

CHAPITRE 7

ALGÈBRE BILINÉAIRE

PARTIE 7.1 : ESPACES PRÉHILBERTIENS

DÉFINITION 7.1 :

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que φ est un **produit scalaire** sur E si φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E , c'est-à-dire si :

- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (u, v, w) \in E^3, \begin{cases} \varphi(\alpha u + \beta v, w) = \alpha \varphi(u, w) + \beta \varphi(v, w) \\ \varphi(u, \alpha v + \beta w) = \alpha \varphi(u, v) + \beta \varphi(u, w) \end{cases}$ (bilinéarité).
- $\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ (symétrie).
- $\forall u \in E, \varphi(u, u) = q(u) \geq 0$ (positivité).
- $\forall u \in E, \varphi(u, u) = q(u) \geq 0$ et $\varphi(u, u) = q(u) = 0 \implies u = 0_E$ (aspect défini).

Un **espace préhilbertien réel** est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

REMARQUE 7.1 : On note souvent $(u|v) = \varphi(u, v)$, ou $u.v$ (en géométrie) ou $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire.

THÉORÈME 7.1 :

Soit E un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$. Alors l'application $x \in E \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E appelée norme euclidienne associée à $(.|.)$:

- (i) $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$ (positivité),
- (ii) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0_E$ (séparation),
- (iii) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité),
- (iv) $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire ou de MINKOWSKI).

De plus : $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}^+, x = \lambda y \text{ ou } y = \lambda x)$ (x et y sont positivement liés).

THÉORÈME 7.2 :

Soit E un espace préhilbertien réel et $(u, v) \in E^2$:

- $|(u|v)| \leq \|u\| \times \|v\|$ (CAUCHY-SCHWARZ) et $|(u|v)| = \|u\| \times \|v\| \iff (u, v)$ est liée.
- $(u|v) = \frac{1}{2} (\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) = \frac{1}{2} (\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2)$ (identités de polarisation).
- $(u|v) = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$ (identité de polarisation).
- $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ (identité du parallélogramme).

REMARQUE 7.2 : L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ nous permet de définir l'angle non orienté $\theta \in [0; \pi]$ entre deux vecteurs non nuls u et v de E par : $\theta = \text{Arccos} \left(\frac{(u|v)}{\|u\| \|v\|} \right)$.

DÉFINITION 7.2 :

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et $(u, v) \in E^2$, on dit que :

- u est **unitaire** (ou **normé**) si $\|u\| = 1$.
- u et v sont **orthogonaux** si $(u|v) = 0$; on le note $u \perp v$.

REMARQUE 7.3 : Si $x \neq 0_E$ alors le vecteur $\frac{x}{\|x\|}$ est toujours unitaire.

DÉFINITION 7.3 :

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E , on dit que $(x_i)_{i \in I}$ est :

- **orthogonale** si $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies (x_i|x_j) = 0$.
- **orthonormale** (ou **orthonormée**) si $\forall (i, j) \in I^2, (x_i|x_j) = \delta_{i,j}$.

PROPOSITION 7.3 :

Soit E un espace préhilbertien réel.

- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- Si $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille orthogonale : $\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$ (PYTHAGORE).

REMARQUE 7.4 : • Pour $(x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff x \perp y$. Par contre :

- Si $n > 2$ et si $(x_1, \dots, x_n)$ vérifie la relation de PYTHAGORE, elle n'est pas forcément orthogonale.

DÉFINITION 7.4 :

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont des **sous-espaces orthogonaux** si $\forall (x, y) \in F \times G, (x|y) = 0$; on le note $F \perp G$.

PROPOSITION 7.4 :

Soit E un espace préhilbertien réel et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E supposés deux à deux orthogonaux. Alors la somme des F_k est directe : $\sum_{k=1}^n F_k = \bigoplus_{k=1}^n F_k$.

DÉFINITION 7.5 :

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E (et même si F n'est qu'une partie E). On définit l'**orthogonal** de F , noté $F^\perp$ par : $F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, (x|y) = 0\}$.

REMARQUE 7.5 : Avec cette définition, on a toujours $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

PROPOSITION 7.5 :

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E :

- $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E
- $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$
- $F \perp G \iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp$
- $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ et $F \subset (F^\perp)^\perp$
- $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$
- $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

REMARQUE 7.6 : On peut avoir $(F^\perp)^\perp \neq F$ et/ou $F^\perp + G^\perp \neq (F \cap G)^\perp$.

PARTIE 7.2 : ESPACES EUCLIDIENS

DÉFINITION 7.6 :

- Un **espace euclidien** E est un espace préhilbertien réel de dimension finie.
- Dans un tel espace E , une famille $\mathcal{B}$ de vecteurs de E est dite une **base orthonormale** (ou **orthonormée**) de E si $\mathcal{B}$ est base de E et une famille orthonormale de E .

THÉORÈME ÉNORME 7.6 :

Soit E un espace préhilbertien réel et $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E , alors il existe une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E qui vérifie les conditions suivantes :

- $\forall p \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
- $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormale de E .
- $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $(x_k | e_k) > 0$ (ceci amène aussi l'unicité).

C'est le procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT.

REMARQUE 7.7 : On orthonormalise directement $(x_1, \dots, x_n)$ en $(f_1, \dots, f_n)$ avec les formules :

- $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ (et on a bien $(e_1 | x_1) = \|x_1\| > 0$).
- $\forall p \in \llbracket 2; n \rrbracket$, $e_p = \frac{g_p}{\|g_p\|}$ en notant $g_p = x_p - \sum_{k=1}^{p-1} (e_k | x_p) e_k$ (avec $(e_p | x_p) = \|g_p\| > 0$ car $g_p \neq 0_E$).

PROPOSITION 7.7 :

Soit E un espace euclidien.

- E possède au moins une base orthonormale.
- Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale.

REMARQUE 7.8 : Si $E = \bigoplus_{1 \leq k \leq p}^\perp F_k$ et si $\mathcal{B}_k$ est une base orthonormale de F_k (pour tout indice $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$) alors $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une base orthonormale de E dite adaptée à cette décomposition.

THÉORÈME 7.8 :

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , $(x, y) \in E^2$ qui se décomposent $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$ dans la base $\mathcal{B}$:

- $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $x_k = (e_k | x)$, $(x = \sum_{k=1}^n (e_k | x) e_k$: coordonnées en fonction des produits scalaires).
- $(x | y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ (produit scalaire en fonction des coordonnées).
- $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ (norme en fonction des coordonnées).

PROPOSITION 7.9 :

Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , on associe à des vecteurs x et y de E les vecteurs colonnes X et Y de leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Alors on a $(x | y) = {}^t X Y = X^T Y$ (en identifiant réel et matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$).

REMARQUE FONDAMENTALE 7.9 : Soit E euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E :

- Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors on a $A = \left((e_i | f(e_j)) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.
- Si $\mathcal{B}'$ est une autre base orthonormée et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: ${}^t P = P^{-1}$.

THÉORÈME 7.10 :

Soit E un espace préhilbertien réel (pas forcément de dimension finie) et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors $F^\perp$ et F sont supplémentaires dans E . Et $(F^\perp)^\perp = F$. En particulier, si E est de dimension finie alors $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

DÉFINITION 7.7 :

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors le sous-espace $F^\perp$ est appelé le **supplémentaire orthogonal** de F .

La **projection orthogonale** sur F est la projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$.

PROPOSITION 7.11 :

Soit E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

Nous avons maintenant les égalités : $(F^\perp)^\perp = F$ et $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

PROPOSITION 7.12 :

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace de E de dimension finie, $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de F . Pour $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur F est $p_F(x) = \sum_{k=1}^n (e_k | x) e_k$.

REMARQUE 7.10 : Si $a \neq 0_E$, $D = \text{Vect}(a)$, $H = D^\perp$: $p_D(x) = \frac{(a|x)}{\|a\|^2} a$, $p_H(x) = x - p_D(x) = x - \frac{(a|x)}{\|a\|^2} a$.

DÉFINITION 7.8 :

Soit E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace de E , la **distance** de $x \in E$ à F est $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

THÉORÈME ÉNORME 7.13 :

Soit E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace de E de dimension finie et $x \in E$. Alors la distance $d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2} = \min_{y \in F} \|x - y\|$ est atteinte seulement en $y = p_F(x)$.

REMARQUE HP 7.11 : Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace préhilbertien réel, $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormée de vecteurs de E , $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, alors $\forall x \in E$, $\sum_{k=1}^p (e_k | x)^2 = \|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ (inégalité de BESSEL).

THÉORÈME ÉNORME 7.14 :

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien et φ une forme linéaire (élément de E^*) alors il existe un unique vecteur a de E tel que $\forall x \in E$, $\varphi(x) = (a | x)$ (théorème de représentation).

PROPOSITION 7.15 :

Soit E un espace euclidien, $H = \text{Vect}(a)^\perp$ un hyperplan de E (donc $a \neq 0_E$), la droite associée $D = H^\perp = \text{Vect}(a)$ et $x \in E$: $d(x, H) = \frac{|(x|a)|}{\|a\|}$ et $d(x, D)^2 = \left\| x - \frac{(a|x)}{\|a\|^2} a \right\|^2 = \|x\|^2 - \frac{(x|a)^2}{\|a\|^2}$.