

TD 13 : ESPACES PRÉHILBERTIENS

PSI 1 2025-2026

vendredi 12 décembre 2025

13.1 Mines PSI 2017 Maxime Lacourcelle II (6) Soit E un espace euclidien de dimension n .

- a. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists (f_1, \dots, f_n) \in E^n, M = ((e_i | f_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.
- b. La réciproque est-elle vraie ?

13.2 Mines PSI 2018 Jean Boudou II (12,5) Soit E euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$ une famille. On suppose que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x | e_k)^2$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E .

13.3 Mines PSI 2018 Julien Langlais I (10,5)

Soit $]a; b[\subset \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement positive et intégrable sur $]a; b[$.

- a. Montrer que $\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère $(P_0, \dots, P_n)$ l'orthonormalisée de GRAM-SCHMIDT de la base canonique $(1, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Dans toute la suite de l'exercice k désigne un entier dans $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$.

- b. Montrer qu'il existe $(a_k, b_k, c_k) \in \mathbb{R}^3$ tel que $XP_k = a_k P_{k+1} + b_k P_k + c_k P_{k-1}$.
- c. Si $k \geq 2$, montrer que $c_k = a_{k-1}$.
- d. Avec $\langle P_k, 1 \rangle$, montrer que P_k possède une racine réelle de multiplicité impaire dans $]a; b[$.

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in]a; b[$ les racines de multiplicités impaires de P_k dans l'intervalle $]a; b[$.

- e. En considérant $Q_k = \prod_{i=1}^p (X - x_i)$ et $\langle P_k, Q_k \rangle$, montrer que $p = k$.

- f. En déduire que les racines complexes de P_k sont toutes réelles, toutes dans $]a; b[$ et toutes simples.

13.4 CCP PSI 2018 Benoit Souillard I On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

- a. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

- b. Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- c. Déterminer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$.

13.5 Centrale Maths1 PSI 2022 Louis Lacarrieu (12) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$.

On note, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $B_k = \frac{X^k}{k!}$ et $L_k : t \mapsto \frac{(-1)^k}{k!} e^t f_k^{(k)}(t)$ où $f_k : t \mapsto e^{-t} t^k$.

- a. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
- b. La famille $\mathcal{B} = (B_0, \dots, B_n)$ est-elle une base orthonormale de E ?
- c. Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_n)$ est une famille de vecteurs de E .
Donner le degré et le coefficient dominant de L_k pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
- d. La famille $\mathcal{L}$ est-elle une base orthonormale de E ?
- e. On définit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$. Donner une base de F , de $F^\perp$.
- f. Calculer $\inf_{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 - a_1 t - \dots - a_n t^n)^2 e^{-t} dt$.

13.6 CCINP PSI 2022 Marius Desvalois I (10,83)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'espace $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur lequel on définit, pour tout $(X, Y) \in E^2$, $\langle X, Y \rangle = X^T Y \in \mathbb{R}$.

- a. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E . On note $\|\cdot\|$ sa norme euclidienne associée.
- b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y \in E$ fixés, on définit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(X) = \|AX - Y\|$.
- c. Montrer que $f(X) = \inf_{Z \in E} f(Z)$ si et seulement si $A^T(AX - Y) = 0$.

13.7 CCINP PSI 2022 Matis Viozelange II (11,53)

On note $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$ et, pour $(f, g) \in E^2$, $(f|g) = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt$. On pose F le sous-espace de E composé des fonctions affines de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $F = \{f \in E \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in [0; 1], f(x) = ax + b\}$.

- Montrer que $(\cdot | \cdot)$ définit un produit scalaire sur E .
- Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de $\int_0^1 t^n \ln(t)dt$ et calculer sa valeur.
- Déterminer le projeté orthogonal de $f : x \mapsto x \ln(x)$ sur F .
- Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|g_{a,b}\|$ où $g_{a,b} : x \mapsto ax + b - x \ln(x)$.

13.8 Mines PSI 2024 Lucie Girard II (10) Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E .

- Montrer que $F \subset (F^\perp)^\perp$.
- On prend, pour les deux prochaines questions, $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.
- Déterminer $F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp$ si on munit E du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ défini par $(P|Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.
- Déterminer $F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp$ si on munit E du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ défini par $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
- Donner une condition suffisante pour que $F = (F^\perp)^\perp$.
- La condition suffisante de la question précédente est-elle nécessaire ?

13.9 Mines PSI 2024 Mathis Laruelle I (18) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0\}$ et p la projection orthogonale sur F et s la symétrie orthogonale par rapport à F .

- Trouver une base orthonormale de F et la compléter en une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer les matrices de p et s dans la base $\mathcal{B}'$.
- Déterminer les matrices de p et s dans la base $\mathcal{B}$.

13.10 Mines PSI 2024 Jasmine Meyer II (11,5)

Soit E un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée et p un projecteur de E .
Montrer que p est orthogonal si et seulement si p est 1-lipschitzien.

13.11 CCINP PSI 2024 Mathéo Demongeot-Marais II (16,03) Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$,

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormale de E et p un projecteur orthogonal de E tel que $\text{rang}(p) = r$.

- Montrer que $\forall x \in E, (p(x)|p(x)) = (x|p(x))$.
- Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(v_i)\|^2 = r$.

13.12 CCINP PSI 2024 Clément Lacoste II (8,63)

- Montrer que $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\exists ! u_n \in \mathbb{R}_n[X], \forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_{-1}^1 P(t)u_n(t)dt$.
- Déterminer u_2 .

13.13 Mines-Télécom PSI 2024 Émile Gauvrit I (13)

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ dans lequel on considère $F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y - z - t = x - y + z - t = 0\}$.

- Déterminer la matrice A dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à F .
- Que constate-t-on sur cette matrice ? Était-ce prévisible ?