DM 05 : RÉDUCTION

PSI 1 2025/2026 **pour le mardi 25 novembre 2025**

Dans tout ce problème, on s'intéresse au commutant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement d'un endomorphisme u d'un espace E), c'est-à-dire à l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement des endomorphismes $v \in \mathcal{L}(E)$) qui commutent avec A. On notera cet ensemble $\mathcal{C}(A)$ (respectivement $\mathcal{C}(u)$) :

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}.$$

On admettra que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables alors $\dim(\mathcal{C}(A)) = \dim(\mathcal{C}(B))$.
On admettra de même que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et que $\dim(\mathcal{C}(u)) = \dim(\mathcal{C}(A))$ si A est une matrice représentant u dans une base de E.

PARTIE 1 : ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.1 Réduction de A

1.1.1 Déterminer les valeurs propres de A et une base de chacun de ses sous-espaces propres.

1.1.2 En déduire que A est diagonalisable puis donner une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale (et préciser cette matrice diagonale).

1.2 Commutant de A

1.2.1 Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $ND = DN \iff \exists (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5,\ N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$.

1.2.2 En déduire la dimension du commutant de D.

1.2.3 Quelle est la dimension de $\mathcal{C}(A)$?

PARTIE 2 : COMMUTANT D'UN ENDOMORPHISME NILPOTENT D'INDICE 2

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension finie n et que $f \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

2.1 Une décomposition de E

2.1.1 Justifier que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

On introduit F un supplémentaire de $\mathrm{Im}(f)$ dans $\mathrm{Ker}(f)$ et G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E. On a donc les égalités $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) \oplus F$ et $E = \mathrm{Im}(f) \oplus F \oplus G$.
On note $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(f) \oplus F \oplus G$.

2.1.2 Justifier que $\dim(G) = \mathrm{rg}(f)$.

2.1.3 Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec A inversible.

2.2 Commutant de f

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. On décompose sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ M_4 & M_5 & M_6 \\ M_7 & M_8 & M_9 \end{pmatrix}$*, les différents blocs ayant la même taille que ceux de la matrice de f dans $\mathcal{B}$ introduite précédemment.*

2.2.1 Montrer que f et g commutent si et seulement si $M_4 = M_7 = M_8 = 0$ et $M_9 = A^{-1}M_1A$.

2.2.2 En déduire $\dim(\mathcal{C}(f)) = (n-r)^2 + r^2$, où $r = \mathrm{rg}(f)$. Indication : on pourra introduire l'application $\varphi : (M_1, M_2, M_3, M_5, M_6) \mapsto \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ 0 & M_5 & M_6 \\ 0 & 0 & A^{-1}M_1A \end{pmatrix}$ en précisant son espace de départ.

PARTIE 3 : ENDOMORPHISMES TELS QUE $(u - \mathrm{id}_E) \circ (u - 2\,\mathrm{id}_E)^2 = 0$

Dans toute cette partie, on suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie n et que u est un endomorphisme de E tel que

$$(u - \mathrm{id}_E) \circ (u - 2\,\mathrm{id}_E)^2 = 0.$$

On supposera de plus que u n'est pas une homothétie, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de réel λ tel que $u = \lambda\,\mathrm{id}_E$.

3.1 Cas diagonalisable

Dans cette question, on suppose que u est diagonalisable.

3.1.1 Montrer que $^{(}u) = \{1, 2\}$.

3.1.2 Soit $E_1(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $E_2(u) = \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}_E)$ les sous-espaces propres de u puis $n_1 = \dim(E_1(u))$ et $n_2 = \dim(E_2(u))$. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $v \in \mathcal{C}(u) \iff (E_1(u)$ et $E_2(u)$ sont stables par $v)$.

3.1.3 Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition $E = E_1(u) \oplus E_2(u)$. Déduire de **3.1.2** une condition nécessaire et suffisante, portant sur la forme de la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$, pour que v commute avec u.

3.1.4 En déduire la dimension de $\mathcal{C}(u)$ en fonction de n_1 et n_2.

3.2 Cas non diagonalisable

On suppose cette fois-ci que u n'est pas diagonalisable <u>et</u> que $^{(}u) = \{1, 2\}$.
On pose $E_1 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}[(u - 2\,\mathrm{id}_E)^2]$; on remarquera en particulier que E_2 <u>n'est pas</u>, à priori, un sous-espace propre de u. Enfin, on note n_1 et n_2 les dimensions de E_1 et E_2 respectivement.

3.2.1 Justifier que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E) \subset E_2$ et $\mathrm{Im}[(u - 2\,\mathrm{id}_E)^2] \subset E_1$.

3.2.2 Vérifier que $E = E_1 \oplus E_2$. Indication : on pourra vérifier que $\mathrm{id}_E = (u - 2\,\mathrm{id}_E)^2 - (u - \mathrm{id}_E) \circ (u - 3\,\mathrm{id}_E)$.

On définit trois endomorphismes de la façon suivante, $p = (u - 2\,\mathrm{id}_E)^2$, $d = 2\,\mathrm{id}_E - p$ *et* $w = u - d$.

3.2.3 Montrer que $v \in \mathcal{L}(E)$ commute avec u si et seulement si v commute avec d et w.

3.2.4 Justifier que p est le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 puis en déduire la matrice de d dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$.

3.2.5 Vérifier que $w = (u - 2\,\mathrm{id}_E) \circ (u - \mathrm{id}_E)$ et en déduire que $w^2 = 0$ et $w \neq 0$.

3.2.6 Montrer que $\mathrm{Im}(w) \subset E_2$ et $E_1 \subset \mathrm{Ker}(w)$. En déduire que la matrice de w dans la base $\mathcal{B}$ précédente est de la forme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ avec $N \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})$.

3.2.7 Vérifier que $N^2 = 0$ et prouver que $\mathrm{rg}(N) = n_2 - \dim(\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{id}_E))$.

3.2.8 Montrer que v commute avec u si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$ et $V_2N = NV_2$.

3.2.9 Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(u)$ en fonction de n_1, n_2 et $\mathrm{rg}(u - 2\,\mathrm{id}_E)$.