

TD 10 : RÉDUCTION

PSI 1 2025-2026

vendredi 21 novembre 2025

10.1 Mines PSI 2015 Ludovic Péron Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- a. u admet-il toujours une droite stable ?
- b. u admet-il toujours un plan stable ?

10.2 Mines PSI 2016 et 2018 et 2018 Thomas Corbères II et Charlotte Beaune II et Santiago Monteagudo II

Déterminer les différentes classes de similitude des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Indication : la classe de similitude d'une matrice A est l'ensemble des matrices semblables à A .

10.3 Mines PSI 2017 Grégoire Verdès I (14) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a. Que dire des valeurs propres de A ?

Soit λ la valeur propre de A de module maximal. On pose $u_n = \sin(2\pi \operatorname{Tr}(A^n))$ et $v_n = \sin(2\pi\lambda^n)$.

- b. Déterminer les natures des séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} v_n$.

10.4 X PSI 2020 Matthieu Darius II (10) Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

- a. Déterminer le polynôme caractéristique P de C .

On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les racines complexes de P .

- b. Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_k = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^k)$ est à coefficients entiers.

10.5 X PSI 2022 Lucas Lacampagne III (12) Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant.

- a. Soit $n = 2p \in \mathbb{N}^*$ un entier pair, montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.

Indication : considérer les petites valeurs de $\deg(P)$.

- b. Que se passe-t-il si on suppose $n = 2p + 1$ impair ?

10.6 CCINP PSI 2022 Anna Decrock II (17,14) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et f l'ALCA de A .

- a. Trouver les valeurs propres de A .
- b. Est-ce que la matrice A est diagonalisable ?
- c. Donner des vecteurs propres u et v de A et un vecteur w tels que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.
- d. Montrer que A est trigonalisable et la trigonaliser.

10.7 Navale PSI 2022 Naïs Baubry II Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

- a. La matrice A est-elle diagonalisable ?
- b. Trouver une base de $\operatorname{Ker}(A - 2I_3)$.
- c. Trouver les plans stables par A .

10.8 Centrale Maths1 PSI 2024 Romane Mioque et Maxime Plottu

a. Montrer que si A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables, alors $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que M et $2M$ sont semblables.

b. Que vaut $\text{Sp}(M)$? Qu'en déduire sur M ?

c. Trouver un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle telle que M et $2M$ sont semblables.

d. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ nilpotente telle que $\text{rang}(M) = 1$, montrer que M est semblable à $E_{2,3}$.

En déduire que M est semblable à $2M$.

e. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $n - 1$, montrer que M est semblable à $2M$.

10.9 Mines PSI 2024 Tiago Genet et Lou Goiffon I (12,5 et 8,5) Soit $P = X^5 - 4X^4 + 2X^3 + 8X^2 - 8X$.

a. Vérifier que $P(2) = P'(2) = 0$. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P(M) = 0$ et $\text{Tr}(M) = 0$.

10.10 Mines PSI 2024 Martin Mayot I (5) Soit $A_0 = (1) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & 0 \end{pmatrix}$.

a. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la taille de la matrice A_n .

b. Calculer le rang de A_n .

c. Donner les valeurs propres de A_n . La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

10.11 Mines PSI 2024 Antoine Vergnenègre I (11) Soit $(U, V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $UV = VU$ et V nilpotente.

a. Montrer que $\det(I_n + M) = 1$ si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente.

b. Montrer que $\det(U + V) = \det(U)$ si U est inversible.

c. Montrer que $\det(U + V) = \det(U)$. Indication : montrer que $\text{Ker}(U)$ est stable par V .

10.12 CCINP PSI 2024 Amélia Arangoits II (19,36) Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et f canoniquement associé à A .

a. Donner au moins une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension fini.

b. Donner les valeurs propres de A . La matrice A est-elle diagonalisable ?

c. Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$.

10.13 CCINP PSI 2021 et 2024 Johan Haramboure II et Martin Mayot I (15,18 et 17,59)

Soit $n \geq 1$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

a. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et U et V des matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $Q(U)$ et $Q(V)$ sont semblables.

b. Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer M^k .

c. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, donner une expression de $P(M)$ en fonction de A , $P(A)$ et $P'(A)$.

d. Montrer que si M est diagonalisable, alors A l'est aussi.

e. Étudier la réciproque si A est inversible.

f. Montrer que si M est diagonalisable et A n'est pas inversible, alors $A = 0$.

10.14 CCINP PSI 2019 et 2024 Thomas Méot I et Tom Sanchez II (17,89 et 10,85)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B, U) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^3$ avec $AU = UB$ et $U \neq 0$.

a. Montrer que si $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifie $P(A) = 0$, alors $\text{Sp}(A)$ est inclus dans l'ensemble des racines de P .

b. Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)U = UP(B)$.

c. En déduire A et B possèdent une valeur propre commune.

d. Montrer que si deux matrices C, D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ont une valeur propre commune, il existe une matrice non nulle $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $CM = MD$.