PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 08

PSI 1 2025-2026 **du lundi 17/11 au vendredi 21/11**

1 Probabilités : voir programme précédent

2 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice :

- valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme ; spectre ;
- exemples en dimension infinie : spectre vide, spectre infini ;
- les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux sont en somme directe ;
- rapport entre commutation des endomorphismes et stabilité des sous-espaces propres ;
- valeurs propres réelles ou complexes d'une matrice ; relation avec la conjugaison ;
- relation entre spectre d'un endomorphisme et d'une matrice ;

3 Polynôme caractéristique :

- définition du polynôme caractéristique ($\chi_u = \mathrm{det}(X\mathrm{id}_E - u)$) d'une matrice ou d'un endomorphisme ;
- expression développée de $\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}\,(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\mathrm{det}(u)$;
- les valeurs propres d'un endomorphisme u sont exactement les racines de χ_u ;
- multiplicité algébrique (ordre de multiplicité de la racine dans χ_u) d'une valeur propre ;
- si χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ relation entre $\mathrm{dim}(E)$, $\mathrm{Tr}\,(u)$, $\mathrm{det}(u)$ et les valeurs propres ;
- polynôme caractéristique de matrices semblables ou de la transposée d'une matrice ;
- si F stable par u alors χ_{u_F} divise χ_u ;
- multiplicité géométrique (dimension du sous-espace propre associé) d'une valeur propre ;
- la multiplicité géométrique est inférieure à la multiplicité algébrique (et $\geqslant 1$) pour une valeur propre ;
- application du polynôme caractéristique pour calculer le déterminant des matrices ;
- théorème de Cayley-Hamilton (preuve non exigible) ;

4 Diagonalisation en dimension finie :

- définition d'un endomorphisme diagonalisable ;
- équivalence entre u diagonalisable et χ_u scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ \mathrm{dim}(E_\lambda(u)) = m_\lambda(u)$;
- cas particulier pratique où il y a $\mathrm{dim}(E)$ racines distinctes de χ_u ;

QUESTIONS DE COURS :

1 définir ce qu'est une famille d'évènements indépendants (déf. 4.17)
2 énoncer les deux types de formules de Bayes (th. 4.30 et 4.31)
3 prouver la formule des probabilités totales (th. 4.29)
4 définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie (déf. 5.3)
5 définir les ordres de multiplicité géométrique et algébrique d'une valeur propre (déf 5.4 et 5.5)
6 énoncer la propriété sur des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes (prop. 5.2)
7 énoncer la propriété sur les valeurs propres et sous-espaces propres de matrices semblables (prop. 5.5)
8 énoncer le théorème concernant certains coefficients de χ_u (th. 5.7)
9 prouver que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $\lambda \neq 0$, alors $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}\,(u)$ (prop. 5.1)
10 prouver que si u et v commutent, les $E_\lambda(u)$ sont stables par v (prop. 5.3)

Prévision pour la prochaine semaine : presque toute la réduction