

TD 09 : RÉDUCTION

PSI 1 2025-2026

vendredi 14 novembre 2025

9.1 OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 245II

- a. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.
- b. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A l'est aussi.
- c. Pour $n = 2$, exprimer les vecteurs propres de B en fonction de ceux de A .

9.2 Mines PSI 2016 Hugo Tarlé II (13) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $v_1, \dots, v_p$ des endomorphismes non nuls de E . On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^n = \sum_{k=1}^p \lambda_k^n v_k$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels distincts.

- a. Montrer que u est diagonalisable. Indication : on pourra montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P(u) = \sum_{k=1}^p P(\lambda_k) v_k$.
- b. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$, notée $(L_1, \dots, L_p)$ tel que $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$, $L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$.
- c. Montrer que $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

9.3 CCP PSI 2016 David Espert II (18) Soit $a \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & -1 \\ 2-a & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Trouver une CNS pour que M soit diagonalisable.

9.4 CCP PSI 2016 Sam Pérochon II (14,22) Soit E de dimension finie, H un hyperplan de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- a. Montrer que : H stable par $u \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}$, $\text{Im}(u - \lambda \text{id}_E) \subset H$.
- b. Trouver les sous-espaces stables de $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -4 \\ 18 & -10 & -8 \\ -7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

9.5 Centrale Maths1 PSI 2017 Adrien Cassagne (16) S_n l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1 : $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n a_{i,j} = 1$.

- a. Soit $A \in S_n$, montrer que 1 est valeur propre de A .
- b. Montrer que S_n est stable par produit.
- c. Montrer que si $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \leq 1$, alors $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$, $|\lambda| \leq 1$.

9.6 Mines PSI 2017 Adrien Cassagne II et Elliott Jean-François II (10,5 et 9,5)

Soit $E = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ admet une limite finie en } +\infty\}$. Soit $T : f \mapsto g$ tel que $g(x) = f(x+1)$.

- a. Montrer que E est un espace vectoriel et que $T \in \mathcal{L}(E)$.
- b. Trouver les valeurs propres de T .

9.7 Mines PSI 2019 Thomas Brémond II (8)

Pour $f \in E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$, on définit $T(f) : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $T(f)(x) = (1-x) \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 (1-t) f(t) dt$.

- a. Montrer que T est un endomorphisme injectif de E .
- b. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de T .

9.8 X PSI 2022 Olivier Courmont IV (15) Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

- a. Calculer χ_{A_m} .
- b. Les matrices A_1 et A_2 sont-elles diagonalisables ?
- c. Traiter la diagonalisabilité de A_m dans le cas général.

9.9 Centrale Maths1 PSI 2024 Amélia Arangoits Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et F un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

a. Montrer que F est stable par M si et seulement si $F^\perp$ est stable par M^T .

b. Trouver les sous-espaces stables par $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

9.10 CCINP PSI 2022 (2) et Mines PSI 2024 Fares Kerautret I et Louis Lacarrieu I et Yasmine Azzaoui II

(14,71 et 10,83 et 18) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$.

a. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de A , les valeurs propres de A sont racines de P .

b. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.

c. Montrer que si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AX = XB$, alors $X = 0$.

d. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists ! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = M$.

9.11 Mines PSI 2024 Thomas Favant I (12) Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}^*$ et

$\varphi : E \rightarrow E$ définie par $\varphi(u) = v$ où $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$.

a. Montrer que φ est un automorphisme de E .

b. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ .

9.12 Mines PSI 2024 Clément Reiner II (12,5) Soit $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On pose $E = \mathcal{L}(\mathbb{C})$.

a. Montrer que $E = \{f_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z} \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$.

b. Déterminer le déterminant et la trace de $f_{a,b}$ en fonction de a et b .

c. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f_{a,b}$ soit diagonalisable.

9.13 Mines PSI 2024 Guilhem Thébault I (17) Soit $N \geq 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \frac{2}{N} & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$.

a. Identifier un endomorphisme f de $\mathbb{R}_N[X]$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$.

b. En déduire que A est diagonalisable et donner ses éléments propres.

9.14 CCINP PSI 2024 Edward Bauduin II (16,6) Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant (1) : $M^3 - 4M = 0$ et $\text{Tr}(M) = 0$.

a. Montrer que les valeurs propres de M sont des racines de $P = X^3 - 4X$.

b. En déduire toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant (1).

9.15 CCINP PSI 2024 Jasmine Meyer II (14,67) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$.

a. Montrer que les valeurs propres de A sont des racines de $P = X^3 - X^2 + X - 1$.

b. Calculer $\det(A)$. Prouver que $\text{Tr}(A) \in \mathbb{N}$.

9.16 Mines-Télécom PSI 2024 Clément Lacoste II (15) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

a. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de A .

b. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$, montrer que les vecteurs propres de A sont aussi des vecteurs propres de M . La matrice M est-elle diagonalisable ?

c. Donner toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

9.17 Mines-Télécom PSI 2024 Romane Mioque I (19) Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$,

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u = \sum_{k=1}^n e_k$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, f(e_i) = e_i + u$.

a. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f .

b. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Déterminer la valeur de $\det(f)$ et $\text{Tr}(f)$.