

DEVOIR 10 : RÉDUCTION

PSI 1 2025-2026

mardi 18 novembre 2025

QCM

- 1** Éléments propres d'un endomorphisme : soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ avec $\lambda \neq \mu$ et $x_\lambda \in E_\lambda(u)$ et $x_\mu \in E_\mu(u)$
- 1.1** (x_λ, x_μ) est une famille libre **1.3** $x_\lambda + x_\mu$ est un vecteur propre de $u \implies x_\lambda = 0_E$ ou $x_\mu = 0_E$
- 1.2** $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont en somme directe **1.4** $x_\lambda + x_\mu$ est un vecteur propre de $u \iff x_\lambda = 0_E$ ou $x_\mu = 0_E$
- 2** Éléments propres d'un endomorphisme : soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $u \circ v = v \circ u$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$
- 2.1** $E_\lambda(u)$ est stable par v **2.3** $\lambda \in \text{Sp}(u) \iff \lambda^2 \in \text{Sp}(u^2)$
- 2.2** $E_\lambda(u)$ est stable par u **2.4** $\lambda \in \text{Sp}(u) \implies \lambda^2 \in \text{Sp}(u^2)$
- 3** Polynôme caractéristique : soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- 3.1** $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$ **3.3** $u \in \text{GL}(E) \iff \chi_u(0) \neq 0$
- 3.2** $\lambda \in \text{Sp}(u) \iff \chi_u(\lambda) = 0$ **3.4** $\text{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda m_\lambda(u)$
- 4** Polynôme caractéristique : soit $n \geq 2$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$
- 4.1** A et B semblables $\iff \chi_A = \chi_B$ **4.3** A et B équivalentes $\implies \chi_A = \chi_B$
- 4.2** A et B semblables $\implies \chi_A = \chi_B$ **4.4** $\det(A) = \chi_A(0)$

Énoncé Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u et $m_\lambda(u)$ son ordre de multiplicité algébrique. Donner deux inégalités concernant $\dim(E_\lambda(u))$.

Preuve Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et u un endomorphisme de E . Soit un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, donner une condition suffisante sur λ pour que $E_\lambda(u) \subset \text{Im}(u)$. Montrer cette inclusion dans ce cas.

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit l'endomorphisme $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $u(M) = AM$.

a. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$.

On définit la matrice M dont toutes les colonnes valent la colonne X . Calculer $u(M)$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $M \neq 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $u(M) = \lambda M$.

Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et C_j la j -ième colonne de la matrice M . Que vaut AC_j ?

c. Conclure concernant $\text{Sp}(u)$ et $\text{Sp}(A)$.

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Calculer $\chi_A(X)$. En déduire $\text{Sp}(A)$.

b. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ composée de vecteurs propres de A .

DEVOIR 10	NOM :	PRÉNOM :
-----------	-------	----------

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

i · j	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1		X	X		
2	X	X		X	
3		X	X		
4		X			

1.1 Faux : on peut avoir $x_\lambda = 0_E$ ou $x_\mu = 0_E$ **1.2** Vrai : du cours, et ceci même si λ ou μ est nul car alors $E_\lambda(u) = \{0_E\}$ ou $E_\mu(u) = \{0_E\}$ **1.3** Vrai : si $x_\lambda \neq 0_E$ et $x_\mu \neq 0_E$, alors (x_λ, x_μ) est libre donc si $x_\lambda + x_\mu$ est un vecteur propre, $u(x_\lambda + x_\mu) = \alpha(x_\lambda + x_\mu) = \lambda x_\lambda + \mu x_\mu$ donc $(\alpha - \lambda)x_\lambda + (\alpha - \mu)x_\mu = 0_E$ donc $\lambda = \mu = \alpha$ est impossible **1.4** Faux : si on a $x_\lambda = x_\mu = 0_E$, 0_E n'est pas un vecteur propre.

2.1 Vrai : cours **2.2** Vrai : car u commute avec u **2.3** Faux : $(-1)^2 = 1$ est valeur propre de id_E^2 mais -1 n'est pas valeur propre de id_E **2.4** Vrai : si $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0_E$, alors $u^2(x) = u(u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x) = \lambda^2 x$.

3.1 Faux : si u est la rotation d'angle $\pi/2$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ par exemple **3.2** Vrai : cours **3.3** Vrai : $\chi_u(0) = \det(-u) = (-1)^n \det(u)$ **3.4** Faux : il manque les valeurs propres complexes de la matrice de u .

4.1 Faux : $A = I_n$ et $B = I_n + E_{n,1}$ vérifient $\chi_A = \chi_B = (X-1)^n$ **4.2** Vrai : cours **4.3** Faux : I_n et $2I_n$ sont équivalentes car $2I_n = (2I_n)I_n(I_n)^{-1}$ et $\chi_A = (X-1)^n \neq (X-2)^n = \chi_B$ **4.4** Faux : $\det(A) = (-1)^n \chi_A(0)$.

Énoncé Soit E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, si λ est valeur propre de u , on a $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda(u)$.

Preuve Il suffit que $\lambda \neq 0$ pour qu'on ait $E_\lambda(u) \subset \text{Im}(u)$. En effet, soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $x \in E_\lambda(u)$, par définition on a $u(x) = \lambda x$ donc $x = \frac{u(x)}{\lambda} = u\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \text{Im}(u)$. Ainsi, on a bien $E_\lambda(u) \subset \text{Im}(u)$ si $\lambda \neq 0$.

Exercice 1 a. Avec ces notations, $u(M) = AM = A(X X \cdots X) = (AX AX \cdots AX) = (\lambda X \lambda X \cdots \lambda X) = \lambda M$.

Comme $M \neq 0$ car $X \neq 0$, on en déduit que λ est une valeur propre de u si $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

b. Avec ces notations, en identifiant les colonnes j des matrices $u(M)$ et λM , on trouve $AC_j = \lambda C_j$. Comme il existe $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $C_j \neq 0$ car $M \neq 0$, on en déduit que λ est une valeur propre de A si $\lambda \in \text{Sp}(u)$.

c. Par double inclusion, on a établi $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(u)$.

Exercice 2 a. $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1 \\ -1 & X & 0 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ X & 0 \end{vmatrix} + X \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^3 - X^2 - 2X$ en développant

selon L_3 . Les racines de $\chi_A = X(X+1)(X-2)$ étant les valeurs propres de A , $\text{Sp}(A) = \{0, 2, -1\}$.

b. Les trois valeurs propres sont distinctes donc les trois sous-espaces propres sont des droites. Comme ils sont en somme directe, A est diagonalisable. On résout les systèmes $AX = 0$, $AX = 2X$ et $AX = -X$ pour trouver trois vecteurs propres associés à 0 , 2 , -1 , resp. $V_1 = (0 \ 1 \ -1)^T$, $V_2 = (2 \ 1 \ 1)^T$ et $V_3 = (-1 \ 1 \ 1)^T$. La famille (V_1, V_2, V_3) est libre (3 valeurs propres distinctes) donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.