMARQUE 6.4 : Ce théorème de la double limite est faux (dans la remarque et le théorème précédents) si par exemple $a = \text{Sup}(I) \notin I$ et qu'on a juste convergence uniforme sur tout segment de I (ou convergence normale sur tout segment de I dans le cas des séries de fonctions).

EN PRATIQUE : Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$:

- On détermine la limite simple f de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Pour montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , on calcule $\|f_n - f\|_{\infty}$ (étude de fonction) ou on cherche $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que $\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$.
- Pour montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I , on cherche une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
- On étudie la convergence simple de $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$: ensemble de définition D de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$,
- On étudie la convergence normale sur D (éventuellement sur tout segment de D).
- À défaut, on cherche à établir la convergence uniforme en étudiant $\|R_n\|_{\infty}$ et en la majorant.
- On cherche limite ou équivalent de $S(x)$ aux bornes par comparaison série-intégrale ou double limite.

PARTIE 6.4 : INTÉGRATION ET DÉRIVATION

THÉORÈME ÉNORME 6.8 :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, on suppose que :

- (H₁) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[a; b]$ vers f .
- (H₂) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le segment $[a; b]$.

Alors f est continue sur $[a; b]$ et $\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt \right) = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt$.

THÉORÈME ÉNORME 6.9 :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, on suppose que :

- (H₁) La série $\sum f_n$ converge uniformément sur le segment $[a; b]$ vers S .
- (H₂) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le segment $[a; b]$.

Alors S est continue sur $[a; b]$, $\sum \int_a^b f_n(t)dt$ converge et $\int_a^b S(t)dt = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt$.

THÉORÈME 6.10 :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, on suppose que :

- (H₁) La série $\sum f_n$ converge normalement sur le segment $[a; b]$ vers S .
- (H₂) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le segment $[a; b]$.

Alors en plus du th. 5.9, $\sum \int_a^b |f_n(t)|dt$ CV et $\int_a^b |S(t)|dt = \int_a^b \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right| dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b |f_n(t)|dt$.

THÉORÈME ÉNORME 6.11 :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que :

- (H₁) la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f ,
- (H₂) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^1 sur I ,
- (H₃) $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (ou unif. sur tout segment de I) vers g .

Alors f est de classe C^1 sur I et $f' = g$, ie $\forall x \in I$, $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f'_n(x))$.

THÉORÈME 6.12 :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, $p \geq 2$, si :

- (H₁) toutes les fonctions f_n sont de classe C^p sur I ,
- (H₂) les suites $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simplement sur I (vers φ_k) pour $k \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$,
- (H₃) $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (ou unif. sur tout segment de I) (vers φ_p).

Alors on peut conclure (on admet que ces conditions suffisent) :

- (R₁) $f = \varphi_0$ est de classe C^p sur I .
- (R₂) $\forall k \in \llbracket 0; p \rrbracket$, $f^{(k)} = \varphi_k$, c'est-à-dire : $\forall k \in \llbracket 0; p \rrbracket$, $\forall x \in I$, $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(k)}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n^{(k)}(x))$.

REMARQUE FONDAMENTALE 6.5 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que :

- (H₁) la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f ,
- (H₂) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^∞ sur I ,
- (H₃) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (ou uniformément sur tout segment de I) (vers φ_k).

Alors f est de classe C^∞ sur I et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)} = \varphi_k \iff \forall x \in I$, $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(k)}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n^{(k)}(x))$.

THÉORÈME ÉNORME 6.13 :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que :

- (H₁) la série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers S ,
- (H₂) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^1 sur I ,
- (H₃) $\sum f'_n$ converge uniformément sur I (ou uniformément sur tout segment de I).

Alors S est de classe C^1 sur I et $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$ ie $\forall x \in I$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (f'_n(x))$.

THÉORÈME 6.14 :

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, $p \geq 2$, si :

- (H₁) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^p sur I ,
- (H₂) les séries $\sum f_n^{(k)}$ convergent simplement sur I pour $k \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$,
- (H₃) $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur I (ou uniformément sur tout segment de I).

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^p sur I et $\forall x \in I$, $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$.

REMARQUE FONDAMENTALE 6.6 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ telle que :

- (H₁) la série $\sum f_n$ converge simplement sur I ,
- (H₂) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^∞ sur I ,
- (H₃) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I (ou unif. sur tout segment de I).

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^∞ sur I et $\forall x \in I$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$.