

TD 11 : SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2025-2026

vendredi 28 novembre 2025

11.1 CCP PSI 2016 Sylvain Bielle I (8,69) Soit $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = x \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{2n}$ si $x \in]0; 1]$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement mais pas uniformément vers $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ à préciser.

11.2 ICNA PSI 2017 sans préparation Aloïs Blarre Soit $f_n : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

11.3 Mines PSI 2016 et 2019 Thomas Corbières I et Louis Destarac I (14 et 16)

Pour $n \geq 1$, on définit la fonction $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^\alpha$.

- Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[0; 1]$.
- Étudier la convergence simple puis uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $[0; 1]$.

11.4 CCP PSI 2019 Thomas Brémont et Lucas Maisonnave I (12 et 15,61)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

a. Montrer la convergence de $(I_n)_{n \geq 0}$ vers un réel ℓ à déterminer.

b. Montrer que $I_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$.

c. En déduire que $I_n \sim_{+\infty} \frac{\pi^2}{12n}$.

11.5 CCP PSI 2019 et CCP PSI 2015 Julien Tissot I et Agatha Courtenay I On pose $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$.

a. Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n$.

b. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u} du$.

11.6 X PSI 2022 Lucas Lacampagne I (12)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée telle que $f(0) \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} f(t)}{\sqrt{t}} dt$.

a. Trouver un équivalent de a_n .

b. Que se passe-t-il si $f = \sin$?

11.7 ENS Cachan PSI 2022 Noé Chassagne I (16) On définit, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln^q(x) dx$.

a. Montrer l'existence de $I_{p,q}$ pour toutes valeurs des entiers naturels p et q .

b. Calculer $I_{p,q}$ pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.

c. En déduire que $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

11.8 Centrale Maths1 PSI 2022 Joël Lascoumes (7) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(t)}{t} dt$.

a. Montrer que u_n est bien défini pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

c. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$ converge.

d. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

11.9 Mines PSI 2022 Olivier Courmont II (17) Avec $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{e^t - 1} dt$.

11.10 Mines PSI 2022 Guillaume Tran-Ruesche III (17) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^{-1/n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} dx$.

11.11 Centrale Maths1 PSI 2024 Antoine Métayer Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$. On définit aussi $f :]-1; 0[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^x}{t} dt$.

a. Montrer que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \sim_{+\infty} \frac{\lambda}{n^\alpha}$.

b. Montrer que f est bien définie et que $\forall x \in]-1; 0[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x(x-1) \cdots (x-n+1)}{n \cdot n!}$.

11.12 Mines PSI 2024 Tristan Cheyrou II (11) Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$.

a. Justifier que la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ est bien définie.

b. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à déterminer.

c. Trouver un équivalent de $I_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

d. En déduire la nature de $\sum_{n \geq 2} (I_n - \ell)$.

11.13 Mines PSI 2024 Tiago Genet II (12,5) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x > 0$, $f_0(x) = x$ et, si $n \in \mathbb{N}$, par $\forall x > 0$, $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)} \right)$. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

11.14 Mines PSI 2024 Lucie Girard I (10) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) dt$.

a. Montrer la convergence de la suite $(H_n - \ln(n))_{n \geq 1}$. On note γ sa limite.

b. Établir la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$. On note $I = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$.

c. Prouver l'existence de I_n et trouver un lien simple entre I_n et H_n .

d. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et trouver un lien entre γ et I .

11.15 Mines PSI 2021 (3) et Mines PSI 2024 Quentin Granier IV et Baptiste Pozzobon III et Raffi Sarkissian III et Valentine Girard III (19,5 et 15 et 16 et 12,5) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(x) \ln(1-x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

11.16 CCP PSI 2019 (2) et CCINP PSI 2024 Louis Destarac et Victor Margueritte I et Amélia Arangoits I

(15,81 et 14,91 et 19,36) Soit $a \in \mathbb{R}$, on définit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de S selon les valeurs de a .

Dans la suite de l'exercice, on impose $|a| < 1$.

b. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Trouver une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$ pour $x > 0$.

d. Trouver un équivalent de S en 0.

e. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

f. Trouver un équivalent de S en $+\infty$.

11.17 CCINP PSI 2024 Amjad Belmiloud II Soit $f_n : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sin(nx e^{-nx^2})$.

a. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction F à déterminer.

b. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur tout segment $[a; 1]$ avec $a \in]0; 1[$.

c. En considérant $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$, que dire de la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 1}$ sur $[-1; 1]$?