

TD 09 : RÉDUCTION

PSI 1 2025-2026

vendredi 14 novembre 2025

- 9.1 a.** Posons $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\chi_C = X^2 - 2X - 3 = (X+1)(X-3)$ est scindé à racines simples donc C est diagonalisable. Comme $E_{-1}(C) = \text{Vect}((-2, 1))$ et $E_3(C) = \text{Vect}((2, 1))$, on a $C = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Posons $Q = \begin{pmatrix} -2I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$, comme $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on vérifie (par blocs) que Q est inversible avec $Q^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ I_n & -2I_n \end{pmatrix}$ et $Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$ donc B est semblable à $B' = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.
- b.** Si A est diagonalisable, il existe une matrice inversible U telle que $A = UDU^{-1}$ et avec $V = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$, $V^{-1} = \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}$, on a $V^{-1} \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} -D & 0 \\ 0 & 3D \end{pmatrix}$ diagonale donc B est diagonalisable.
- Si B est diagonalisable, il existe un polynôme scindé à racines simples R tel que $R(B) = 0$. Comme B et B' sont semblables, on a aussi $R(B') = \begin{pmatrix} R(-A) & 0 \\ 0 & R(3A) \end{pmatrix} = 0$ donc en posant $S(X) = R(-X)$, S est aussi scindé à racines simples et annule A donc A est diagonalisable.
- c.** Puisque B est semblable à B' , $\chi_B = \chi_{B'} = \det(XI_n + A)\det(XI_n - 3A) = (-1)^n 3^n \chi_A(-X)\chi_A(X/3)$. Ainsi, $\text{Sp}(B) = (-\text{Sp}(A)) \cup (3\text{Sp}(A))$. Supposons que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable, alors il existe une base (X_1, X_2) de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A : par exemple $AX_1 = \lambda_1 X_1$ et $AX_2 = \lambda_2 X_2$. Alors en notant $Y_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ X_1 \end{pmatrix}$, $Y_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \end{pmatrix}$, on a $B'Y_1 = -\lambda_1 Y_1$, $B'Y_2 = -\lambda_2 Y_2$, $B'Y_3 = 3\lambda_1 Y_3$ et $B'Y_4 = 3\lambda_2 Y_4$ et il est facile de vérifier que (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) est libre dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ donc que c'en est une base qui est une base de vecteurs propres de B' , et une base de vecteurs propres de B est donc, d'après ce qui précède, (QY_1, QY_2, QY_3, QY_4) (qui est une famille libre donc une base de $\mathbb{R}^4$ car Q est inversible).
- 9.2 a.** Soit un polynôme $P = \sum_{n=0}^m a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(u) = \sum_{n=0}^m a_n u^n$ par définition donc, en intervertissant les sommes doubles, on obtient $P(u) = \sum_{n=0}^m \left(a_n \sum_{k=1}^p \lambda_k^n v_k \right) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{n=0}^m a_n \lambda_k^n \right) v_k = \sum_{k=1}^p P(\lambda_k) v_k$.
- Soit $P = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)$. On a clairement $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $P(\lambda_k) = 0$ donc $P(u) = 0$ d'après ce qui précède. Comme P est un polynôme annulateur scindé à racines simples de u , on en déduit que u est diagonalisable.
- b.** Ce sont les fameux polynômes d'interpolation de LAGRANGE. Pour $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, soit $L_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^p \left(\frac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} \right)$. On a $\forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $L_j \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, et plus précisément $\deg(L_j) = p - 1$. De plus, $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$, $L_j(\lambda_i) = \delta_{i,j}$. Or si $\sum_{k=1}^p \alpha_k L_k = 0$ avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$, en évaluant ceci en λ_j pour $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on trouve $\alpha_j = 0$ ce qui prouve que $(L_1, \dots, L_p)$ est libre. Comme $\dim(\mathbb{R}_{p-1}[X]) = p$, $(L_1, \dots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.
- c.** Comme $P = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)$ est annulateur de u , on sait d'après le cours que $\text{Sp}(u) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Si, pour $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on avait $\lambda_j \notin \text{Sp}(u)$, alors le spectre de u serait inclus dans l'ensemble des racines de L_j donc $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$ diviserait L_j . Mais puisque u est diagonalisable, $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u donc

on aurait $L_j(u) = 0$. Or, avec **a.** et **b.**, on a $L_j(u) = \sum_{k=1}^n L_j(\lambda_k)v_k = v_j \neq 0$ (par hypothèse) ce qui clôt le raisonnement par l'absurde. Par conséquent, par double inclusion, on conclut $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

9.3 $\chi_M = \begin{vmatrix} X-1-a & -1 & 1 \\ a-2 & X-2 & 2 \\ 1 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1-a & -1 & 0 \\ a-2 & X-2 & X \\ 1 & 1 & X \end{vmatrix}$ après l'opération $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$ puis, après $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, on obtient $\chi_M = \begin{vmatrix} X-1-a & -1 & 0 \\ a-3 & X-3 & 0 \\ 1 & 1 & X \end{vmatrix}$. On développe par rapport à la troisième colonne et $\chi_M = X \begin{vmatrix} X-1-a & -1 \\ a-3 & X-3 \end{vmatrix} = X((X-1-a)(X-3) + a-3) = X(X^2 - (a+4)X + 4a) = X(X-a)(X-4)$.

Traitons trois cas :

- Si $a \notin \{0, 4\}$, alors χ_M est scindé à racines simples donc M est diagonalisable.
- Si $a = 0$, $\chi_M = X^2(X-4)$, $\text{rang}(M) = 1$ car $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc, avec la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(M)) = 2$ et M est diagonalisable car les ordres algébrique et géométrique de 0 sont égaux.
- Si $a = 4$, $\chi_M = X(X-4)^2$, $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $M - 4I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc $\dim(E_4(M)) = 1$ toujours d'après la formule du rang et l'ordre de multiplicité géométrique de 4 est strictement inférieur à son ordre algébrique donc M n'est alors pas diagonalisable.

En conclusion : la condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable est $a \neq 4$.

- Plus précisément si $a = 0$: $E_0(M) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (0, 1, 1)$ et $v_2 = (1, -1, 0)$ et $E_4(M) = \text{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (1, 2, -1)$ donc $M = PDP^{-1}$ avec $D = 4E_{3,3}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Plus précisément si $a = 4$: comme χ_M est scindé dans $\mathbb{R}$, la matrice M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Après calculs, on trouve $E_0(M) = \text{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (0, 1, 1)$ et $E_4(M) = \text{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = (1, -1, 0)$.

On espère prouver que M est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (réduction de JORDAN) ce qui nous pousse à chercher un vecteur v_3 tel que $Mv_3 = 4v_3 + v_2$ ou encore $(M - 4I_3)v_3 = v_2$. On trouve par exemple $v_3 = \left(\frac{3}{4}, 0, -\frac{1}{4}\right)$ et (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ donc $M = QTQ^{-1}$ avec $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$.

9.4 a. Analyse : soit un hyperplan H supposé stable par u .

Méthode 1 : soit φ une forme linéaire non nulle sur E telle que $H = \text{Ker } \varphi$. Pour $x \in H$, on a $u(x) \in H$ donc $\varphi(u(x)) = 0$, ainsi $\psi = \varphi \circ u$ est une forme linéaire sur E telle que $H \subset \text{Ker}(\psi)$. Soit $\psi = 0$ et alors $\psi = 0 \cdot \varphi = \lambda \varphi$ avec $\lambda = 0$, soit $\psi \neq 0$ et alors $H = \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$ donc, d'après le cours, φ et ψ sont proportionnelles et $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda \varphi = \varphi \circ u$. Que λ soit nul ou pas, il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\psi = \varphi \circ u = \lambda \varphi$ ce qui s'écrit aussi $\varphi \circ (u - \lambda \text{id}_E) = 0$ donc $\text{Im}(u - \lambda \text{id}_E) \subset \text{Ker}(\varphi) = H$.

Méthode 2 : Soit $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_{n-1})$ une base de H qu'on complète en une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ de E . Alors la stabilité de H par u montre que la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} A' & C \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u|_H)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Ainsi $A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} A' - \lambda I_{n-1} & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ possède une dernière ligne de 0 ce qui montre que $\text{Im}(u - \lambda \text{id}_E) \subset \text{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1}) = H$.

Synthèse : s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\text{Im}(u - \lambda \text{id}_E) \subset H$, alors soit $x \in H$, on a alors $u(x) = u(x) - \lambda x + \lambda x$ donc $u(x) = (u - \lambda \text{id}_E)(x) + \lambda x \in H$ car $(u - \lambda \text{id}_E)(x) \in \text{Im}(u - \lambda \text{id}_E) \subset H$. Ainsi H est stable par u .

On a bien établi l'équivalence : H stable par $u \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \text{Im}(u - \lambda \text{id}_E) \subset H$.

b. Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ stable par A . Distinguons selon la dimension de F :

- si $\dim(F) = 0$, alors $F = \{0\}$ qui est bien stable par A .
- si $\dim(F) = 1$, alors $F = \text{Vect}(e)$ et on sait que F est stable par u si et seulement si e est un vecteur propre de A . On calcule donc $\chi_A = X^3 - 3X^2 + 12X$ donc 0 est la seule valeur propre réelle car le discriminant de $X^2 - 3X + 12$ vaut $\Delta = 9 - 48 < 0$. Comme $\text{rang}(u) = 2$, $\text{Ker}(A) = E_0(A)$ est une droite, c'est $\text{Ker}(A) = \text{Vect}(e)$ avec $e = (1, 1, 1)$. Ainsi, $\text{Vect}(e)$ est la seule droite stable par A .
- si $\dim(F) = 2$, F est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et la question précédente montre l'existence d'un scalaire λ tel que $\text{Im}(A - \lambda I_3) \subset F$ ce qui prouve que $\lambda \in \text{Sp}(A)$ car $A - \lambda I_3$ ne peut pas être inversible. Ainsi, $\lambda = 0$ et $\text{Im}(A) \subset F$ donc $\text{Im}(A) = F$ car ils ont même dimension. Comme $\text{Im}(A) = \text{Vect}(a, b)$ avec $a = f(e_2) = (-6, -10, 4)$ et $b = f(e_3) = (-4, -8, 3)$ par exemple, $\text{Vect}(a, b)$ est le seul plan stable par A .
- si $\dim(F) = 3$, alors $F = \mathbb{R}^3$ qui est bien stable par A .

Au final, les seuls sous-espaces propres stables par A sont $\{0\}$, la droite $\text{Ker}(A)$, le plan $\text{Im}(A)$ et $\mathbb{R}^3$.

9.5 a. Soit X_0 le vecteur colonne ne contenant que des 1, alors $A^T X_0 = X_0$ par hypothèse sur les colonnes de A (donc les lignes de A^T). Ainsi, 1 est valeur propre de A^T donc aussi valeur propre de A car $\chi_A = \chi_{A^T}$.

b. Soit A et B deux matrices de S_n et $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = AB$. Comme $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$, la somme des termes de la j -ième colonne de C vaut $\sum_{i=1}^n c_{i,j} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right) = \sum_{k=1}^n b_{k,j} \left(\sum_{i=1}^n a_{i,k} \right) = \sum_{k=1}^n b_{k,j} = 1$ car la somme des termes de chaque colonne k de A vaut 1 et que la somme de chaque colonne j de la matrice B vaut aussi 1. Par conséquent $C \in S_n$ et S_n est bien stable par produit.

c. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$, alors $\lambda \in \text{Sp}(A^T)$ de sorte qu'il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $A^T X = \lambda X$. Notons j l'un des indices tels que $|x_j| = \|X\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| > 0$. Alors, en regardant à la ligne j de $A^T X = \lambda X$, on trouve

$\lambda x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} x_i$ donc, par inégalité triangulaire, $|\lambda| |x_j| \leq \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq |x_j|$. Ainsi, $|\lambda| \leq 1$.

9.6 a. Le caractère continu est linéaire et admettre une limite finie en $+\infty$ l'est aussi donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car il contient la fonction nulle. E est donc lui-même un espace vectoriel. Par ailleurs, si $f \in E$, il est clair que $g = T(f) \in E$ aussi car g est continue et tend vers la même limite que f en $+\infty$ par composition. Soit $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$ car on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $T(\lambda f + g)(x) = (\lambda f + g)(x+1) = \lambda f(x+1) + g(x+1) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x) = (\lambda T(f) + T(g))(x)$ ce qui prouve la linéarité de T : T est bien un endomorphisme de E .

b. Analyse : si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$ non nulle telle que $T(f) = \lambda f$, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x+1) = \lambda f(x)$, alors en notant $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, on a $\ell = \lambda \ell$ en passant à la limite dans la relation $f(x+1) = \lambda f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

• Si $\ell \neq 0$ alors $\lambda = 1$.

• Si $\ell = 0$, soit $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) \neq 0$, par une récurrence simple, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a+n) = \lambda^n f(a)$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a+n) = 0$ par composition, la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 ce qui impose $\lambda \in]-1; 1[$.

• Si $\lambda = 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = 0 \cdot f(x) = 0$ ce qui contredit f non nulle.

Ce qui précède montre que le spectre de T est inclus dans $] -1; 0[\cup]0; 1[$.

Synthèse :

• Si $\lambda = 1$, la fonction 1 constante égale à 1 vérifie $T(1) = 1$ donc 1 est valeur propre de T . De plus, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x+n) = f(x)$ par une récurrence simple donc, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $f(x) = \ell$ donc f est constante. On vient de montrer que $E_1(T) = \text{Vect}(1)$.

• si $\lambda \in]0; 1[$, soit $p_\lambda : x \mapsto \lambda^x$. La fonction p_λ est non nulle, continue et tend vers 0 en $+\infty$ donc $p_\lambda \in E$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $p_\lambda(x+1) = \lambda^{x+1} = \lambda p_\lambda(x)$ donc $T(p_\lambda) = \lambda p_\lambda$ et $\lambda \in \text{Sp}(T)$.

• si $\lambda \in]-1; 0[$, la fonction $q_\lambda : x \mapsto \sin(\pi x) |\lambda|^x$ est non nulle, continue et tend vers 0 en $+\infty$ donc $q_\lambda \in E$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $q_\lambda(x+1) = \sin(\pi x + \pi) |\lambda|^{x+1} = (-|\lambda|) q_\lambda(x) = \lambda q_\lambda(x)$ donc $T(q_\lambda) = \lambda q_\lambda$ et $\lambda \in \text{Sp}(T)$.

Par conséquent : $\text{Sp}(T) =]-1; 0[\cup]0; 1[$.

9.7 a. D'abord, si $f \in E$, $T(f)$ est bien définie sur $[0; 1]$ car les fonctions $t \mapsto tf(t)$ et $t \mapsto (1-t)f(t)$ sont continues sur le segment $[0; 1]$. D'après le théorème fondamental de l'intégration, $T(f)$ est C^1 sur $[0; 1]$ en tant que somme de produit de fonctions de classe C^1 sur $[0; 1]$. La linéarité de T provient de la linéarité de l'intégrale. Ainsi, T est bien un endomorphisme de E .

Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a $T(f)'(x) = -\int_0^x f(t)dt + (1-x)xf(x) + \int_x^1 (1-t)f(t)dt + x(1-x)f(x)$ donc $T(f)'(x) = -\int_0^x tf(t)dt + \int_x^1 (1-t)f(t)dt$. On constate que $T(f)$ est à nouveau de classe C^1 par le théorème fondamental de l'intégration et que $T(f)''(x) = -xf(x) - (1-x)f(x) = -f(x)$.

Soit $f \in \text{Ker}(T)$, alors $T(f) = 0$ donc $T(f)'' = 0$ ce qui montre que $f = 0$ avec le calcul précédent. Ainsi, $\text{Ker}(T) = \{0\}$ ce qui prouve l'injectivité de T .

b. Soit λ une valeur propre de T , alors il existe une fonction non nulle $f \in E$ telle que $T(f) = \lambda f$ et on sait que $\lambda \neq 0$ car T est injective. Avec le calcul précédent, en dérivant deux fois, on a $T(f)'' = \lambda f'' = -f$. Ainsi, f est solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $(E_\lambda) : y'' + \frac{1}{\lambda}y = 0$.

Distinguons deux cas :

- Si $\lambda > 0$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in [0; 1]$, $f(x) = a \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) + b \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$. Or l'expression de $T(f)$ montre que $T(f)(0) = T(f)(1) = 0$ ce qui impose $a = 0$ et $b \neq 0$ (sinon f serait nulle) et $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \equiv 0 \pmod{\pi}$ donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = \frac{1}{n^2\pi^2}$ et $f(x) = b \sin(nx)$ donc $E_\lambda(T) \subset \text{Vect}(f_n : x \mapsto \sin(nx))$.
- Si $\lambda < 0$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in [0; 1]$, $f(x) = a \cosh\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\right) + b \sinh\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\right)$. Or les conditions $T(f)(0) = T(f)(1) = 0$ imposent $a = 0$ et $b \neq 0$ (sinon f serait nulle) et $\sinh\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\right) = 0$: absurde.

Réciproquement, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda = \frac{1}{n^2\pi^2}$ et $f_n : x \mapsto \sin(n\pi x)$, alors $f_n'' + n^2\pi^2 f_n = 0$ donc $T(f_n)'' = \frac{1}{n^2\pi^2} f_n''$.

On intègre deux fois sur l'intervalle $[0; 1]$ donc $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in [0; 1]$, $T(f_n)(x) = \frac{1}{n^2\pi^2} f_n(x) + \alpha x + \beta$.

Mais en prenant $x = 0$ on a $\beta = 0$ car $T(f_n)(0) = \sin(0) = 0$, et en prenant $x = 1$ on a $\alpha = 0$ car $T(f_n)(1) = \sin(n\pi) = 0$. Ainsi, $T(f_n) = \frac{1}{n^2\pi^2} f_n$ et $\frac{1}{n^2\pi^2}$ est bien une valeur propre de T car $f_n \neq 0$.

Par double inclusion, $\text{Sp}(T) = \left\{ \frac{1}{n^2\pi^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ et $\forall n \geq 1$, $E_{1/n^2\pi^2}(T) = \text{Vect}(f_n)$.

9.8 a. Pour $m \in \mathbb{R}$, on a $\chi_{A_m} = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 1 \\ -1 & X-1 & 1 \\ m-2 & 2-m & X-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 2-X \\ -1 & X-1 & 2(2-X) \\ m-2 & 2-m & X-2 \end{vmatrix}$ après avoir effectué

$C_3 \leftarrow C_3 - C_1 - 2C_2$ et $\chi_{A_m} = (X-2) \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ -1 & X-1 & -2 \\ m-2 & 2-m & 1 \end{vmatrix}$ en factorisant par $X-2$ dans la troisième colonne. On développe et $\chi_{A_m} = (X-2)((X-1)(X-1+4-2m) + (m-2)(X-2)) = (X-2)(X^2 - mX + 1)$.

b. Traitons les deux valeurs $m = 1$ et $m = 2$:

Si $m = 1$, $\chi_{A_1} = (X-2)(X^2 - X + 1) = (X-2)(X+j)(X+j^2)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ mais n'est même pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc A_1 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ mais même pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Si $m = 2$, $\chi_{A_2} = (X-2)(X^2 - 2X + 1) = (X-2)(X-1)^2$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc A_2 est trigonalisable

et $\text{Sp}(A_2) = \{1, 2\}$. Comme $A_2 - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2, $\dim(E_1(A_2)) = 1$ par la formule du rang donc A_2 n'est pas diagonalisable.

c. Le discriminant Δ_m de $X^2 - mX + 1$ vaut $\Delta_m = m^2 - 4$. Si $\Delta_m > 0$, on pose $\alpha_m = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}$ et

$\beta_m = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$ de sorte que $\alpha_m < \beta_m$. Si $\alpha_m = 2$ ou $\beta_m = 2$, on a $(m-4)^2 = m^2 - 4$ en passant

$m-4 = \pm\sqrt{m^2 - 4}$ au carré donc $m^2 - 8m + 16 = m^2 - 4$ soit $m = \frac{5}{2}$. Avec les signes, α_m ne vaut jamais 2

mais $\beta_m = 2$ si et seulement si $m = \frac{5}{2}$. On traite plusieurs cas :

Si $m \in]-2; 2[$, $\Delta_m < 0$ donc χ_{A_m} est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ mais n'est même pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc A_m est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ mais même pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Si $m = 2$, on a déjà en vu en **b.** que A_2 est trigonalisable mais pas diagonalisable.

Si $m = -2$, $\chi_{A_m} = (X-2)(X^2 + 2X + 1) = (X-2)(X+1)^2$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc A_{-2} est

trigonalisable et $\text{Sp}(A_{-2}) = \{-1, 2\}$. Comme $A_{-2} + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 2, $\dim(E_{-1}(A_{-2})) = 1$ par la formule du rang donc A_{-2} n'est pas diagonalisable.

Si $m = 5/2$, $\chi_{A_{5/2}} = (X-2)^2(X-\frac{1}{2})$ donc $\text{Sp}(A_{5/2}) = \{2, 5/2\}$, $\chi_{A_{5/2}}$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc

$A_{5/2}$ est trigonalisable. Comme $A_{5/2} - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est de rang 2, $\dim(E_2(A_{5/2})) = 1$ par la formule du rang donc $A_{5/2}$ n'est pas diagonalisable.

Si $m \notin [-2; 2] \cup \{5/2\}$, $\Delta_m > 0$ donc χ_{A_m} est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et ses racines sont 2, α_m et β_m qui sont distinctes. Ainsi, A_m est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

9.9 a. ($\Rightarrow$) Supposons que F est stable par M . Montrons que $F^\perp$ est stable par M^T . Soit $X \in F^\perp$ et $Y \in F$, alors $(M^T X | Y) = (Y | M^T X) = Y^T M^T X = (MY)^T X = (MY | X) = 0$ car $X \in F^\perp$ et $MY \in F$ car F est stable par M . Ainsi, $F^\perp$ est stable par M^T . On vient de montrer que, pour tout sous-espace F de E et toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a F stable par $M \Rightarrow F^\perp$ stable par M^T .

($\Leftarrow$) On applique ce qui précède à $(F^\perp, M^T)$ et $F^\perp$ stable par $M^T \Rightarrow (F^\perp)^\perp = F$ stable par $(M^T)^T = M$.

Par double implication, F est stable par M si et seulement si $F^\perp$ est stable par M^T .

b. On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X - (1/2) & 0 & -(1/2) \\ 0 & X - 1 & 0 \\ (1/2) & 0 & X - (3/2) \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X - (1/2) & -(1/2) \\ (1/2) & X - (3/2) \end{vmatrix}$ en développant par rapport

à la deuxième colonne. Ainsi, $\chi_A = (X-1) \left[\left(X - \frac{1}{2}\right) \left(X - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4} \right] = (X-1)^3$. Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}^3$:

$\dim(F) = 0$ Alors $F = \{0\}$ est stable par A .

$\dim(F) = 1$ Alors F est une droite et F est stable par A si et seulement si F est engendrée par un vecteur

propre de A . Or, comme $A - I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $E_1(A) = \text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect}(v_1, v_2)$

avec $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (0, 1, 0)$. Ainsi, toutes les droites stables F par A sont les droites $F = \text{Vect}(v)$ avec $v = \alpha v_1 + \beta v_2$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Il y en a une infinité.

$\dim(F) = 2$ Alors $F^\perp$ est une droite et F est stable par A si et seulement si $F^\perp$ est stable par A^T . Or

$A^T - I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $E_1(A^T) = \text{Ker}(A^T - I_3) = \text{Vect}(v_3, v_2)$ avec $v_3 = (1, 0, -1)$.

Ainsi, F est un plan stable par A si et seulement si $F^\perp = \text{Vect}(\alpha v_3 + \beta v_2)$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$,

c'est-à-dire si et seulement si F a pour équation $F : \alpha x + \beta y - \alpha z = 0$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Il y

en a aussi une infinité.

$\dim(F) = 3$ Alors $F = \mathbb{R}^3$ est stable par A .

9.10 a. Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ un polynôme annulateur de A et λ une valeur propre de A , alors il existe un vecteur colonne $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Par une récurrence simple, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$. Ainsi, $P(A)X = \sum_{k=0}^d a_k A^k X = \left(\sum_{k=0}^d a_k \lambda^k \right) X = P(\lambda)X = 0$ car $P(A) = 0$ donc, comme $X \neq 0$, on obtient $P(\lambda) = 0$.

Les valeurs propres de A sont racines de tout polynôme annulateur de A .

b. Comme χ_A est unitaire par construction et scindé sur $\mathbb{C}$ par D'ALEMBERT-GAUSS, si $a_1, \dots, a_r$ sont les valeurs propres distinctes de A , on peut écrire $\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - a_i)^{m_{a_i}(A)}$ d'où $\chi_A(B) = \prod_{i=1}^r (B - a_i I_n)^{m_{a_i}(A)}$. Comme $GL_n(\mathbb{C})$ est un groupe multiplicatif, on a $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, B - a_i I_n \in GL_n(\mathbb{C})$. On peut aussi le justifier par le déterminant (qui est une fonction multiplicative), en écrivant que l'on a $\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \det(\chi_A(B)) \neq 0 \iff \prod_{i=1}^r (\det(B - a_i I_n))^{m_{a_i}(A)} \neq 0 \iff \forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket, \det(B - a_i I_n) \neq 0$.

Or $B - a_i I_n \in GL_n(\mathbb{C})$ car $\det(B - a_i I_n) = (-1)^n \chi_B(a_i) \neq 0$ puisque a_i étant une valeur propre de A , elle ne peut pas être une valeur propre de B car on a supposé $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$. On a donc bien $\chi_A(B)$ inversible.

c. Par hypothèse, $AX = XB$. Alors $A^2 X = A(AX) = A(XB) = (AX)B = XB^2$. Par une récurrence facile, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k X = XB^k$. Si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)X = \sum_{k=0}^d a_k A^k X = \sum_{k=0}^d a_k XB^k = XP(B)$. En prenant $P = \chi_A$, on obtient donc $\chi_A(A)X = X\chi_A(B)$ ce qui donne, avec CAYLEY-HAMILTON, $X\chi_A(B) = 0$. Or on a vu en b. que $\chi_A(B)$ est inversible. Il ne reste donc plus que $X = 0$.

d. On définit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\varphi(X) = AX - XB$. Comme φ est visiblement linéaire et qu'on est en dimension finie, φ est un automorphisme si et seulement si elle est injective. Soit $X \in \text{Ker}(\varphi)$, on a $AX = XB$ et, avec la question précédente, $X = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ ce qui montre que φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Cette bijectivité s'écrit, comme attendu, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists ! X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AX - XB = \varphi(X) = M$.

9.11 a. φ est bien définie car si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite réelle, la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ est aussi une suite réelle. De plus, si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, en notant $w = \varphi(u + \lambda v)$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k + \lambda v_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k + \lambda \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k$ donc $\varphi(u + \lambda v) = \varphi(u) + \lambda \varphi(v)$ ce qui montre la linéarité de φ . Ainsi, φ est un endomorphisme de E .

Injectivité : soit $u \in \text{Ker}(\varphi)$, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = 0$ donc $\sum_{k=1}^n u_k = 0$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k \right) = 0$ et $u = 0$. Comme φ est linéaire et $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$, φ est injective.

Surjectivité : soit $v \in E$. Raisonnons par analyse/synthèse :

- Si $u \in E$ est un antécédent de v par φ , on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, nv_n = \sum_{k=1}^n u_k$. Ainsi, $u_1 = v_1$ et, pour $n \geq 2$, $u_n = \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k \right) = nv_n - (n-1)v_{n-1}$.
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = v_1$ et $\forall n \geq 2, u_n = nv_n - (n-1)v_{n-1}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par télescope, $nv_n - v_1 = \sum_{k=2}^n (kv_k - (k-1)v_{k-1})$ donc $nv_n = \sum_{k=1}^n u_k$ car $u_1 = v_1$ donc $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ et $v = \varphi(u)$.

Toute suite $v \in E$ admet un antécédent $u \in E$ par φ donc l'application φ est surjective.

φ est donc un endomorphisme bijectif de E , donc un automorphisme de E .

b. Analyse : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E$ tels que $\varphi(u) = \lambda u$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ donc

$(n\lambda - 1)u_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k \quad (R_n)$. Traitons deux cas :

- Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\lambda \neq 1$, alors la relation (R_1) donne $(\lambda - 1)u_1 = 0$ donc $u_1 = 0$ car $\lambda - 1 \neq 0$. Si, pour un entier $n \geq 2$, on a établi que $u_1 = \dots = u_{n-1} = 0$, la relation (R_n) montre que $(n\lambda - 1)u_n = 0$ donc que $u_n = 0$ car $n\lambda - 1 \neq 0$. Par principe de récurrence, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0$ donc $u = 0$ et u n'est pas un vecteur propre de φ donc λ n'est pas une valeur propre de φ .

- Si $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda = 1/p$, en résolvant $\varphi(u) = \lambda u$ pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E$, on trouve comme dans le cas précédent que $\forall n \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$, $u_n = 0$ avec les relations $(R_1), \dots, (R_{p-1})$. Puis, avec (R_p) , on n'a aucun renseignement supplémentaire car on a $0 = 0$. Ensuite, pour $n > p$, (R_n) donne $(n-p)u_n = p \sum_{k=p}^{n-1} u_k$.

Par exemple, pour $n = p+1$, $u_{p+1} = pu_p = \binom{p}{p-1}u_p$ puis, pour $n = p+2$, $2u_{p+2} = p(u_p + u_{p+1})$ donc $u_{p+2} = \frac{p(p+1)}{2}u_p = \frac{(p+1)!}{2!(p-1)!}u_p = \binom{p+1}{p-1}u_p$. Si on a $\forall k \in \llbracket p; q \rrbracket$, $u_k = \binom{k-1}{p-1}u_p$ pour un entier $q \geq p$, alors R_{q+1} donne $(q+1-p)u_{q+1} = p \left(\sum_{k=p}^q \binom{k-1}{p-1} \right) u_p = p \binom{q}{p-1} u_p$ (formule des colonnes). Ainsi, $u_{q+1} = \frac{q!p}{(q-p)!p!(q+1-p)}u_p = \frac{q!}{(p-1)!(q+1-p)!}u_p = \binom{q}{p-1}u_p$. Par principe de récurrence, on a $\forall k \geq p$, $u_k = \binom{k-1}{p-1}u_p$. Ainsi, $\lambda = \frac{1}{p}$ est bien valeur propre de φ .

On vient d'établir que $\text{Sp}(\varphi) = \left\{ \frac{1}{p} \mid p \in \mathbb{N}^* \right\}$ et que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $E_{1/p}(\varphi) = \text{Vect}(u^p)$ où $u^p = (u_n^p)_{n \in \mathbb{N}^*} = (0, \dots, 0, 1, p, \frac{p(p+1)}{2}, \dots)$ est définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^p = \binom{n-1}{p-1}$.

9.12 a. Posons $F = \{f_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z} \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$ et vérifions que $E = F$.

($\subseteq$) : soit $f \in E$, alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = f(\text{Re}(z).1 + \text{Im}(z).i) = \text{Re}(z)f(1) + \text{Im}(z)f(i)$ car f est $\mathbb{R}$ -linéaire et que $(\text{Re}(z), \text{Im}(z)) \in \mathbb{R}^2$ et $(1, i) \in \mathbb{C}^2$. Avec les formules d'EULER, $f(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}f(1) + \frac{z-\bar{z}}{2i}f(i) = az + b\bar{z}$ avec $a = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(i)}{2i} \in \mathbb{C}$ et $b = \frac{f(1)}{2} - \frac{f(i)}{2i} \in \mathbb{C}$. Par conséquent, $f = f_{a,b}$ et $E \subset F$.

($\supseteq$) : soit $f \in F$, il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = f_{a,b}(z) = az + b\bar{z}$. Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $f(\lambda z + \mu z') = a(\lambda z + \mu z') + b(\overline{\lambda z + \mu z'}) = \lambda az + \mu az' + \lambda b\bar{z} + \mu b\bar{z}' = \lambda(az + b\bar{z}) + \mu(az' + b\bar{z}') = \lambda f(z) + \mu f(z')$ donc f est $\mathbb{R}$ -linéaire et $f \in E$. Ainsi, $F \subset E$.

Par double inclusion, on a bien établi que $E = F = \{f_{a,b} : z \mapsto az + b\bar{z} \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$.

b. Soit $\mathcal{B} = (1, i)$ la base canonique du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$, comme $f(1) = a + b$ et $f(i) = ai - bi$ donc $f(1) = (\text{Re}(a) + \text{Re}(b)).1 + (\text{Im}(a) + \text{Im}(b)).i$ et $f(i) = (-\text{Im}(a) + \text{Im}(b)).1 + (\text{Re}(a) - \text{Re}(b)).i$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_{a,b}) = \begin{pmatrix} \text{Re}(a) + \text{Re}(b) & -\text{Im}(a) + \text{Im}(b) \\ \text{Im}(a) + \text{Im}(b) & \text{Re}(a) - \text{Re}(b) \end{pmatrix}$ d'où $\text{Tr}(f_{a,b}) = 2\text{Re}(a)$ et $\det(f_{a,b}) = |a|^2 - |b|^2$.

c. D'après la question précédente, $\chi_{f_{a,b}} = X^2 - \text{Tr}(f_{a,b})X + \det(f_{a,b}) = X^2 - 2\text{Re}(a)X + |a|^2 - |b|^2$. Soit Δ le discriminant de $\chi_{f_{a,b}}$, comme $\Delta = 4\text{Re}(a)^2 - 4(|a|^2 - |b|^2) = 4(|b|^2 - \text{Im}(a)^2)$, on traite trois cas :

Si $|b| \geq |\text{Im}(a)|$, $\Delta \geq 0$ donc $\chi_{f_{a,b}}$ admet deux racines simples réelles ce qui prouve que $f_{a,b}$ est diago-

nalisable sur $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Si $|b| < |\operatorname{Im}(a)|$, $\Delta < 0$ donc $\chi_{f_{a,b}}$ admet deux racines simples complexes non réelles (et conjuguées) ce qui prouve que $f_{a,b}$ n'est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel car $\chi_{f_{a,b}}$ n'est même pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Si $|b| = |\operatorname{Im}(a)|$, $\Delta = 0$ et $\chi_{f_{a,b}} = (X - \operatorname{Re}(a))^2$ donc $\operatorname{Sp}(f_{a,b}) = \{\operatorname{Re}(a)\}$. Or, d'après le cours, $f_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si $f_{a,b} - \operatorname{Re}(a)\operatorname{id}_{\mathbb{C}^2} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f_{a,b}) - \operatorname{Re}(a)I_2 = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(b) & -\operatorname{Im}(a) + \operatorname{Im}(b) \\ \operatorname{Im}(a) + \operatorname{Im}(b) & -\operatorname{Re}(b) \end{pmatrix} = 0$. Cette condition impose $\operatorname{Re}(b) = \operatorname{Im}(a) = \operatorname{Im}(b)$, c'est-à-dire $b = 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $f_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si $(|b| \neq |\operatorname{Im}(a)| \text{ ou } (b = 0 \text{ et } a \in \mathbb{R}))$. Dans ce dernier cas, $f_{a,0}$ est l'homothétie de rapport a .

9.13 a. Méthode 1 : soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_N[A]$ est

la matrice A . Par définition, $f(1) = X$, $\forall k \in \llbracket 1; N-1 \rrbracket$, $f(X^k) = \frac{k}{N}X^{k-1} + \frac{N-k}{N}X^{k+1}$ et $f(X^N) = X^{N-1}$.

Pour $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k \in \mathbb{R}_N[X]$, par linéarité de f , on a $f(P) = a_0 f(1) + \left(\sum_{k=0}^N a_k f(X^k) \right) + a_N f(X^N)$ donc

$$f(P) = a_0 X + a_N X^{N-1} + \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left(\frac{k}{N} X^{k-1} + \frac{N-k}{N} X^{k+1} \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N k a_k X^{k-1} + \sum_{k=0}^N a_k X^{k+1} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} k a_k N X^{k+1}$$

ce qui donne $f(P) = \frac{P'}{N} + XP - \frac{X^2 P}{N} = XP + \frac{1-X^2}{N} P'$.

Méthode 2 : $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \frac{2}{N} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se reconnaît aisément, c'est la matrice de l'endomorphisme

$f_1 : P \mapsto \frac{P'}{N}$ de l'espace $E = \mathbb{R}_N[X]$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^N)$ car $\forall k \geq 1$, $f_1(X^k) = \frac{k}{N} X^{k-1}$.

La matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix}$ est obtenue à partir de A_1 en échangeant l'ordre des lignes et

des colonnes. Ceci signifie que $A_2 = PA_1P$ où P est la matrice qui contient des 1 sur la "seconde" diagonale et des 0 partout ailleurs : $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N+1}$ avec $p_{i,j} = 1$ si $i+j = N+2$ et $p_{i,j} = 0$ sinon. Or P est la matrice de l'endomorphisme g de E qui envoie X^k sur X^{N-k} et on constate que l'on a l'expression $g : P \mapsto X^N P \left(\frac{1}{X} \right)$. Ainsi, A_2 est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E de $f_2 = g \circ f_1 \circ g$. Or, pour un

polynôme $P \in E$, il vient $f_1 \circ g(P) = \frac{1}{N} \left(X^N P \left(\frac{1}{X} \right) \right)' = X^{N-1} P \left(\frac{1}{X} \right) - \frac{X^{N-2}}{N} P' \left(\frac{1}{X} \right)$, ce qui donne finalement

$$f_2(P) = g((f_1 \circ g)(P)) = X^N \left(X^{1-N} P(X) - \frac{X^{2-N}}{N} P'(X) \right) = XP(X) - \frac{X^2}{N} P'(X).$$

Au final, comme $A = A_1 + A_2 = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où $f = f_1 + f_2 : P \mapsto XP + \frac{1-X^2}{N} P'$.

b. Cherchons les éléments propres de f .

Analyse : soit un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ et un polynôme $P \in E$ tels que $f(P) = \lambda P$, on a donc $(1 - X^2)P' - N(\lambda - X)P = 0$.

La fonction polynomiale P est donc solution de l'équation différentielle (E) : $(1 - t^2)y' = N(\lambda - t)y$. Or

$\frac{\lambda - t}{1 - t^2} = \frac{\lambda + 1}{2} \cdot \frac{1}{1 + t} + \frac{\lambda - 1}{2} \cdot \frac{1}{1 - t}$. Ainsi les solutions de (E) (sur l'intervalle $] - 1; 1[$ par exemple) sont les

$y : t \mapsto \alpha(1 + t)^{\frac{N(\lambda+1)}{2}}(1 - t)^{\frac{N(1-\lambda)}{2}}$ qui sont des fonctions polynomiales non nulles si $\alpha \neq 0$ et $\frac{N(\lambda+1)}{2} = k$

et $\frac{N(1-\lambda)}{2} = k'$ sont des entiers naturels avec $k + k' = N$. Ainsi, il existe $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$ tel que $\lambda = \frac{2k}{N} - 1$ est

valeur propre de A associé au vecteur propre $P_k = (1 + X)^k(1 - X)^{N-k} \in \mathbb{R}_N[X]$. A est bien diagonalisable.

Synthèse : pour tout $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$, posons $\lambda_k = \frac{2k}{N} - 1$ et $P_k = (1 + X)^k(1 - X)^{N-k} \in \mathbb{R}_N[X]$, les calculs précédents montrent que $f(P_k) = \lambda_k P_k$ avec $P_k \neq 0$ donc λ_k est une valeur propre de f .

Conclusion : A est diagonalisable car $A \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ admet $N + 1$ valeurs propres distinctes, on peut même affirmer que tous les sous-espaces propres $E_{\lambda_k}(A)$ sont des droites et $E_{\lambda_k}(f) = \text{Vect}(P_k)$.

De plus, comme A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, on a $\text{Tr}(A) = \sum_{k=0}^N \lambda_k$ donc

$\text{Tr}(A) = \sum_{k=0}^N \left(\frac{2k}{N} - 1 \right) = \frac{2}{N} \times \frac{N(N+1)}{2} - (N+1) = 0$ (ce qu'on savait déjà car il n'y a que des 0 sur la

diagonale de A) et $\det(A) = \prod_{k=0}^N \left(\frac{2k}{N} - 1 \right)$ donc $\det(A) = 0$ si $N = 2p$ est pair car $\lambda_p = \frac{2p}{2p} - 1 = 0$ et

$\det(A) = \prod_{k=0}^N \left(\frac{2k}{2p+1} - 1 \right) = \prod_{k=0}^N \frac{2k - 2p - 1}{2p+1} = (-1)^{p+1} \prod_{i=0}^p \frac{2i+1}{2p+1} = \frac{(2p+1)!}{2^p(2p+1)^{p+1}p!}$ (calcul classique en

faisant intervenir les termes pairs manquants) si $N = 2p + 1$ est impair.

9.14 a. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M , il existe donc $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$. Par une récurrence simple, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k X = \lambda^k X$ donc $(M^3 - 4M)X = M^3 X - 4MX = \lambda^3 X - 4\lambda X = (\lambda^3 - 4\lambda)X = 0$ alors que $X \neq 0$ donc $P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda = 0$ et λ est une racine de P .

b. Comme $P = X(X^2 - 4) = X(X - 2)(X + 2)$, on a donc $\text{Sp}(M) \subset \{-2, 0, 2\}$ d'après la question précédente.

Comme P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et que P est annulateur de M , la matrice M est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Elle est donc semblable à une matrice D contenant dans sa diagonale les valeurs propres de

M . Mais $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(D) = 0$ donc la multiplicité de 2 est égale à celle de -2 . Il y a donc trois cas :

- Les valeurs propres de M sont $0, 0, 0, 0$ donc $D = 0$ et $M = 0$.
- Les valeurs propres de M sont $0, 0, 2, -2$ donc il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(0, 0, 2, -2)$.
- Les valeurs propres de M sont $2, 2, -2, -2$ donc il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(2, 2, -2, -2)$ (et M est alors inversible).

Réciproquement, les matrices évoquées ci-dessus vérifiant bien $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ avec $M^3 - 4M = 0$ et $\text{Tr}(M) = 0$.

9.15 a. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A , il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$. Une récurrence simple montre que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$. Ainsi, $(A^3 - A^2 + A - I_n)X = 0X = 0 = A^3 X - A^2 X + AX + X$ donc $(\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1)X = 0$ et, comme $X \neq 0$, on a $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = P(\lambda) = 0$ et λ est bien une racine de P .

b. Comme $P = X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X^2+1) = (X-1)(X+i)(X-i)$, la question précédente montre que $\text{Sp}(A) \subset \{1, i, -i\}$. Comme P est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et que P est annulateur de A , la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on sait qu'alors $\det(A) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \lambda^{m_\lambda(A)}$. Posons $a = m_1(A)$, $b = m_i(A)$ et $c = m_{-i}(A)$. Comme $-i$ est le conjugué de i et que A est une matrice réelle, on sait d'après le cours que $b = c$. On a donc $\det(A) = 1^a i^b (-i)^c = 1$ car $i(-i) = 1$.

De même, comme A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\text{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda(A) \lambda = a \times 1 + b \times (i) + b \times (-i)$ car $b = c$ donc $\text{Tr}(A) = a \in \mathbb{N}$.

9.16 a. Comme $XI_3 - A$ est triangulaire inférieure, on a $\chi_A = \det(XI_3 - A) = (X-1)(X-4)(X-9)$ donc $\text{Sp}(A) = \{1, 4, 9\}$ car les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique.

Comme χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, on sait qu'alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que ses

sous-espaces propres sont des droites. Or $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ et on constate que $E_1(A) = \text{Vect}(v_1)$ avec

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De même $A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ et on a clairement $E_4(A) = \text{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Enfin, $A - 9I_3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ et on voit que $E_9(A) = \text{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $A = PDP^{-1}$ avec

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(1, 4, 9) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

b. Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = A$, alors $MA = M^3 = AM$ donc, comme A et M commutent, on sait d'après le cours que les sous-espaces propres de A sont stables par M . Ainsi, comme $v_1 \in E_1(A)$, on a $Mv_1 \in E_1(A) = \text{Vect}(v_1)$ donc il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que $Mv_1 = \lambda_1 v_1$ ce qui fait de v_1 un vecteur propre de M aussi. De même, v_2 et v_3 sont aussi des vecteurs propres de M associés respectivement aux valeurs propres

λ_2 et λ_3 . Ainsi, on a $M = PD'P^{-1}$ avec $D' = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ donc M est diagonalisable.

c. Analyse : si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $M^2 = A$, on a vu à la question précédente que $P^{-1}MP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ donc $P^{-1}M^2P = \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2) = P^{-1}AP = D = \text{diag}(1, 4, 9)$ d'après b. donc $\lambda_1^2 = 1$, $\lambda_2^2 = 4$ et $\lambda_3^2 = 9$ en identifiant. Ainsi, $M = P \text{diag}(\pm 1, \pm 2, \pm 3)P^{-1}$.

Synthèse : si $M = P \text{diag}(\pm 1, \pm 2, \pm 3)P^{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a clairement $M^2 = P \text{diag}(1, 4, 9)P^{-1} = PDP^{-1} = A$. Comme $\varphi : M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que les 8 matrices $\text{diag}(\pm 1, \pm 2, \pm 3)$ sont distinctes, il existe exactement 8 matrices M qui vérifient $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ et ce sont les

matrices $P \text{diag}(\pm 1, \pm 2, \pm 3)P^{-1}$. On peut les expliciter avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mais est-ce bien nécessaire ?

9.17 a. Déjà f est bien un endomorphisme de E car on sait d'après le cours qu'une application linéaire de E dans

E est entièrement caractérisée par les images par f des vecteurs d'une base de E , ici la base $\mathcal{B}$.

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ un vecteur de E et $\lambda \in \mathbb{K}$. On cherche les éléments propres de f avec la suite d'équivalences

$f(x) = \lambda x \iff \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \lambda \sum_{i=1}^n x_i e_i \iff \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) + su = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i) e_i$ en posant $s = \sum_{i=1}^n x_i$ ce qui s'écrit aussi $f(x) = \lambda x \iff (\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i + s = \lambda x_i)$ en identifiant les coordonnées sur la base $\mathcal{B}$. Deux cas :

- Si $\lambda = 1$, on a donc $f(x) = x \iff \sum_{i=1}^n x_i = 0$ donc, en posant $H = \left\{ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$ qui est

un hyperplan de E car $\varphi : \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$ est une forme linéaire non nulle sur E (car $f(u) = n \neq 0$)

et que $H = \text{Ker}(\varphi)$, on a $E_1(f) = H$ donc 1 est valeur propre de f car $n \geq 2$ donc $\dim(H) = n - 1 \geq 1$.

- Si $\lambda \neq 1$, on a donc $f(x) = \lambda x \iff (\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i = \frac{s}{\lambda - 1}) \iff x = \frac{s}{\lambda - 1} u$. Les seuls autres vecteurs propres de f , à part les vecteurs non nuls de H vus ci-dessus, sont donc des vecteurs de la forme αu avec $\alpha \neq 0$. Or $f(u) = \sum_{i=1}^n f(e_i) = \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) + nu = (n+1)u$ donc il n'y a qu'une autre valeur propre à part 1 et c'est $n+1$ avec $E_{n+1}(f) = \text{Vect}(u)$ d'après ce qui précède.

b. Comme $\dim(E_1(f)) + \dim(E_{n+1}(f)) = n = \dim(E)$ et que $E_1(f)$ et $E_{n+1}(f)$ sont en somme directe, on $E = E_1(f) \oplus E_{n+1}(f)$ donc f est diagonalisable avec $\text{Sp}(f) = \{1, n+1\}$ et $\chi_f = (X-1)^{n-1}(X-n-1)$.

Comme χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$, on sait d'après le cours que $\det(f) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda^{m_\lambda(f)} = n+1$ et qu'on a aussi

$$\text{Tr}(f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} m_\lambda(f) \lambda = (n-1) \times 1 + 1 \times (n+1) = 2n.$$