

PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 09

PSI 1 2025-2026

du lundi 24/11 au vendredi 28/11

1 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice : voir programme précédent

2 Polynôme caractéristique :

- définition du polynôme caractéristique ($\chi_u = \det(\text{Xid}_E - u)$) d'une matrice ou d'un endomorphisme ;
- expression développée de $\chi_u = X^n - \text{Tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$;
- les valeurs propres d'un endomorphisme u sont exactement les racines de χ_u ;
- multiplicité algébrique (ordre de multiplicité de la racine dans χ_u) d'une valeur propre ;
- si χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ relation entre $\dim(E)$, $\text{Tr}(u)$, $\det(u)$ et les valeurs propres ;
- polynôme caractéristique de matrices semblables ou de la transposée d'une matrice ;
- si F stable par u alors χ_{u_F} divise χ_u ;
- multiplicité géométrique (dimension du sous-espace propre associé) d'une valeur propre ;
- la multiplicité géométrique est inférieure à la multiplicité algébrique (et ≥ 1) pour une valeur propre ;
- application du polynôme caractéristique pour calculer le déterminant des matrices ;
- théorème de CAYLEY-HAMILTON (preuve non exigible) ;

3 Diagonalisation en dimension finie :

- définition d'un endomorphisme diagonalisable, propriétés équivalentes ;
- projecteurs (spectraux) associés à la décomposition de l'espace avec les sous-espaces propres ;
- équivalence entre u diagonalisable et χ_u scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et $\forall \lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda(u)$;
- cas particulier pratique où il y a $\dim(E)$ racines distinctes de χ_u ;
- matrices A diagonalisables et relations avec un endomorphisme de matrice A ;
- polynômes en u et relations avec les valeurs propres de u ; racines des polynômes annulateurs ;
- u diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur simplement scindé de u ;
- si u diagonalisable, caractérisation de son polynôme minimal (hors programme) ;
- si F stable par u et u diagonalisable alors u_F l'est aussi ;
- trigonalisation : définition et caractérisation par χ_u scindé ;

4 Codiagonalisation (hors programme mais bon...) :

- si u diagonalisable, $v \circ u = u \circ v \iff \forall \lambda \in \text{Sp}(u)$, $E_\lambda(u)$ stable par v ;
- si u et v diagonalisables et commutent, ils codiagonalisent ;

QUESTIONS DE COURS :

- 1 définir la diagonalisabilité d'un endomorphisme (déf. 5.6)
- 2 énoncer le résultat sur le polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit (rem. 5.9)
- 3 énoncer le théorème sur $\text{Tr}(u)$ et $\det(u)$ en fonction des valeurs propres si χ_u est scindé (th. 5.13)
- 4 énoncer les inégalités concernant les différents ordre de multiplicité d'une valeur propre (th. 5.14)
- 5 énoncer quelques propriétés équivalentes au fait que u est diagonalisable (th. 5.17)
- 6 énoncer la CNS de diagonalisabilité de u par les ordres de multiplicité (th. 5.19)
- 7 énoncer la CNS de trigonalisabilité d'un endomorphisme (th. 5.26)
- 8 prouver que λ est valeur propre de u si et seulement si $\chi_u(\lambda) = 0$ (th. 5.8)
- 9 prouver que si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$ (prop. 5.10)
- 10 prouver que si u diagonalisable et F stable par u , alors u_F est diagonalisable (prop. 5.24)

Prévision pour la prochaine semaine : révision sur la réduction et début des suites et séries de fonctions