

DEVOIR 09 : PROBABILITÉS

PSI 1 2025-2026

mercredi 12 novembre 2025

QCM

- 1 Tribu et probabilité : soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, I un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements, A et B deux évènements tels que $B \neq \bar{A}$

1.1 $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ est possible

1.3 $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \iff B \subset A$

1.2 $\bigcap_{i \in I} A_i$ est un évènement (il est dans $\mathcal{A}$)

1.4 $(A \subset B \text{ et } \mathbb{P}(A) = 1) \implies \mathbb{P}(B) = 1$

- 2 Continuité et sous-additivité : soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements quelconques

2.1 $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$

2.3 $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\bar{A}_n)$

2.2 $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$

2.4 $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$

- 3 Conditionnement : soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A, B, C trois évènements tels que $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$ et un système complet d'évènements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$

3.1 $\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_B(A_n) \mathbb{P}(A_n)$

3.3 $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}_B(A) \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$

3.2 $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}_A(B) \mathbb{P}_{A \cap B}(C)$

3.4 $\mathbb{P}_A(B) = 0 \iff A \cap B = \emptyset$

- 4 Conditionnement : soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A, B deux évènements tels que $\mathbb{P}(A) = 1$ et un système complet d'évènements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On pose $B_0 = \bar{B}$ et, pour $n \geq 1$, $B_n = B \cap A_n$

4.1 $\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_n}(B) \mathbb{P}(A_n)$

4.3 $((A_n \cap B))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un SQCE

4.2 $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un SCE

4.4 $((A_n \cap A))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un SQCE

Définition Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω , donner les deux axiomes d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Preuve Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathcal{A}$.

Montrer que si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B le sont aussi.

Exercice 1 On a dans une urne 16 boules numérotées de 1 à 16. On tire successivement 3 boules sans remise dans cette urne. Les tirages sont indépendants et équiprobables.

- Quelle est la probabilité de A = "le produit des numéros des boules est pair".
- Quelle est la probabilité de B = "la somme des numéros des boules est égale à 10".
- Quelle est la probabilité de C = "les trois boules tirées ont pour numéro un nombre premier"

Exercice 2 On considère une pièce équilibrée (une chance sur deux de faire pile - ou face). On effectue un nombre indéfini de lancers de cette pièce. On note l'évènement F_n = "au n -ième lancer on tombe sur face" pour tout entier $n \geq 1$. On note l'évènement S_n = "on tombe sur face la première fois au n -ième lancer et les n suivants sont aussi des faces". On note l'évènement $S = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$.

- Montrer que l'évènement F = "on tombe sur face au moins une fois" est presque sûr. On pourra utiliser l'évènement D_n = "les n premiers lancers sont des pile".
- Calculer $\mathbb{P}(S)$. Indication : calculer la probabilité d'un évènement S_n .

DEVOIR 09	NOM :	PRÉNOM :
-----------	-------	----------

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

i · j	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Définition

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1	X			X	
2	X		X		
3		X	X		
4	X	X		X	

1.1 Vrai : on doit avoir $\bar{A} \in \mathcal{A}$ puisque $A \in \mathcal{A}$ **1.2** Faux : ça ne marche que si la famille d'indices est dénombrable **1.3** Faux : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus B)$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \iff A \setminus B$ est négligeable **1.4** Vrai : $1 = \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1$ donc $\mathbb{P}(B) = 1$.

2.1 Vrai : continuité décroissante **2.2** Faux : $A_1 = \Omega$ et $\forall n \geq 1, A_n = \emptyset$ par exemple **2.3** Vrai : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \bar{A}_n\right)$ et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \bar{A}_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\bar{A}_n)$ par sous-additivité **2.4** Faux : la σ -additivité est vraie s'ils sont incompatibles deux à deux.

3.1 Faux : les probabilités totales c'est $\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B|A_n) \mathbb{P}(A_n)$ **3.2** Vrai : probabilités composées

3.3 Vrai : formule de BAYES **3.4** Faux : $A \cap B$ est juste négligeable.

4.1 Vrai : formule des probabilités totales **4.2** Vrai : $\Omega = \bar{B} \sqcup B$ et, par distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$, $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (B \cap A_n)$ **4.3** Faux : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (A_n \cap B) = B$ non presque sûr en général **4.4**

Vrai : les $A_n \cap A$ sont incompatibles deux à deux et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (A_n \cap A) = A$ est presque sûr par hypothèse.

Définition Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble Ω , une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0; 1]$ telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (l'évènement certain a une probabilité maximale de 1).
- $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ suite d'évènements 2 à 2 incompatibles, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (σ -additivité).

Preuve On a $B = (A \cap B) \sqcup (\bar{A} \cap B)$ (réunion disjointe) donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$. Mais par hypothèse d'indépendance des évènements A et B , on a aussi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$ ce qui donne le calcul suivant, $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A)) \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\bar{A}) \mathbb{P}(B)$. Ainsi, $\bar{A}$ et B sont donc indépendants.

Exercice 1 Ω est l'ensemble des 3-arrangements de $\llbracket 1; 16 \rrbracket$, $\text{card}(\Omega) = 16 \times 15 \times 14$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ est uniforme. On aurait aussi pu prendre les 3-parties de $\llbracket 1; 16 \rrbracket$ six fois moins nombreuses.

a. $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$. Il y a 8 numéros impairs donc $\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{A_8^3}{A_{16}^3} = \frac{8.7.6}{16.15.14} = \frac{1}{10}$. Ainsi $\mathbb{P}(A) = \frac{9}{10}$.

b. $10 = 7+2+1 = 6+3+1 = 5+4+1 = 5+3+2$. Avec les ordres des boules : $\mathbb{P}(B) = \frac{24}{A_{16}^3} = \frac{24}{16.15.14} = \frac{1}{140}$.

c. Il y a 6 nombres premiers entre 1 et 16 donc $\mathbb{P}(C) = \frac{A_6^3}{A_{16}^3} = \frac{6.5.4}{16.15.14} = \frac{1}{28}$.

Exercice 2 a. Notons $D_n =$ "que des piles dans les n premiers lancers". Alors $\bar{F} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n$ et cette suite

$(D_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Or $D_n = \bar{F}_1 \cap \dots \cap \bar{F}_n$ donc $\mathbb{P}(D_n) = \frac{1}{2^n}$ par indépendance mutuelle. Par continuité décroissante, on obtient $\mathbb{P}(\bar{F}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(D_n) = 0$ donc $\mathbb{P}(F) = 1$.

b. Comme les évènements S_n sont deux à deux incompatibles, par σ -additivité, $\mathbb{P}(S) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n)$. Mais $S_n = \bar{F}_1 \cap \dots \cap \bar{F}_{n-1} \cap F_n \cap \dots \cap F_{2n}$ donc $\mathbb{P}(S_n) = \frac{1}{2^{2n}}$ par indépendance mutuelle (succession PP...PFF...F : $n-1$ piles et $n+1$ faces). Ainsi, $\mathbb{P}(S) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - (1/4)} = \frac{1}{3}$.