TD 12 : SÉRIES DE FONCTIONS

PSI 1 2025-2026 **vendredi 05 décembre 2025**

12.1 *Mines PSI 2014* Mathias Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}-i\theta}\,d\theta$.

12.2 *CCP PSI 2016 et Centrale Maths1 PSI 2018* Marie Rebière I et Elisabeth Carreau-Gaschereau (13,94 et 9)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \ln(1+e^{-nx})$. En cas de convergence, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Donner le domaine de convergence I de f. La fonction f est-elle continue sur I ?

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et donner $f(I)$.

12.3 *Mines PSI 2018* Gauthier Crosio I (12) Soit $(E)\ :\ u(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x u\left(\frac{t}{2}\right)dt$ d'inconnue $u \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

On définit $u_0 : x \mapsto 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} : x \mapsto 1 + \displaystyle\int_0^x u_n\left(\frac{t}{2}\right)dt$.

a. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ et en déduire la convergence simple de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 0}$. On note u sa limite.

b. Prouver que u est solution de (E). Résoudre entièrement (E).

12.4 *Mines PSI 2018* Erwan Dessailly II (9) On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est continue sur D.

b. Établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner $f'(x)$ sous forme d'une somme d'une série.

c. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et, plus précisément, trouver un équivalent de $f(x) - \ell$ quand x tend vers $+\infty$.

12.5 *Mines PSI 2018* Thibaud Vendrely I (14) Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Donner une expression plus simple de $\prod\limits_{n=0}^{N} (1+x^{2^n})$.

c. En déduire une expression de $f(x)$.

12.6 *CCP PSI 2019* Maël Classeau II (12,54) Pour $n \geqslant 2$, soit $u_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition D de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n$.

b. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ ne converge pas normalement sur D.

c. Montrer que $\forall x \in D,\ \forall n \geqslant 2,\ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

d. En déduire que la fonction $S : x \mapsto \sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur D.

e. La fonction S est-elle intégrable sur D ?

12.7 *Petites Mines PSI 2019* Elaia Mugica II

Soit $I = \mathbb{R}_+^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \mapsto \dfrac{x-1}{(n+1)(n+x)}$. En cas de convergence, on pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Montrer que S est de classe C^1 sur I et calculer S'.

b. Calculer $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+x}$ et en déduire la valeur de $S(p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

c. Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

12.8 *CCINP PSI 2022* Thibault Sourdeval II (20) En cas de convergence, on pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh}(x)} dx$.

a. Montrer que I existe et que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$.

b. En déduire la valeur numérique de I. Indication : on rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

12.9 *Mines-Télécom PSI 2022* Paul Sterlin II Soit $t \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{n^2 + t^2}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f. Étudier la continuité de f sur D.
b. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et trouver un équivalent de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

12.10 *CCINP PSI 2016 et Mines PSI 2024* Léo Fusil II et Jasmine Meyer I (17,91 et 11,5)

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : x \mapsto \frac{x}{x^2 + n^2}$. On définit aussi $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$.
a. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$.
b. Y a-t-il convergence normale de $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$?
c. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
d. Donner un équivalent simple de $S(x)$ quand x tend vers 0. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
e. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} S(x)$. Y-a-t-il convergence uniforme de $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}$?

12.11 *CCINP PSI 2024* Olivier Farje I (14,87) On pose $u_n : x \mapsto \frac{\ln(1 + nx^2)}{n^2}$ et $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
a. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
b. Montrer que $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.
c. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
d. Déterminer $S(0)$ et $\lim_{x \to +\infty} S(x)$.
e. Trouver un équivalent de $S'(x)$ quand x tend vers 0^+.

12.12 *CCINP PSI 2021 et CCINP PSI 2024* Mathilde Arnaud I et Lucie Girard I (13,98 et 12,09)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$. On définit aussi $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
a. Déterminer le domaine de définition D de S et montrer que S est continue sur D.
b. Y a-t-il convergence uniforme de $\sum_{n \geqslant 1} u_n'$ sur D ?
c. Calculer $S'(x)$ pour x convenable.
d. En déduire une expression simple de $S(x)$ pour $x \in D$.

12.13 *Centrale 2014 et Mines-Télécom PSI 2024* Thibault et Mathéo Demongeot-Marais I (15)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^2 x + n}$. On définit aussi $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
a. Déterminer le domaine de définition D de f. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
b. Montrer qu'il existe un réel a tel que $\forall x > 0$, $\left| f(x) - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right| \leqslant \frac{a}{x^2}$.
c. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
d. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.

12.14 *Mines-Télécom PSI 2024* Romane Mioque II (19) Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(x+n)}$.
a. Justifier que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
b. Trouver des réels a et b tels que $f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.