

TD 08 : PROBABILITÉS

PSI 1 2025-2026

vendredi 07 novembre 2025

8.1 On note $A_{n,p} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i| = p\}$ qu'on veut dénombrer et, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la partie

$A_{n,p,k} = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A_{n,p} \mid \text{card} \{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid |\alpha_i| = p\} = k \right\}$ de $A_{n,p}$. Il est clair que $A_{n,p} = \bigsqcup_{k=1}^n A_{n,p,k}$

et que cette réunion est disjointe. Ainsi, $\text{card}(A_{n,p}) = \sum_{k=1}^n \text{card}(A_{n,p,k})$.

Protocole de choix bijectif pour compter les éléments $A_{n,p,k}$:

- on choisit les k indices $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tels que $|\alpha_i| = p$: $\binom{n}{k}$ choix.

- on choisit les signes de ces k termes : 2^k choix.

- on choisit les $n - k$ termes α_i restants dans $\llbracket -(p-1); (p-1) \rrbracket$: $(2p-1)^{n-k}$ choix.

Ainsi $\text{card}(A_{n,p,k}) = \binom{n}{k} 2^k (2p-1)^{n-k}$. Par conséquent, on a $\text{card}(A_{n,p}) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k (2p-1)^{n-k}$ ou encore

$\text{card}(A_{n,p}) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k (2p-1)^{n-k} \right) - (2p-1)^n = (2p+1)^n - (2p-1)^n$ par le binôme de NEWTON.

On pouvait le voir plus simplement en écrivant que $A_{n,p} = \llbracket -p; p \rrbracket^n \setminus \llbracket -(p-1); (p-1) \rrbracket^n$ ce qui permet d'affirmer que $\text{card}(A_{n,p}) = \text{card}(\llbracket -p; p \rrbracket^n) - \text{card}(\llbracket -(p-1); (p-1) \rrbracket^n)$ car $\llbracket -(p-1); (p-1) \rrbracket^n \subset \llbracket -p; p \rrbracket^n$.

On trouve de même $\text{card}(A_{n,p}) = (2p+1)^n - (2p-1)^n$.

8.2 a. \mathcal{A} est stable par réunion dénombrable donc $U_n \in \mathcal{A}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ car les A_k sont dans \mathcal{A} par hypothèse. Ensuite $B \in \mathcal{A}$ comme intersection dénombrable des U_n . Par construction de B , on a $\omega \in B \iff (\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, \omega \in A_k) \iff$ (il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $\omega \in A_n$).

b. Comme $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, par continuité décroissante, on a $\mathbb{P}(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n)$.

Or, par sous-additivité, $0 \leq \mathbb{P}(U_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = R_{n-1}$ qui est le reste d'ordre $n-1$ de la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$

qui est convergente par hypothèse. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n-1} = 0$ donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n) = \mathbb{P}(B) = 0$.

c. $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'évènements indépendants donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \geq n$, $\overline{A}_n, \dots, \overline{A}_m$

sont indépendants aussi. Ainsi, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^m \overline{A}_k\right) = \prod_{k=n}^m \mathbb{P}(\overline{A}_k) = \prod_{k=n}^m (1 - \mathbb{P}(A_k))$. Or, par une étude de fonction

ou par le fait que \exp est convexe, on montre classiquement l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - x \leq e^{-x}$. Ainsi, on obtient la majoration $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^m \overline{A}_k\right) \leq \prod_{k=n}^m e^{-\mathbb{P}(A_k)} = \exp\left(-\sum_{k=n}^m \mathbb{P}(A_k)\right)$.

• Dans le cas où $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge, on vient de voir à la question **b.** que $\mathbb{P}(B) = 0$ indépendamment de l'hypothèse d'indépendance mutuelle de la famille $(A_n)_{n \geq 0}$.

• Dans le cas où $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge, en utilisant ce qui précède, comme $\overline{U}_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A}_k = \bigcap_{m=n}^{+\infty} \left(\bigcap_{k=n}^m \overline{A}_k\right)$

et que la famille $\left(\bigcap_{k=n}^m \overline{A}_k\right)_{m \geq n}$ est décroissante, par continuité décroissante, $\mathbb{P}(\overline{U}_n) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^m \overline{A}_k\right)$.

Or $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^m \mathbb{P}(A_k) = +\infty$ par divergence de $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^m \overline{A_k}\right) = 0$ par encadrement donc $\mathbb{P}(\overline{U_n}) = 0$ et $\mathbb{P}(U_n) = 1$. On pouvait aussi utiliser l'inclusion $\overline{U_n} \subset \bigcap_{k=n}^m \overline{A_k}$ et conclure aussi $\mathbb{P}(\overline{U_n}) = 0$ par encadrement. On conclut comme en question **b.** par continuité décroissante que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n) = \mathbb{P}(B) = 1$.
On a donc $\mathbb{P}(B) = 0$ si $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge et $\mathbb{P}(B) = 1$ si $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

8.3 a. Le joueur A_0 gagne si et seulement s'il gagne les trois premières parties donc $p_0 = \frac{1}{8}$ et $q_0 = 1$.

Si $n \geq 1$, on constate d'abord que si la partie n a bien lieu (personne n'a gagné avant), alors elle fait forcément intervenir le personnage A_n d'après la définition du jeu. Ensuite, pour que le personnage A_n gagne le jeu (en entier), il est nécessaire et suffisant qu'il gagne la partie numéro n (contre A_{n-2} ou A_{n-1}) et qu'il gagne la partie numéro $n+1$ contre A_{n+1} et la partie numéro $n+2$ contre A_{n+2} .

On pose donc les évènements :

- U_n = "A_n gagne la partie numéro n",
- Q_n = "A_n joue au moins une fois" = "A_n joue la partie numéro n" et
- P_n = "A_n gagne le jeu".

Alors $P_n = U_n \cap \overline{U_{n+1}} \cap \overline{U_{n+2}}$ et, comme $U_n \subset Q_n$, par la formule des probabilités composées, on a $p_n = \mathbb{P}(P_n) = \mathbb{P}(Q_n \cap U_n \cap V_n \cap W_n) = \mathbb{P}(Q_n) \mathbb{P}_{Q_n}(U_n) \mathbb{P}_{Q_n \cap U_n}(V_n) \mathbb{P}_{Q_n \cap U_n \cap V_n}(W_n)$. Ainsi, $p_n = \frac{q_n}{8}$.

b. Les premiers qui peuvent gagner le jeu sont A_0 et A_1 en ayant gagné le premier match l'un contre l'autre puis contre A_2 et A_3 . Ainsi, les quatre premiers personnages sont forcés de jouer au moins une partie, d'où $q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = 1$. D'après la question **a.**, on a $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{8}$.

Pour que le personnage A_4 joue, il est nécessaire et suffisant que les trois premières parties voient les vainqueurs successifs $A_0A_0A_3$ ou $A_0A_2A_2$ ou $A_0A_2A_3$ ou $A_1A_1A_3$ ou $A_1A_2A_2$ ou $A_1A_2A_3$: $q_4 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

c. Méthode 1 : pour $n \geq 2$, comme $\{U_{n+1}, \overline{U_{n+1}}\}$ est un système complet d'évènements, on peut décomposer l'évènement Q_{n+2} en $Q_{n+2} = (Q_{n+2} \cap U_{n+1}) \sqcup (Q_{n+2} \cap \overline{U_{n+1}})$.

- Or $Q_{n+2} \cap U_{n+1} = Q_{n+1} \cap U_{n+1}$ car si le joueur A_{n+1} gagne sa partie, il joue contre A_{n+2} .
- Si A_{n+1} perd sa partie et que A_{n+2} joue, c'est que le joueur A_n a gagné sa partie contre A_{n-1} ou A_{n-2} et qu'il arrive contre A_{n+2} avec deux victoires d'affilée. Ainsi, $Q_{n+2} \cap \overline{U_{n+1}} = Q_n \cap U_n \cap \overline{U_{n+1}}$.

Par conséquent, $\mathbb{P}(Q_{n+2}) = \mathbb{P}(Q_{n+1}) \mathbb{P}_{Q_{n+1}}(U_{n+1}) + \mathbb{P}(Q_n) \mathbb{P}_{Q_n}(U_n) \mathbb{P}_{Q_n \cap U_n}(\overline{U_{n+1}})$ et on la récurrence double $q_{n+2} = q_{n+1} \times \frac{1}{2} + q_n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ donc $q_{n+2} = \frac{q_{n+1}}{2} + \frac{q_n}{4}$. Les racines de l'équation caractéristique $z^2 - \frac{z}{2} - \frac{1}{4} = 0$ étant $w_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $w_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, il existe α, β tels que $\forall n \geq 2$, $q_n = \alpha w_1^n + \beta w_2^n$. Avec les conditions $q_2 = q_3 = 1$ et $q_4 = \frac{3}{4}$, $\alpha = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ et $\beta = \frac{4}{\sqrt{5}}$. Ainsi, $\forall n \geq 2$, $q_n = \frac{4}{4^n \sqrt{5}} ((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n)$.

Méthode 2 : soit $n \geq 1$, le personnage A_{n+3} ne joue pas équivaut, par le principe du jeu, au fait que le jeu soit terminé avant qu'on en arrive à lui, c'est-à-dire que l'un des joueurs A_0, \dots, A_n gagne le jeu. Ainsi, on

en déduit $\overline{Q_{n+3}} = \bigsqcup_{k=0}^n P_k$. Si $n \geq 2$, comme $\bigsqcup_{k=0}^n P_k = P_n \sqcup \left(\bigsqcup_{k=0}^{n-1} P_k \right)$, on a $\overline{Q_{n+3}} = P_n \sqcup \overline{Q_{n+2}}$.

Comme P_n et $\overline{Q_{n+2}}$ sont incompatibles, on a $\forall n \geq 2, 1 - q_{n+3} = p_n + 1 - q_{n+2} = \frac{q_n}{8} + 1 - q_{n+2}$. Ainsi, on a la récurrence d'ordre 3 : $\forall n \geq 2, q_{n+3} - q_{n+2} + \frac{q_n}{8} = 0$ dont l'équation caractéristique associée (comme pour les récurrences linéaires d'ordre 2) est $z^3 - z^2 + \frac{1}{8} = 0$.

Les racines de cette équation sont $z_1 = \frac{1}{2}, z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $z_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Ainsi $q_0 = 1, q_1 = 1$ et il existe trois réels A, B, C tels que $\forall n \geq 2, q_n = Az_1^n + Bz_2^n + Cz_3^n$. On trouve, avec les trois conditions $q_2 = q_3 = 1$ et $q_4 = \frac{3}{4}, A = 0, B = -\frac{4}{\sqrt{5}}$ et $C = \frac{4}{\sqrt{5}}$. Ainsi, $\forall n \geq 2, q_n = \frac{4}{4^n \sqrt{5}} ((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n)$.

d. Méthode 1 : si $G =$ "le jeu s'arrête", alors $G = \bigcup_{n=0}^{+\infty} P_n$ et, comme $(P_n)_{n \geq 0}$ est une famille d'évènements incompatibles deux à deux, par σ -additivité, $\mathbb{P}(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} w_2^n - \sum_{n=2}^{+\infty} w_1^n \right)$ ($|w_1| < 1$ et $|w_2| < 1$). Ainsi, $\mathbb{P}(G) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{w_2^2}{1-w_2} - \frac{w_1^2}{1-w_1} \right) = \frac{1}{4} + \frac{(w_1+w_2)(w_2-w_1) - w_1w_2(w_2-w_1)}{2\sqrt{5}(1-w_1)(1-w_2)}$.
 Mais $w_1 + w_2 = \frac{1}{2}, w_1w_2 = -\frac{1}{4}$ et $w_2 - w_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $(1-w_1)(1-w_2) = 1 - (w_1+w_2) + w_1w_2 = \frac{1}{4}$ donc
 $\mathbb{P}(G) = \frac{1}{4} + \frac{(\sqrt{5}/4) + (\sqrt{5}/8)}{(\sqrt{5}/2)} = \frac{1}{4} + \frac{(1/4) + (1/8)}{(1/2)} = \frac{1}{4} + \frac{(3/8)}{(1/2)} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

Méthode 2 : puisque $|z_1| < 1, |z_2| < 1$ et $|z_3| < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 0$. Si $G =$ "le jeu s'arrête", alors $G = \bigcup_{n=0}^{+\infty} P_n$ et, comme $(P_n)_{n \geq 0}$ est une famille d'évènements incompatibles deux à deux, on a par σ -additivité la relation
 $\mathbb{P}(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = p_0 + p_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (q_{n+2} - q_{n+3}) = p_0 + p_1 + q_4 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = 1$ par télescopage.

Quelle que soit la méthode, quelqu'un finit presque sûrement par gagner !

Question en plus : On pose $T =$ "l'élève travaille", $R =$ "l'élève réussit". L'énoncé nous dit que $\mathbb{P}_T(R) = 1, \mathbb{P}(T) = 0,85, \mathbb{P}_{\overline{T}}(R) = 0,5$. Alors, la probabilité p qu'un élève ayant réussi ait travaillé est, d'après la formule de BAYES, $p = \mathbb{P}_R(T) = \frac{\mathbb{P}_T(R)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}_T(R)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}_{\overline{T}}(R)\mathbb{P}(\overline{T})} = \frac{1 \times 0,85}{1 \times 0,85 + 0,5 \times 0,15} \sim 0,919$.

8.4 a. Notons, $n \in \mathbb{N}$, les évènements $A_n =$ "vote pour A", $B_n =$ "vote pour B", de sorte que, d'après l'énoncé, $B_n = \overline{A_n}, p_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $q_n = \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\overline{A_n}) = 1 - p_n$. Pour $n \geq 1$, comme $\{A_{n-1}, B_{n-1}\}$ est un système complet d'évènements, on a par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-1})\mathbb{P}(A_n|A_{n-1}) + \mathbb{P}(B_{n-1})\mathbb{P}(A_n|B_{n-1}) = (1-a)p_{n-1} + bq_{n-1}, \\ q_n &= \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A_{n-1})\mathbb{P}(B_n|A_{n-1}) + \mathbb{P}(B_{n-1})\mathbb{P}(B_n|B_{n-1}) = ap_{n-1} + (1-b)q_{n-1} \end{aligned}$$

Ceci se traduit matriciellement par $U_n = AU_{n-1}$ pour $n \geq 1$ avec $A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$. Par une récurrence facile, on montre alors que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$. Reste donc à calculer A^n .

Comme $\text{Tr}(A) = 2-a-b$ et $\det(A) = 1-a-b$, on a $\chi_A = X^2 - (2-a-b)X + 1-a-b = (X-1)(X-1+a+b)$ (1 est toujours valeur propre d'une matrice stochastique : la somme des termes dans chaque colonne fait 1). Effectuons la division euclidienne de X^n par χ_A , cela donne $X^n = Q_n \chi_A + R_n$ avec $R_n = a_n X + b_n$ et, en remplaçant X par 1 puis par $1-a-b < 1$, on obtient $1 = a_n + b_n$ et $(1-a-b)^n = a_n(1-a-b) + b_n$. En résolvant ce système, on trouve $a_n = \frac{1 - (1-a-b)^n}{a+b}$ et $b_n = \frac{(1-a-b)^n - (1-a-b)}{a+b}$.

Ainsi, $A^n = Q_n(A)\chi_\Lambda(A) + R_n(A) = a_n A + b_n I_2 = \frac{1 - (1 - a - b)^n}{a + b} A + \frac{(1 - a - b)^n - (1 - a - b)}{a + b} I_2$. Après simplifications, $A^n = \frac{1}{a + b} \begin{pmatrix} b + a(1 - a - b)^n & b - b(1 - a - b)^n \\ a - a(1 - a - b)^n & a + b(1 - a - b)^n \end{pmatrix}$ et, comme $U_n = A^n U_0$, on obtient

$$p_n = \frac{(b + a(1 - a - b)^n)p_0 + (b - b(1 - a - b)^n)q_0}{a + b}, q_n = \frac{(a - a(1 - a - b)^n)p_0 + (a + b(1 - a - b)^n)q_0}{a + b}.$$

b. Par hypothèse, $-1 < 1 - a - b < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - a - b)^n = 0$ et la relation de la question précédente montre, comme $p_0 + q_0 = 1$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{b}{a + b}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = \frac{a}{a + b}$.

8.5 a. Soit $\{a_1, \dots, a_r\} \in F_{n,r}$ où l'on impose comme dans l'énoncé $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r \leq n + r - 1$ et la condition $\forall i \in \llbracket 1; r - 1 \rrbracket$, $a_{i+1} - a_i > 1$. Posons, pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $b_i = a_i - i + 1$. Alors $b_1 = a_1 \geq 1$. De plus, pour $i \in \llbracket 1; r - 1 \rrbracket$, $b_{i+1} - b_i = a_{i+1} - a_i - 1 > 0$ par hypothèse donc $b_{i+1} > b_i$ et on a donc $\text{card}(\{b_1, \dots, b_r\}) = r$. Enfin, $b_r = a_r - r + 1 \leq n + r - 1 - r + 1 = n$ donc $\{b_1, \dots, b_r\} \in E_{n,r}$. On vient de créer une application $\varphi : F_{n,r} \rightarrow E_{n,r}$ par $\varphi(\{a_1, \dots, a_r\}) = \{b_1, \dots, b_r\}$.

Injectivité : soit $(\{a_1, \dots, a_r\}, \{a'_1, \dots, a'_r\}) \in F_{n,r}^2$ telles que $\varphi(\{a_1, \dots, a_r\}) = \varphi(\{a'_1, \dots, a'_r\})$ avec $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r \leq n + r - 1$ et $1 \leq a'_1 \leq \dots \leq a'_r \leq n + r - 1$. Alors, pour tout entier $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on a la relation $a_i - i + 1 = b_i = b'_i = a'_i - i + 1$ donc $a_i = a'_i$ ce qui montre que $\{a_1, \dots, a_r\} = \{a'_1, \dots, a'_r\}$.

Surjectivité : soit $\{b_1, \dots, b_r\} \in E_{n,r}$ où $1 \leq b_1 < \dots < b_r \leq n$. Si, pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on pose $a_i = b_i + i - 1 \in \llbracket 1; n + r - 1 \rrbracket$, on a bien $\text{card}(\{a_1, \dots, a_r\}) = r$ et $\{a_1, \dots, a_r\} \subset \llbracket 1; n + r - 1 \rrbracket$ et $a_{i+1} - a_i = b_{i+1} - b_i + 1 > 1$. On a bien $\{a_1, \dots, a_r\} \in F_{n,r}$ et $\varphi(\{a_1, \dots, a_r\}) = \{b_1, \dots, b_r\}$.

L'application φ étant une bijection entre ces deux ensembles, on a donc $\text{card}(E_{n,r}) = \text{card}(F_{n,r})$.

b. L'énoncé prend visiblement $\Omega = E_{49,4}$ donc, d'après le cours, $\text{card}(\Omega) = \binom{49}{4} = \frac{49.48.47.46}{24} = 2^2.7^2.23.47$ donc $\text{card}(\Omega) = 211876$. On convient que $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et que la probabilité \mathbb{P} est uniforme sur Ω .

Soit $A =$ " le tirage a au moins deux éléments consécutifs ". Alors $\bar{A} =$ " le tirage n'a pas deux éléments consécutifs " $= F_{46,4}$. D'après **a.**, $\text{card}(F_{46,4}) = \text{card}(E_{46,4}) = \binom{46}{4} = \frac{46.45.44.43}{24} = 3.5.11.23.43 = 163185$.

Comme \mathbb{P} est uniforme, $\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{\text{card}(\bar{A})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3.5.11.23.43}{2^2.7^2.23.47} = \frac{3.5.11.43}{2^2.7^2.47} \sim 0.77$. Ainsi, $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) \sim 0.23$.

c. Notons $D =$ " le tirage a exactement deux éléments consécutifs ". Alors $D = \bigsqcup_{i=1}^{48} D_i$ où D_i est l'ensemble des tirages ayant exactement deux éléments consécutifs, i et $i + 1$. $\text{card}(D) = \sum_{i=1}^{48} \text{card}(D_i)$. Pour choisir un quadruplet dans D_i , on a trois possibilités qui s'excluent l'une l'autre, soit les deux autres termes à part i et $i + 1$ sont tous les deux strictement avant $i - 1$ mais non consécutifs (choix (1)), soit tous les deux strictement après $i + 2$ mais non consécutifs (choix (2)), soit on en a un avant $i - 2$ et un autre après $i + 3$ (choix (3)).

- Si les éléments consécutifs sont 1, 2 ou 2, 3 ou 47, 48 ou 48, 49, seul un des trois cas est possible et on a $\text{card}(D_1) = \text{card}(F_{45,2}) = \text{card}(E_{45,2}) = \frac{45.44}{2} = 990$, $\text{card}(D_2) = \text{card}(F_{44,2}) = \frac{44.43}{2} = 946$ puis $\text{card}(D_{47}) = \text{card}(F_{44,2}) = \frac{44.43}{2} = 946$, $\text{card}(D_{48}) = \text{card}(F_{45,2}) = \text{card}(E_{45,2}) = \frac{45.44}{2} = 990$.

- Pour tout entier $i \in \llbracket 3; 46 \rrbracket$, on a $\text{card}(D_i) = \underbrace{\text{card}(F_{i-3,2})}_{\text{choix(1)}} + \underbrace{\text{card}(F_{49-i-3,2})}_{\text{choix(2)}} + \underbrace{(i-2)(49-i-2)}_{\text{choix(3)}}$
donc $\text{card}(D_i) = \frac{(i-3)(i-4)}{2} + \frac{(46-i)(45-i)}{2} + (i-2)(47-i) = 947$.

Ainsi, $\text{card}(D) = 2 \times 990 + 2 \times 946 + 44 \times 947 = 45540$ et la probabilité d'avoir exactement deux éléments consécutifs dans le tirage vaut donc $\mathbb{P}(D) = \frac{\text{card}(D)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{45540}{211876} \sim 0.21$.

On pouvait aussi dénombrer les tirages avec trois ou quatre éléments consécutifs et les soustraire à ceux de la question **b.** pour trouver la même probabilité.

8.6 On suppose l'équiprobabilité d'être dans chacun des étages. On pose l'évènement $H_I =$ "l'homme est dans l'immeuble". D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(H_I) = p$. On pose aussi $H_e =$ "l'homme est à l'étage e " pour tout $e \in \llbracket 1; 7 \rrbracket$. On vient de supposer que $\forall e \in \llbracket 1; 7 \rrbracket, \mathbb{P}(H_e) = \mathbb{P}(H_1)$. Or, comme $H_I = \bigsqcup_{e=1}^7 H_e$ (réunion disjointe), on a $\mathbb{P}(H_I) = \sum_{e=1}^7 \mathbb{P}(H_e)$ donc $\forall e \in \llbracket 1; 7 \rrbracket, \mathbb{P}(H_e) = \frac{p}{7}$. On définit l'évènement $A =$ "l'homme n'est pas dans les six premiers étages". Alors, avec ces notations, $A = \overline{H_I} \sqcup H_7$ donc $\mathbb{P}(A) = (1 - \mathbb{P}(H_I)) + \mathbb{P}(H_7) = 1 - p + \frac{p}{7}$ d'où $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{6p}{7}$. On demande de calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(H_7)$: probabilité qu'il soit dans l'immeuble sachant qu'il n'est pas dans les six premiers étages. Ainsi, $\mathbb{P}_A(H_7) = \frac{\mathbb{P}(A \cap H_7)}{\mathbb{P}(A)}$. Or $A \cap H_7 = H_7$ donc $\mathbb{P}_A(H_7) = \frac{p/7}{1 - (6p)/7} = \frac{p}{7 - 6p}$. On constate que si p tend vers 1, $\mathbb{P}_A(H_7)$ tend aussi vers 1 : l'homme est presque sûrement au septième étage ; et que si p tend vers 0, $\mathbb{P}_A(H_7)$ tend vers 0 : l'homme est presque sûrement hors de l'immeuble. C'est rassurant !

8.7 a. Par définition, $B = \bigcap_{i=0}^{+\infty} \overline{A_i} \subset \bigcap_{i=0}^n \overline{A_i}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ donc, par croissance de la probabilité \mathbb{P} , on a $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^n \overline{A_i}\right)$. Comme A_0, \dots, A_n sont indépendants, $\overline{A_0}, \dots, \overline{A_n}$ le sont aussi et on a donc $\mathbb{P}(B) \leq \prod_{i=0}^n \mathbb{P}(\overline{A_i}) = \prod_{i=0}^n (1 - \mathbb{P}(A_i))$. Or $\forall x \in [0; 1[, \ln(1-x) \leq -x$ ce qui donne $\forall x \in [0; 1], 1-x \leq e^{-x}$ (même vrai si $x = 1$) par croissance de l'exponentielle. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(B) \leq \prod_{i=0}^n e^{-\mathbb{P}(A_i)} = \exp\left(-\sum_{i=0}^n \mathbb{P}(A_i)\right)$. Que la série $\sum_{i \geq 0} \mathbb{P}(A_i)$ converge ou pas, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, $\mathbb{P}(B) \leq \exp\left(-\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)\right)$.

b. Si $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge, on a donc $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = +\infty$ (les sommes partielles tendent vers $+\infty$ car c'est une série divergente à termes positifs) donc $\mathbb{P}(B) = 0$.

c. $\mathbb{N} = \{0\} \sqcup \mathbb{N}^*$ donc $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1 = \mathbb{P}(\{0\}) + \mathbb{P}(1.\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}(\{0\}) + 1$ par hypothèse donc $\mathbb{P}(\{0\}) = 0$.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et n nombres premiers p_1, \dots, p_n distincts. On a vu (enfin surtout les ex-MPSI) que pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, on avait l'équivalence $(\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, p_i | k) \iff \left(\prod_{i=1}^n p_i \mid k\right)$. Ainsi, $\bigcap_{i=1}^n A_{p_i} = A_{p_1 \dots p_n}$ donc, par hypothèse, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_{p_i}\right) = \mathbb{P}(A_{p_1 \dots p_n}) = \frac{1}{p_1 \dots p_n} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_{p_i})$. Cette relation étant vraie pour tout choix des nombres premiers distincts p_1, \dots, p_n , $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ est une suite d'évènements indépendants.

Posons $B = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_{p_n}}$, d'après les questions **a.** et **d.**, on a $\mathbb{P}(B) \leq \exp\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_{p_n})\right)$. Or $\omega \in B$ s'il n'est le multiple d'aucun nombre premier donc $B = \{0, 1\}$ et on conclut avec **c.** que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{1\})$. Or la série de BERTRAND $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge par comparaison série-intégrale car une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ qui est continue et décroissante sur $[e; +\infty[$ est $F : x \mapsto \ln(\ln(x))$ qui admet une limite infinie en $+\infty$. Ainsi, avec l'énoncé, $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_{p_n})$ diverge donc, avec **b.**, on a $\mathbb{P}(\{1\}) = 0$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, si on note \mathcal{P}_m l'ensemble des nombres premiers qui divisent m , si on pose $B_m = \bigcap_{p \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_m} \overline{A_p}$, comme avant, puisque \mathcal{P}_m est fini, on trouve encore $\mathbb{P}(B_m) = 0$. Or $m \in B_m$ car m n'est pas un multiple des nombres premiers qui ne divisent pas m par définition. Comme $\{m\} \subset B_m$, on a donc $\mathbb{P}(\{m\}) = 0$.

On a donc $\forall m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{m\}) = 0$ ce qui est impossible car $\mathbb{N} = \bigsqcup_{m=0}^{+\infty} \{m\}$ et $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1$. Il n'existe donc aucune probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0; 1]$ construite sur \mathbb{N} telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, un entier a une probabilité égale à $\frac{1}{k}$ d'être un multiple de k .

8.8 On considère l'évènement U_i : "la boule tirée dans l'urne a pour numéro i ". Pour $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, on note $J_{i,k}$ = "après avoir tiré la boule i , on tire le jeton k dans la boîte i ". On note aussi $K_{i,k}$ = "après avoir tiré la boule i , on tire le jeton k dans la boîte $i+1$ ".

a. Si $n = 2$, $(a = b) = K_{1,1}$ car on tire la boule 1 dans l'urne et on tire le jeton 1 dans la boîte B_1 donc $p_2 = \mathbb{P}(a = b) = \mathbb{P}(K_{1,1}) = \frac{1}{2}$ car les tirages dans l'urne et dans les boîtes sont indépendants et la boîte B_2 ne contient qu'un jeton numéroté 1 et un autre numéroté 2. Bien sûr, on suppose que les tirages, dans l'urne et dans les boîtes, sont équiprobables.

b. Comme on a $(a = b) = \bigsqcup_{k=1}^{n-1} \left(\bigsqcup_{i=k}^{n-1} (J_{i,k} \cap K_{i,k}) \right)$, par incompatibilité des ces évènements, on a la relation

$$p_n = \mathbb{P}(a = b) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k}^{n-1} \mathbb{P}(J_{i,k} \cap K_{i,k}) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k}^{n-1} \left(\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{i} \times \frac{1}{i+1} \right) \text{ car, par la formule des probabilités composées, comme } J_{i,k} \cap K_{i,k} = U_i \cap J_{i,k} \cap K_{i,k}, \text{ on a } \mathbb{P}(J_{i,k} \cap K_{i,k}) = \mathbb{P}(U_i) \mathbb{P}_{U_i}(J_{i,k}) \mathbb{P}_{U_i \cap J_{i,k}}(K_{i,k}). \text{ Ainsi, par télescopage, } p_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k}^{n-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{n}. \text{ On peut transformer } p_n = \frac{1}{n-1} \left(\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) - \frac{n-1}{n} \right) = \frac{1}{n-1} \left(\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right) - 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

On pouvait écrire aussi, en inversant la réunion double, que $(a = b) = \bigsqcup_{i=1}^{n-1} \left(\bigsqcup_{k=1}^i (J_{i,k} \cap K_{i,k}) \right)$ et, avec les mêmes arguments, $p_n = \mathbb{P}(a = b) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^i \left(\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{i} \times \frac{1}{i+1} \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1}$.

On pouvait enfin dire, en notant M_i = "on tire le même numéro de jeton dans la boîte i et la boîte $i+1$ ", que $(a = b) = \bigsqcup_{i=1}^{n-1} (U_i \cap M_i)$ donc $\mathbb{P}(a = b) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(U_i) \mathbb{P}_{U_i}(M_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1}$ par incompatibilité de ces évènements car seul un jeton parmi les $i+1$ jetons de la boîte B_{i+1} permet d'avoir $a = b$.

c. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction \ln est de classe C^1 sur $]k; k+1[$ donc, par l'égalité des accroissements finis, il existe un réel $c_k \in]k; k+1[$ tel que $\ln(k+1) - \ln(k) = \ln'(c_k)(k+1 - k) = \frac{1}{c_k}$. Ainsi, comme

$k < c_k < k + 1$, on a l'encadrement $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ (les inégalités sont même strictes).

On somme les inégalités de la question précédente, pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ à gauche et pour $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ à droite, d'où $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n)$ et $\sum_{k=2}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(2) < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$.

On obtient donc $\frac{\ln(n+1) - \ln(2)}{n-1} < p_n < \frac{\ln(n)}{n-1}$. Ainsi, comme $\frac{\ln(n+1) - \ln(2)}{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$, par encadrement, on a l'équivalent $p_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

8.9 On modélise ce problème en associant chaque vote pour A à un déplacement dans \mathbb{Z}^2 de vecteur $(1, 1)$ et chaque vote pour B à un déplacement de vecteur $(1, -1)$. On part du point $(0, 0)$ et le dépouillement permet donc un chemin qui va de $(0, 0)$ à $(1000, 400)$ selon les règles ci-dessus. On cherche le nombre de chemins qui restent au dessus (au sens strict à part bien sûr à l'origine $(0, 0)$ de ce mouvement) de l'axe des abscisses.

On prend $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $q < p$ et on note $a_{p,q}$ le nombre de chemins dans \mathbb{Z}^2 qui partent de $(0, 0)$ et qui arrivent en $(p+q, p-q)$ en restant toujours au dessus (au sens large) de l'axe des abscisses. Dans notre cas, on a $p = 700$ et $q = 300$. Le nombre total des chemins qui partent de $(0, 0)$ et qui arrivent en $(p+q, p-q)$ est $b_{p,q} = \binom{p+q}{p}$ car il faut choisir parmi les $p+q$ déplacements les p qui se font vers le haut (en complémentaire ceux qui vont vers le bas).

Les $a_{p,q}$ chemins qui restent au dessus de l'axe des abscisses doivent commencer par un déplacement vers le haut donc passer par le point $(1, 1)$. Le nombre total de chemins qui vont de $(1, 1)$ à $(p+q, p-q)$ est, comme ci-dessus, égal à $\binom{p+q-1}{p-1}$. Pour un chemin $c = ((1, 1), (x_2, y_2), \dots, (x_{p+q-1}, y_{p+q-1}), (p+q, p-q))$ qui part de $(1, 1)$ et arrive en $(p+q, p-q)$ et qui touche l'axe des abscisses, on définit l'entier $k \geq 1$ qui est l'indice du premier (k minimal tel que $y_k = 0$) passage par l'axe des abscisses et on associe à c le chemin $c' = ((1, -1), (x_2, -y_2), \dots, (x_{k-1}, -y_{k-1}), (x_k, 0), (x_{k+1}, y_{k+1}), \dots, (x_{p+q-1}, y_{p+q-1}), (p+q, p-q))$. Réciproquement, pour un chemin $c' = ((1, -1), (x'_2, y'_2), \dots, (x'_{p+q-1}, y'_{p+q-1}), (p+q, p-q))$ qui va de $(1, -1)$ à $(p+q, p-q)$, on définit k qui est le premier passage par l'axe des abscisses et on associe à c' le chemin $c = ((1, 1), (x'_2, -y'_2), \dots, (x'_{k-1}, -y'_{k-1}), (x'_k, 0), (x'_{k+1}, y'_{k+1}), \dots, (x'_{p+q-1}, y'_{p+q-1}), (p+q, p-q))$ qui est un chemin allant de $(1, 1)$ à $(p+q, p-q)$ et qui croise l'axe des abscisses.

Ce procédé, appelé principe de réflexion, réalise une bijection entre les chemins allant de $(1, 1)$ à $(p+q, p-q)$ et touchant l'axe des abscisses et les chemins allant de $(1, -1)$ à $(p+q, p-q)$. Mais comme il existe, comme précédemment, $\binom{p+q-1}{p}$ chemins qui vont de $(1, -1)$ à $(p+q, p-q)$, la bijection permet d'affirmer qu'il y a aussi $\binom{p+q-1}{p}$ chemins allant de $(1, 1)$ à $(p+q, p-q)$ et touchant l'axe des abscisses.

En passant par le complémentaire, il existe donc $a_{p,q} = \binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}$ chemins allant de $(1, 1)$ à $(p+q, p-q)$ qui ne croisent pas l'axe des abscisses car un chemin qui va de $(0, 0)$ à $(p+q, p-q)$ sans croiser l'axe des abscisses est un chemin qui va de $(1, 1)$ à $(p+q, p-q)$ sans croiser l'axe des abscisses.

En considérant que tous les chemins sont équiprobables (on peut prendre les bulletins de vote dans un ordre

quelconque et de manière équiprobable), la probabilité cherchée est $\alpha = \frac{a_{p,q}}{b_{p,q}} = \frac{\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}}{\binom{p+q}{p}}$
 qui vaut, comme on a $\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p} = \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!q!} - \frac{(p+q-1)!}{p!(q-1)!} = \frac{(p+q-1)!(p-q)}{p!q!}$ et
 $\binom{p+q}{p} = \frac{(p+q)!}{p!q!} = \frac{(p+q) \cdot (p+q-1)!}{p!q!}$, plus simplement, $\alpha = \frac{p-q}{p+q}$.

Dans notre cas, comme $p = 700$ et $q = 300$, cela donne $\alpha = 0,4$.

8.10 Notons, pour tout l'exercice, les événements $B_n =$ "on obtient une bille blanche au n -ième tirage" et $R_n = \overline{B_n} =$ "on obtient une bille rouge au n -ième tirage".

a. Soit $E_n =$ "on n'obtient que des boules rouges lors des n premiers tirages" de sorte que $E_n = \bigcap_{k=1}^n R_k$. Par la formule des probabilités composées, on a $\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2|R_1) \times \dots \times \mathbb{P}(R_n|R_1 \cap \dots \cap R_{n-1})$. Lors de ce tirage pendant lequel E_n est réalisé, au k -ième tirage, il y aura $k+1$ billes dont k rouges et 1 blanche d'où $\mathbb{P}(R_k|R_1 \cap \dots \cap R_{k-1}) = \frac{k}{k+1}$. Ainsi, $\mathbb{P}(E_n) = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$.

b. Soit $E =$ "on obtient indéfiniment des boules rouges" de sorte que $E = \bigcap_{k=1}^{+\infty} R_k = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n$. Par le théorème de continuité décroissante, comme la suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, on a $\mathbb{P}(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_n)$ donc $\mathbb{P}(E) = 0$ d'après **a.** On pouvait aussi dire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \emptyset \subset E \subset E_n$ donc, par croissance de la probabilité, $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(E_n)$ et on passe à la limite dans cette inégalité pour avoir $\mathbb{P}(E) = 0$.

c. Par symétrie entre les billes blanches et les billes, on sent que $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(\overline{B_n})$ donc $\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{2}$. Pour être plus rigoureux, encore qu'on puisse rendre rigoureux cet argument de symétrie, on va poser, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}_n =$ " $\mathbb{P}(T_1 \cap \dots \cap T_n) = \frac{b!(n-b)!}{(n+1)!}$ où $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, T_i = B_i$ ou $T_i = R_i$ (tirage blanc ou rouge) et $b = \text{card}(\{i \in \llbracket 1; n \rrbracket, T_i = B_i\}) \in \llbracket 0; n \rrbracket$ (nombre de tirages blancs dans ces n premiers tirages)".

Initialisation : $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{2}$ (si $n = 1$) et $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}_{R_1}(B_2)\mathbb{P}(R_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}_{B_1}(R_2)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}_{R_1}(R_2)\mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (si $n = 2$).

Hérédité : soit $n \geq 2$ tel que \mathcal{P}_n est vraie, soit (T_1, \dots, T_{n+1}) avec $\forall i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, T_i = B_i$ ou $T_i = R_i$ et posons $b = \text{card}(\{i \in \llbracket 1; n \rrbracket, T_i = B_i\}) \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Traitons deux cas :

$$\underline{T_{n+1} = B_{n+1}} \text{ Alors } \mathbb{P}(T_1 \cap \dots \cap T_n \cap B_{n+1}) = \mathbb{P}_{T_1 \cap \dots \cap T_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(T_1 \cap \dots \cap T_n) = \frac{b+1}{n+2} \times \frac{b!(n-b)!}{(n+1)!}$$

$$\text{donc } \mathbb{P}(T_1 \cap \dots \cap T_n \cap B_{n+1}) = \frac{(b+1)!(n+1-(b+1))!}{(n+2)!} \text{ par hypothèse de récurrence}$$

car après le n -ième tirage, il y a $b+1$ billes blanches et $n-b+1$ boules rouges et on a bien $b+1$ tirages de billes blanches parmi les $n+1$ premiers tirages.

$$\underline{T_{n+1} = R_{n+1}} \text{ Alors } \mathbb{P}(T_1 \cap \dots \cap T_n \cap R_{n+1}) = \mathbb{P}_{T_1 \cap \dots \cap T_n}(R_{n+1})\mathbb{P}(T_1 \cap \dots \cap T_n) = \frac{n-b+1}{n+2} \times \frac{b!(n-b)!}{(n+1)!}$$

$$\text{donc } \mathbb{P}(T_1 \cap \dots \cap T_n \cap R_{n+1}) = \frac{b!(n+1-b)!}{(n+2)!} \text{ par hypothèse de récurrence car après le}$$

n -ième tirage, il y a $b+1$ billes blanches et $n-b+1$ boules rouges et on a bien b tirages de billes blanches parmi les $n+1$ premiers tirages.

Par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $B_n = \bigsqcup_{\substack{T_i \in \{B_i, R_i\} \\ i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket}} (T_1 \cap \dots \cap T_{n-1} \cap B_n)$, on a donc $\mathbb{P}(B_n) = \sum_{\substack{T_i \in \{B_i, R_i\} \\ i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket}} \mathbb{P}(T_1 \cap \dots \cap T_{n-1} \cap B_n)$ qu'on

partitionne selon le nombre $b-1 \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ de boules blanches tirées pendant les $n-1$ premiers tirages (cela fera b en tout avec le tirage n), et avec le résultat précédent, cela donne enfin le résultat attendu, à savoir

$$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{b=1}^n \binom{n-1}{b-1} \times \frac{b!(n-b)!}{(n+1)!} = \sum_{b=1}^n \frac{(n-1)!b!(n-b)!}{(b-1)!(n-b)!(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{b=1}^n b = \frac{n(n+1)}{2n(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

d. Comme en question **a.**, lors de ce tirage pendant lequel R_n est réalisé, au k -ième tirage, il y aura $2k$ billes dont $2k-1$ rouges et 1 blanche d'où $\mathbb{P}(R_k | R_1 \cap \dots \cap R_{k-1}) = \frac{2k-1}{2k}$. Avec la formule des probabilités

composées, $\mathbb{P}(E_n) = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$. Par STIRLING, $\mathbb{P}(E_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} (e^n)^2}{e^{2n} (\sqrt{2\pi n})^2 (n^n)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ donc,

comme en **b.**, $\mathbb{P}(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_n) = 0$. Il est encore presque certain d'obtenir la boule blanche.

e. Comme en question **a.**, lors de ce tirage pendant lequel R_n est réalisé, au k -ième tirage, il y aura $u_k = 2 + \sum_{i=1}^{k-1} (i-1) = \frac{(k-1)(k-2)}{2} + 2 > 1$ billes (les 2 du début et $i-1$ nouvelles billes au tirage i) dont

$u_k - 1$ rouges et 1 blanche d'où $\mathbb{P}(R_k | R_1 \cap \dots \cap R_{k-1}) = \frac{u_k - 1}{u_k}$. Ainsi, avec la formule des probabilités

composées, $\mathbb{P}(E_n) = \prod_{k=1}^n \frac{u_k - 1}{u_k} > 0$ et $\ln(\mathbb{P}(E_n)) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{u_k}\right)$. Comme $\ln\left(1 - \frac{1}{u_k}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{u_k} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{k^2}$,

la série à termes négatifs $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\ell < 0$ donc, puisque $\mathbb{P}(E_n) = \exp(\ln(\mathbb{P}(E_n)))$, par

continuité de \exp , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_n) = e^\ell > 0$. Ainsi, comme en **b.**, $\mathbb{P}(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_n) > 0$. Il n'est plus

presque certain d'obtenir la boule blanche lors de l'expérience.

8.11 a. Si p est injective, pour $x \in E$, $p \circ p(x) = p(p(x)) = p(x)$ donc $p(x) = x$ par injectivité de p donc $p = \text{id}_E$.

Si p est surjective, soit $x \in E$, $\exists a \in E$, $x = p(a)$ d'où $p(x) = p(p(a)) = p \circ p(a) = p(a) = x$ donc $p = \text{id}_E$.

b. Si $E = \{a, b\}$ est de cardinal 2 avec $a \neq b$, soit $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = b$ et $p(b) = b$. On a bien $p(p(a)) = p(b) = p = p(a)$ et $p(p(b)) = p(b)$ donc $p \circ p = p$ et p est idempotente alors que $p \neq \text{id}_E$.

c. Si $E = \{a, b\}$ est de cardinal 2 avec $a \neq b$, parmi les $4 = 2^2$ applications de E dans E , seule $f : E \rightarrow E$ telle que $f(a) = b$ et $f(b) = a$ n'est pas idempotente, les trois autres le sont, c'est-à-dire

- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = b$ et $p(b) = b$ et
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = a$ et
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = b$.

d. Si $E = \{a, b, c\}$ est de cardinal 3 avec $a \neq b$, $a \neq c$ et $b \neq c$, parmi les $27 = 3^3$ applications de E dans E , les 10 qui sont idempotentes sont les applications suivantes :

- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = a$ et $p(c) = a$ avec $p(E) = \{a\}$.
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = b$ et $p(b) = b$ et $p(c) = b$ avec $p(E) = \{b\}$.
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = c$ et $p(b) = c$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{c\}$.
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = b$ et $p(c) = a$ avec $p(E) = \{a, b\}$.
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = b$ et $p(c) = b$ avec $p(E) = \{a, b\}$.
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = a$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{a, c\}$.

- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = c$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{a, c\}$.
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = b$ et $p(b) = b$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{b, c\}$.
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = c$ et $p(b) = b$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{b, c\}$.
- $p : E \rightarrow E$ telle que $p(a) = a$ et $p(b) = b$ et $p(c) = c$ avec $p(E) = \{a, b, c\}$.

e. (\implies) Si l'application $p : E \rightarrow E$ est idempotente, soit $x \in p(E)$, alors il existe $a \in E$ tel que $x = p(a)$, alors $p(x) = p(p(a)) = p \circ p(a) = p(a) = x$ donc x est un point fixe de p .

(\impliedby) Si $\forall x \in p(E)$, $p(x) = x$, soit $y \in E$, comme $p(y) \in p(E)$, on a $p(p(y)) = p(y)$ par hypothèse donc $p \circ p = p$ et l'application p est idempotente.

Par double implication, si $p : E \rightarrow E$, on a p idempotente si et seulement si ($\forall x \in p(E)$, $p(x) = x$).

f. Le nombre d'applications idempotentes d'un ensemble de cardinal n ne dépend que de ce cardinal, et pas de l'ensemble lui-même. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le cardinal de E (car E est non vide), $I_n = \{p : E \rightarrow E \mid p \text{ idempotente}\}$ et, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $I_{n,k} = \{p : E \rightarrow E \mid p \text{ idempotente et } \text{card}(p(E)) = k\}$. Ainsi, $I_n = \bigsqcup_{k=1}^n I_{n,k}$ car le cardinal de l'image de E par p idempotente est forcément un entier de $\llbracket 1; n \rrbracket$. Comme cette réunion est disjointe, en notant $\alpha_n = \text{card}(I_n)$ et $\alpha_{n,k} = \text{card}(I_{n,k})$, on a $\alpha_n = \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k}$.

Protocole de choix pour les éléments p de $I_{n,k}$ avec la question précédente :

- On choisit les k éléments de $p(E)$: il y a $\binom{n}{k}$ choix.
- Pour les k éléments x de $p(E)$, on a $p(x) = x$ d'après f. : 1 seul choix.
- Les $n - k$ autres éléments ont pour image un des éléments de $p(E)$: k^{n-k} choix.

Ainsi, par indépendance de ces nombres de choix, on a $\alpha_{n,k} = \binom{n}{k} k^{n-k}$.

Par conséquent, le nombre d'applications idempotentes d'un ensemble de cardinal n est $\alpha_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^{n-k}$.

8.12 On note X le résultat du dé lancé par le joueur 1 et Y celui du dé lancé par le joueur 2. Soit A et B les évènements $A = \text{“le joueur 1 gagne”}$. On suppose que, pour le dé noir, les autres faces à part 6 sont équiprobables, de sorte qu'elles apparaissent avec une probabilité $\frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{15}$.

Stratégie 1 : le joueur 1 lance le dé blanc, alors $A = (X \geq Y) = \bigsqcup_{i=1}^6 (X = i, Y \leq i)$ donc, par incompatibilité de ces évènements et, puisque X correspond au dé blanc et Y au dé noir, que les deux dés sont supposées indépendants, $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y \leq i) = \mathbb{P}(X = 6) + \sum_{i=1}^5 \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y \leq i)$ en mettant à part le cas $X = 6$ où le joueur 1 gagne quel que soit le résultat du dé noir, et $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^5 \frac{2i}{15} = \frac{1}{2}$.

Stratégie 2 : le joueur 1 lance le dé noir, alors $A = (X > Y) = \bigsqcup_{i=1}^6 (X = i, Y < i)$ donc, par incompatibilité de ces évènements et, puisque X correspond au dé noir et Y au dé blanc, que les deux dés sont supposées indépendants, $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=2}^6 \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y < i) = \sum_{i=2}^6 \frac{1}{6} \times \frac{2(i-1)}{15}$ et $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$.

Ainsi, la meilleure stratégie pour le joueur 1 est de lancer le dé blanc car $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.