

TD 10 : RÉDUCTION

PSI 1 2025-2026

vendredi 21 novembre 2025

10.1 a. Non, il suffit de prendre u la rotation de $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui est sans vecteur propre.

En effet, la matrice de u dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\chi_A = X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle donc il n'existe pas de valeur propre réelle ce qui équivaut d'après le cours à l'absence de droite stable par u .

b. On considère trois cas :

- Soit il existe deux valeurs propres distinctes α, β réelles de u , alors si $x \neq 0_E$ vérifie $u(x) = \alpha x$ et $y \neq 0_E$ vérifie $u(y) = \beta y$, le plan $P = \text{Vect}(x, y)$ (x et y sont non colinéaires car vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes) est clairement stable par u car $u(\lambda x + \mu y) = \lambda \alpha x + \mu \beta y \in P$.
- Soit il existe un polynôme $Q = X^2 + aX + b$ de degré 2 irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ ($a^2 - 4b < 0$) tel que $Q(u) \notin GL(E)$. On prend alors $x \neq 0_E$ tel que $Q(u)(x) = 0_E$; il en existe car $\text{Ker}(Q(u)) \neq \{0_E\}$. Posons $P = \text{Vect}(x, u(x))$. Alors $u(x)$ n'est pas colinéaire à x ! En effet, si on avait $u(x) = \lambda x$, λ serait racine de P car on aurait $u^2(x) + au(x) + bx = (\lambda^2 + a\lambda + b)x = 0_E$: exclu. Ainsi P est bien un plan et il est stable par u car $u(u(x)) = u^2(x) = -au(x) - bx \in P$.
- Soit on n'est dans aucun des deux premiers cas, alors en décomposant le polynôme caractéristique $\chi_u = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k} \times \prod_{k=1}^s (X^2 + a_k X + b_k)^{n_k}$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, on a $\prod_{k=1}^r (u - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k} \circ \prod_{k=1}^s (u^2 + a_k u + b_k \text{id}_E)^{n_k} = 0$ par CAYLEY-HAMILTON mais tous les $u^2 + a_k u + b_k \text{id}_E$ sont inversibles par négation du second cas donc $\prod_{k=1}^r (u - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k} = 0$ et comme on ne peut pas avoir deux valeurs propres distinctes car on n'est pas dans le premier cas, on a forcément un seul des $u - \lambda_k \text{id}_E$ qui est non inversible par négation du premier cas donc, par exemple, $(u - \lambda_1 \text{id}_E)^{m_1} = 0$. En posant $v = u - \lambda_1 \text{id}_E$, on a $v^{m_1} = 0$ donc v est nilpotent. En notant m l'indice de nilpotence de v , on a $v^{m-1} \neq 0$ et $v^m = 0$. On traite à nouveau deux cas :
 - Si $m = 1$, alors $u = \alpha \text{id}_E$ et tous les plans de E sont stables par u .
 - Si $m \geq 2$, soit un vecteur x tel que $v^{m-1}(x) \neq 0_E$, alors il est classique de montrer que la famille $(x, v(x), \dots, v^{m-1}(x))$ est libre. Le plan $P = \text{Vect}(v^{m-1}(x), v^{m-2}(x))$ est stable par u car on a $u(v^{m-1}(x)) = v(v^{m-1}(x)) + \alpha v^{m-1}(x) = \alpha v^{m-1}(x)$ et $u(v^{m-2}(x)) = v^{m-1}(x) + \alpha v^{m-2}(x)$.

En conclusion, , si $n \geq 2$, il existe toujours un plan stable par u .

10.2 Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique ! On va donc faire une disjonction des cas selon le type de χ_A . Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice A .

Cas 1 : Si $\chi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distincts deux à deux, χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable et semblable à $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ car $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.

Cas 2 : Si $\chi_A = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)$ avec λ_1, λ_2 distincts, alors on sait que A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_{\lambda_1}(A)) = 2$. Il y a donc à nouveau deux cas.

Cas 2.1 : Si $\dim(E_{\lambda_1}(A)) = 2$, la matrice A est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

car A est diagonalisable et $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ avec λ_1 valeur propre double et λ_2 valeur propre simple.

Cas 2.2 : Si $\dim(E_{\lambda_1}(A)) = 1$, il existe $v_1 \neq 0_E$ dans $E_{\lambda_1}(u)$ et $v_3 \neq 0_E$ dans $E_{\lambda_2}(u)$; il nous manque un vecteur. Comme $(u - \lambda_1 \text{id}_E)^2(u - \lambda_2 \text{id}_E) = 0$, on a $\text{Im}(u - \lambda_2 \text{id}_E) \subset \text{Ker}((u - \lambda_1 \text{id}_E)^2)$ or, d'après la formule du rang, $\text{rang}(u - \lambda_2 \text{id}_E) = 2$ car λ_2 est une valeur propre simple de u donc $\text{Ker}((u - \lambda_1 \text{id}_E)^2)$ est un plan (ça ne peut pas être l'espace en entier car on aurait alors $(u - \lambda_1 \text{id}_E)^2 = 0$ et λ_2 ne serait pas valeur propre de u). Soit donc un vecteur w_2 tel que $w_2 \in \text{Ker}((u - \lambda_1 \text{id}_E)^2) \setminus \text{Ker}(u - \lambda_1 \text{id}_E)$. Comme $w_2 \in \text{Ker}((u - \lambda_1 \text{id}_E)^2)$, on a $u(w_2) - w_2 \in \text{Ker}(u - \lambda_1 \text{id}_E)$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ (car $w_2 \notin E_{\lambda_1}(u)$) tel que $u(w_2) = w_2 + \alpha v_1$. En posant $v_2 = \frac{w_2}{\alpha}$, on a $u(v_2) = v_2 + v_1$. Comme (v_1, v_2) est une base de $\text{Ker}((u - \lambda_1 \text{id}_E)^2)$ et que $v_3 \notin \text{Ker}((u - \lambda_1 \text{id}_E)^2)$ car $(u - \lambda_1 \text{id}_E)^2(v_3) = (\lambda_2 - \lambda_1)^2 v_3 \neq 0_E$, la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Cas 3 : Si $\chi_A = (X - \lambda_1)^3$, posons $v = u - \lambda_1 \text{id}_E$, alors, par CAYLEY-HAMILTON, v est nilpotent d'indice inférieur ou égal à 3 (normal car on est en dimension 3). Il y a à nouveau quelques cas.

Cas 3.1 : Si $v^2 \neq 0$, classiquement il existe une base $\mathcal{B} = (v^2(x), v(x), x)$ (en prenant x tel que $v^2(x) \neq 0$).

Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc la matrice de $u = v + \lambda_1 \text{id}_E$ dans $\mathcal{B}$ vaut $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

Cas 3.2 : Si $v^2 = 0$ et $v \neq 0$, $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(v)$ donc $\text{rang}(v) = 1$. Soit (x_2) une base de $\text{Im}(v)$, complétée en une base (x_1, x_2) de $\text{Ker}(v)$; $\exists x_3 \in E, x_2 = v(x_3) \neq 0_E$ donc $x_3 \notin \text{Vect}(x_1, x_2)$, ainsi $\mathcal{B} = (x_1, x_2, x_3)$

est une base de E . $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

Cas 3.3 : Si $v = 0$ alors $u = \lambda_1 \text{id}_E$ et la matrice de u dans toute base est $\lambda_1 I_3$.

Toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ sont donc semblables à une et à une seule des matrices triangulaires supérieures (on savait déjà que toute matrice complexe est trigonalisable) suivantes :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ distincts deux à deux ; } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \text{ distincts ; } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

avec λ_1, λ_2 distincts ; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 \in \mathbb{C}$.

10.3 a. On trouve par un simple calcul (développement par rapport à une rangée ou formule de SARRUS) que $\chi_A = X^3 - X - 1$. Comme $\chi'_A(x) = 3x^2 - 1$ s'annule en $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, la fonction polynomiale χ_A est croissante sur $]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ et $[\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty[$ et décroissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}]$. Comme $\chi_A(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 < 0$, χ_A ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $[\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty[$ et plus précisément en $\alpha \in]1; 2[$ car $\chi_A(1) = -1 < 0$ et $\chi_A(2) = 5 > 0$. Comme $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, χ_A admet deux autres racines complexes conjuguées notées β et $\bar{\beta}$ telles que $\alpha\beta\bar{\beta} = \alpha|\beta|^2 = 1$ (relation coefficients/racines) donc $|\beta| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < 1$. Ainsi $\lambda = \alpha$.

b. Comme A est une matrice à coefficients entiers, ses puissances le sont aussi (récurrence simple) donc $\text{Tr}(A^n) \in \mathbb{N}$ et $u_n = 0$ pour $n \geq 1$. Ainsi la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

Comme A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, les deux matrices A et $D = \text{diag}(\lambda, \beta, \bar{\beta})$ sont semblables d'où l'existence de $P \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Ensuite, classiquement, par récurrence, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$. Comme $D^n = \text{diag}(\alpha^n, \beta^n, \bar{\beta}^n)$, on obtient par similitude $\text{Tr}(A^n) = \lambda^n + \beta^n + \bar{\beta}^n$. Ainsi $v_n = \sin(2\pi(\text{Tr}(A^n) - \beta^n - \bar{\beta}^n)) = -\sin(2\pi(\beta^n + \bar{\beta}^n))$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\beta^n + \bar{\beta}^n) = 0$ donc $v_n \underset{+\infty}{\sim} -2\pi(\beta^n + \bar{\beta}^n) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $|\beta| < 1$ donc $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN.

10.4 a. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, par définition, on a $P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix}$. Dans ce déterminant, on effectue

l'opération de GAUSS (transvection qui ne modifie pas le déterminant) $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 + \cdots + \lambda^{n-1} L_n$ pour

$$\text{avoir } P(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k \\ -1 & \lambda & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \left(\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k \right) \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ en}$$

développant selon la première ligne. Ainsi, $P(\lambda) = (-1)^{n+1} \left(\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k \right) (-1)^{n-1} = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$. Ainsi,

comme ceci est vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ (A est la matrice compagnon de P).

b. Comme le polynôme P est scindé sur $\mathbb{C}$ car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, la matrice C est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc il existe une matrice inversible $U \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ telles que } C = U T U^{-1}. \text{ Par conséquent, on a classiquement } C^k = U T^k U^{-1} \text{ et,}$$

comme C^k et T^k sont semblables, les polynômes caractéristiques de ces deux matrices sont égaux. Or, comme

$$T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}, \text{ il est clair que } \chi_{T^k} = P_k = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^k). \text{ De plus, par stabilité de } \mathbb{Z} \text{ par somme}$$

et produit et par définition du produit matriciel, on montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, C^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Ainsi, comme le déterminant ne fait lui aussi intervenir que des sommes et des produits, il est clair que $\chi_{C^k} \in \mathbb{Z}[X]$. Enfin, on a bien montré que $P_k \in \mathbb{Z}[X]$ (il est à coefficients entiers relatifs).

10.5 a. Si $\deg(P) = 1$, $P = a(X - \lambda)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et on a $P(A) = 0$ si on pose la matrice $A = \lambda I_n$. Dans ce cas, on a existence mais aussi unicité de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$ car $a(A - \lambda I_n) = 0$ si et seulement si $A = \lambda I_n$ puisque $a \neq 0$.

Si $\deg(P) = 2$, $P = a(X^2 + bX + c)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $\Delta = b^2 - 4c$. Traitons trois cas :

$\Delta > 0$, $P = a(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On peut prendre $A = \lambda_1 I_n$ ou $A = \lambda_2 I_n$ car, pour ces matrices, on a bien $P(A) = a(A - \lambda_1 I_n)(A - \lambda_2 I_n) = 0$.

$\Delta = 0$, $P = a(X - \lambda)^2$ avec $\lambda = -\frac{b}{2} \in \mathbb{R}$ et $A = \lambda I_n$ convient encore.

$\Delta < 0$, $P = a(X - re^{i\theta})(X - re^{-i\theta}) = a(X^2 - 2r \cos(\theta)X + r^2)$ avec $r > 0$ et $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ (les deux racines de P sont complexes non réelles conjuguées). On se souvient que la matrice de rotation R_θ de $SO_2(\mathbb{R})$ a pour polynôme caractéristique $\chi_{R_\theta} = X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1$. On prend, pour $p = 1$ et $n = 2$, la matrice $A_2 = rR_\theta = r \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et on calcule facilement $\chi_{A_2} = X^2 - 2r \cos(\theta)X + r^2$ donc, avec CAYLEY-HAMILTON, on a $A_2^2 - 2r \cos(\theta)A_2 + r^2 I_2 = 0$ donc $P(A_2) = 0$. Il suffit alors de prendre A diagonale par blocs (p blocs) en posant $A = \text{diag}(A_2, \dots, A_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a $P(A) = \text{diag}(P(A_2), \dots, P(A_2)) = 0$.

Si $\deg(P) \geq 3$, traitons à nouveau deux cas :

- si P admet au moins une racine réelle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$ et $P(\lambda I_n) = P(\lambda)I_n = 0$ donc la matrice $A = \lambda I_n$ convient et vérifie $P(A) = 0$.
- si P n'admet pas de racine réelle, on sait d'après D'ALEMBERT-GAUSS que P s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles de degré 2, il existe donc une décomposition $P = (X^2 + bX + c)Q$ avec $\Delta = b^2 - 4c < 0$. D'après le cas ci-dessus, il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + bA + cI_n = 0$ donc $P(A) = (A^2 + bA + cI_n)Q(A) = 0$ et A convient.

Dans tous les cas, si n est pair, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.

b. Si $\deg(P) = 1$, $P = a(X - \lambda)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et on a $P(A) = 0$ si on pose la matrice $A = \lambda I_n$.

Si $\deg(P) = 2$, $P = a(X^2 + bX + c)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $\Delta = b^2 - 4c$. Traitons trois cas :

$\Delta \geq 0$, P admet une racine réelle λ (elle peut être double) et, si $A = \lambda I_n$, on a encore $P(A) = 0$.

$\Delta < 0$, $P = a(X - re^{i\theta})(X - re^{-i\theta}) = a(X^2 - 2r \cos(\theta)X + r^2)$ avec $r > 0$ et $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Comme P n'a pas de racine réelle, il n'y a pas, en identifiant les matrices 1×1 aux scalaires, de matrice $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$. Supposons, pour n impair quelconque, qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$, alors $A^2 - 2r \cos(\theta)A + r^2 I_2 = 0$ donc $(A - r \cos(\theta)I_n)^2 + r^2 \sin^2(\theta)I_n = 0$ car on

a $X^2 - 2r \cos(\theta)X + r^2 = (X - r \cos(\theta))^2 + r^2 \sin^2(\theta)$. Par conséquent, en passant au déterminant, $\det(A - r \cos(\theta)I_n)^2 = \det((A - r \cos(\theta)I_n)^2) = \det(-r^2 \sin^2(\theta)I_n) = -(r^{2n} \sin^{2n}(\theta)) < 0$. Comme $\det(A - r \cos(\theta)I_n)^2 \geq 0$, ceci fournit une contradiction et il n'existe aucune matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.

Si $\deg(P) \geq 3$, traitons à nouveau deux cas :

- si P admet au moins une racine réelle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$ et $P(\lambda I_n) = P(\lambda)I_n = 0$ donc la matrice $A = \lambda I_n$ convient et vérifie $P(A) = 0$.
- si P n'admet pas de racine réelle, si on suppose qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$, d'après le cours, les valeurs propres de A sont incluses dans les racines de P , ce qui justifie que A n'a pas de valeur propre réelle. Or le polynôme χ_A est de degré n impair donc, comme il est unitaire, on a $\lim_{t \rightarrow -\infty} \chi_A(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \chi_A(t) = +\infty$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque χ_A est continue, il existe une racine réelle de χ_A , qui est donc une valeur propre de A , c'est absurde.

On en déduit que, si n est impair et si $P \in \mathbb{R}[X]$, on a deux cas :

- si P admet une racine réelle, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.
- si P n'admet pas de racine réelle, il n'existe aucune matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$.

10.6 a. $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & -3 \\ -2 & X-1 & 3 \\ 2 & -1 & X-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & -1 & -3 \\ -2 & X-1 & 3 \\ 0 & X-2 & X-2 \end{vmatrix}$ après avoir effectué $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$. On factorise par

$X-2$ dans la troisième ligne ce qui donne $\chi_A = (X-2) \begin{vmatrix} X & -1 & -3 \\ -2 & X-1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} X & 2 & -3 \\ -2 & X-4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ après $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$. On développe par rapport à la troisième ligne et on a $\chi_A = (X-2)(X(X-4)+4) = (X-2)^3$. Ainsi, comme les valeurs propres de A sont les racines de χ_A , il vient $\text{Sp}(A) = \{2\}$.

b. A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_2(A)) = 3$, ce qui équivaut à $A = 2I_3$, ce n'est visiblement pas le cas. Ainsi, A n'est pas diagonalisable.

c. $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est visiblement de rang 1 donc, avec la formule du rang, $\dim(E_2(A)) = 2$.

Un simple coup d'œil à $A - 2I_3$ nous permet d'écrire $E_2(A) = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (1, 2, 0)$ et $v = (0, 3, -1)$. Le théorème de la base incomplète montre l'existence de $w \in \mathbb{R}^3$ tel que (u, v, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$. Bien sûr 100% des vecteurs w conviennent mais si on prend par exemple $w = (1, 0, 0)$, la matrice de la famille

$\mathcal{B} = (u, v, w)$ dans la base canonique vaut $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\det(P) = 2 \neq 0$ donc P est inversible ce qui

prouve que $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ alors que u et v sont des vecteurs propres de A .

d. Puisque χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, la matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'après le cours. Comme la première colonne de A vaut $Aw = (0, 2, -2) = 2v - 2u + 2w$, et comme $Au = 2u$ et $Av = 2v$ par construction, par la formule de changement de base, on a $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ car, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à A , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T = P^{-1}AP$.

10.7 a. $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 1 \\ 0 & X-1 & -3 \\ -1 & 1 & X-4 \end{vmatrix} = X((X-1)(X-4)+3) - (3-(X-1)) = X^3 - 5X^2 + 7X - 4 + X$ donc

$\chi_A = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ en développant par rapport à la première ligne. 1 est une racine évidente de χ_A donc $\chi_A = (X-1)(X^2 - 4X + 4) = (X-1)(X-2)^2$. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, A est déjà trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'après le cours, A est diagonalisable $\iff \dim(E_2(A)) = 2 \iff (X-1)(X-2)$ annule A .

• $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car 2 est valeur propre de A et clairement pas de rang 1

(les deux premières colonnes ne sont pas proportionnelles) donc $A - 2I_3$ de rang 2 donc, par la formule du rang, $E_2(A) = \text{Ker}(A - 2I_3)$ est de dimension 1 donc A n'est pas diagonalisable.

• On aurait aussi pu, comme $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, calculer $(A - I_3)(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$

avec la même conclusion : A n'est pas diagonalisable.

b. Dans la matrice $A - 2I_3$, en notant C_1, C_2, C_3 ses colonnes, on a $C_1 + 3C_2 + C_3 = 0$ donc, comme on sait déjà que $E_2(A)$ est une droite, on a $E_2(A) = \text{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = (1, 3, 1)$.

c. La matrice $A - I_3$ est de rang 2 donc $\dim(E_1(A)) = 3 - 2 = 1$ par la formule du rang ; on le savait déjà étant donné que 1 est racine simple de χ_A . Comme la somme des deux premières colonnes de $A - I_3$ est nulle, on a $E_1(A) = \text{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1, 1, 0)$.

Si on veut effectivement trigonaliser la matrice A , on cherche un vecteur v_3 tel que $Av_3 = 2v_3 + v_2$, ce qui revient à résoudre le système $(A - 2I_3)X = V_2$ ou $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = V_2$ et on trouve sans peine parmi l'infinité de solutions, par exemple $v_3 = (-1, 0, 1)$. Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, comme $\det(P) = 1 \neq 0$, P est inversible donc $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$. Par formule de changement de base, $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Analyse : soit F un plan de $\mathbb{R}^3$ stable par A . En notant u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A , on peut induire u dans F et on note u_F l'endomorphisme induit. On sait que χ_{u_F} divise χ_u . Ainsi, on n'a que deux possibilités, $\chi_{u_F} = (X-1)(X-2)$ ou $\chi_{u_F} = (X-2)^2$.

• Si $\chi_{u_F} = (X-1)(X-2)$, comme χ_{u_F} est scindé à racines simples, u_F est diagonalisable donc $F = E_1(u_F) \oplus E_2(u_F)$. Or $E_1(u_F) \subset E_1(u)$ et $E_2(u_F) \subset E_2(u)$ donc, par inclusion et égalité des dimensions, $E_1(u_F) = E_1(u) = \text{Vect}(v_1)$ et $E_2(u_F) = E_2(u) = \text{Vect}(v_2)$ donc $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

• Si $\chi_{u_F} = (X-2)^2$, par CAYLEY-HAMILTON, $(u_F - 2\text{id}_F)^2 = 0$ donc $F = \text{Ker}((u_F - 2\text{id}_F)^2)$. Or $\text{Ker}((u_F - 2\text{id}_F)^2) \subset \text{Ker}((u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2)$ et $(A - 2I_3)^2 = P(T - 2I_3)^2P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ est de rang

1 (ou directement $(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$) donc, par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}((A - 2I_3)^2)) = 2$.

Par inclusion et égalité des dimensions, $F = \text{Ker}((u_F - 2\text{id}_F)^2) = \text{Ker}((u - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})^2) = \text{Vect}(v_2, v_3)$.

Synthèse : comme on a montré que $u(v_1) = v_1$, $u(v_2) = 2v_2$ et $u(v_3) = 2v_3 + v_2$, les plans $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_2, v_3)$ sont stables par u .

Il existe donc exactement deux plans stables par A , ce sont $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_2, v_3)$.

10.8 a. Si A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$ par définition. Soit

λ une valeur propre de A , alors il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$. On a donc $PBP^{-1}X = \lambda X$ donc $BY = \lambda Y$ en posant $Y = P^{-1}X$. Comme $X \neq 0$ et P inversible, $Y \neq 0$ donc λ est une valeur propre de B . On vient de montrer que $\text{Sp}(A) \subset \text{Sp}(B)$. Par symétrie, $\text{Sp}(B) \subset \text{Sp}(A)$ et, par double inclusion, $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$.

b. Supposons que M admette une valeur propre λ non nulle. D'après la question **a.**, λ est une valeur propre de $2M$, ce qui fait que $\frac{\lambda}{2}$ est une valeur propre de M . Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $\frac{\lambda}{2^n}$ est une valeur propre de M . Cela ferait une infinité de valeurs propres de M , ce qui est absurde car les valeurs propres de M sont les racines de χ_M , et il y en a au maximum n .

On vient de montrer que M ne peut avoir que 0 comme valeur propre. Comme M admet au moins une valeur propre avec le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, on a $\text{Sp}(M) = \{0\}$. Toujours d'après ce théorème, on a donc $\chi_M = (X - 0)^n$ car χ_M est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, unitaire et de degré n . D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, il vient $M^n = 0$ donc M est nilpotente.

c. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2} \neq 0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de sorte que $2M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $M^2 = 0$ donc M est nilpotente et non nulle. Si on prend $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a P inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et on vérifie facilement que $2M = P^{-1}MP$ donc que M et $2M$ sont semblables.

d. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ nilpotente telle que $\text{rang}(M) = 1$.

Méthode 1 : comme la matrice M est de rang 1, il existe une matrice colonne $C \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et une matrice ligne $L \neq 0 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ telles que $M = CL$. Ainsi, $M^2 = C(LC)L = (LC)(CL) = LCM$. Or $LC = \text{Tr}(LC) = \text{Tr}(CL) = \text{Tr}(M)$ de sorte que $M^2 = \text{Tr}(M)M$. Mais si λ est une valeur propre de M , il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$ et $M^3X = \lambda^3X = 0$ donc $\lambda^3 = 0$ et $\lambda = 0$. Ainsi, $\text{Sp}(M) = \{0\}$ donc, comme M est trigonalisable donc semblable à une matrice triangulaire avec des 0 sur la diagonale, on a $\text{Tr}(M) = 0$ donc $M^2 = 0$. Ainsi, comme $M \times M = 0$, on a $\text{Im}(M) \subset \text{Ker}(M)$.

Méthode 2 : soit $X_2 \neq 0$ un vecteur de $\text{Im}(M)$ de sorte que $\text{Im}(M) = \text{Vect}(X_2)$ car $\text{Im}(M)$ est une droite. Comme $\text{Im}(M)$ est stable par M , il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $MX_2 = \alpha X_2$. Mais comme M est nilpotente, 0 est à nouveau la seule valeur propre de M donc $\alpha = 0$ car $X_2 \neq 0$. Ainsi, $X_2 \in \text{Ker}(M)$ donc $\text{Im}(M) \subset \text{Ker}(M)$. Dans les deux cas, on a prouvé que $\text{Im}(M) \subset \text{Ker}(M)$. Si (X_2) est une base de $\text{Im}(M)$, par le théorème de la base incomplète, il existe $X_1 \in \mathbb{C}^3$ tel que (X_1, X_2) est une base de $\text{Ker}(M)$ car $\text{Ker}(M)$ est un plan d'après la formule du rang. Soit $X_3 \in \mathbb{C}^3$ un antécédent de $X_2 \in \text{Im}(M)$ par M de sorte que $MX_3 = X_2$. La famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est de cardinal $3 = \dim(\mathbb{C}^3)$ et elle est libre car (X_1, X_2) est elle-même libre et que

$X_3 \notin \text{Vect}(X_1, X_2) = \text{Ker}(M)$ puisque $X_2 \neq 0$. Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{C}^3$ et, en notant m l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à M , on a $E_{2,3} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(m)$ par construction. Comme $E_{2,3}$ et M représente le même endomorphisme dans deux bases différentes, M est semblable à $E_{2,3}$.

Comme M et $2M$ sont nilpotentes et de même rang 1, ce qui précède montre que M et $2M$ sont semblables à $E_{2,3}$. Comme la relation de similitude est une relation d'équivalence, M est semblable à $2M$.

e. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice n , alors $M^{n-1} \neq 0$ et $M^n = 0$. Il existe donc $X \neq 0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $M^{n-1}X \neq 0$. Si $(X, MX, \dots, M^{n-1}X)$ était liée, il existerait une famille $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$ telle que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k M^k X = 0$. On pourrait définir l'entier $i = \text{Min}(\{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\}) \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ de sorte que l'on aurait $\sum_{k=i}^{n-1} \lambda_k M^k X = 0$. On multiplierait (1) par M^{n-1-i} à gauche pour avoir $\sum_{k=i}^{n-1} \lambda_k M^{n-1-i+k} X = 0$ et il ne resterait que $\lambda_i M^{n-1} X = 0$ car $M^n = 0$. Or ceci est impossible car $\lambda_i \neq 0$ et $M^{n-1}X \neq 0$ par hypothèse. On a montré par l'absurde que $\mathcal{B} = (X, MX, \dots, M^{n-1}X)$ est libre donc c'est une base de $\mathbb{C}^n$ car son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{C}^n$. En notant m l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M , on a $M = PJP^{-1}$ avec P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et $J = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(m) = (\delta_{i,j+1})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice avec des 0 partout sauf sur la sous-diagonale où il y a des 1. Comme $2M$ est aussi nilpotente d'indice n , ce qui précède montre que $2M$ est aussi semblable à J donc, par transitivité et symétrie de la relation binaire de similitude, M et $2M$ sont semblables.

10.9 a. $P(2) = 2^5 - 4 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 = 32 - 64 + 16 + 32 - 16 = 0$ et, comme $P' = 5X^4 - 16X^3 + 6X^2 + 16X - 8$, on a aussi $P'(2) = 5 \cdot 2^4 - 16 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 - 8 = 80 - 128 + 24 + 32 - 8 = 0$. Ainsi, 2 est racine au moins double de P et 0 est clairement racine de P ce qui montre que $P = X(X-2)^2Q$ avec $\deg(Q) = 2$ d'où $Q = aX^2 + bX + c$. En identifiant le terme en X^5 , on a $a = 1$, celui en X donne $c = -2$ et celui en X^2 permet d'avoir $b = 0$. Par conséquent, $P = X(X-2)^2(X^2-2) = X(X-2)^2(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$.

b. Analyse : si $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P(M) = 0$ et $\text{Tr}(M) = 0$, comme P est annulateur de M , on sait d'après le cours que $\text{Sp}(M) \subset \{0, 2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. Puisque $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{R}$, χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le cours, $\text{Tr}(M) = m_0(M) \cdot 0 + m_2(M) \cdot 2 + m_{\sqrt{2}}(M) \cdot \sqrt{2} + m_{-\sqrt{2}}(M) \cdot (-\sqrt{2}) = 2a + (b-c)\sqrt{2}$ en notant $a = m_2(M) \in \mathbb{N}$, $b = m_{\sqrt{2}}(M) \in \mathbb{N}$ et $c = m_{-\sqrt{2}}(M) \in \mathbb{N}$. Comme $\text{Tr}(M) = 0$, on a $2a + (b-c)\sqrt{2} = 0$. Si on avait $a \neq 0$, on aurait $\sqrt{2} = \frac{c-b}{a} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car on sait que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Ainsi, $a = 0$ donc $\text{Tr}(M) = (b-c)\sqrt{2}$ et $b = c$. Comme $m_2(M) = 0$, 2 n'est pas valeur propre de M donc $M - 2I_n$ est inversible et la relation $M(M^2 - 2I_n)(M - 2I_n)^2 = 0$ se résume à $M(M^2 - 2I_n) = 0$ en multipliant par $(M - 2I_n)^{-2}$ (tout commute). Le polynôme $R = X(X^2 - 2) = X^3 - 2X = X(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ est scindé à racines simples et annulateur de M qui est donc une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme

$m_0(M) + m_{\sqrt{2}}(M) + m_{-\sqrt{2}}(M) = n$, on a $m_0(M) = n - 2b$ et, en notant $D = \begin{pmatrix} 0_{n-2b} & 0_{n-2b,b} & 0_{n-2b,b} \\ 0_{b,n-2b} & \sqrt{2}I_b & 0_b \\ 0_{b,n-2b} & 0_b & -\sqrt{2}I_b \end{pmatrix}$

(par blocs), il existe une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$ (P est la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de M (dans le bon ordre)).

Synthèse : si $n \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}$ tel que $2b \leq n$ et $M = P \begin{pmatrix} 0_{n-2b} & 0_{n-2b,b} & 0_{n-2b,b} \\ 0_{b,n-2b} & \sqrt{2}I_b & 0_b \\ 0_{b,n-2b} & 0_b & -\sqrt{2}I_b \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$,

on a $M^3 = P \begin{pmatrix} 0_{n-2b} & 0_{n-2b,b} & 0_{n-2b,b} \\ 0_{b,n-2b} & \sqrt{2}I_b & 0_b \\ 0_{b,n-2b} & 0_b & -\sqrt{2}I_b \end{pmatrix}^3 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0_{n-2b} & 0_{n-2b,b} & 0_{n-2b,b} \\ 0_{b,n-2b} & 2\sqrt{2}I_b & 0_b \\ 0_{b,n-2b} & 0_b & -2\sqrt{2}I_b \end{pmatrix} P^{-1} = 2M$ donc

$R(M) = 0$ d'où $P(M) = (M - 2I_n)^2 R(M) = 0$ et $\text{Tr}(M) = (\sqrt{2} - \sqrt{2})b = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P(M) = 0$ et $\text{Tr}(M) = 0$ sont donc toutes les matrices de la forme précédente, ça en fait beaucoup !

10.10 a. La construction par blocs montre qu'on multiplie par 2 la taille de la matrice à chaque étape, et comme la taille vaut 1 quand n vaut 0, par une récurrence simple, la taille de A_n vaut 2^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b. La matrice $A_0 = (1)$ est de rang 1, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible donc de rang 2. Pour tout $n \geq 1$, si on effectue l'opération de GAUSS $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ (par blocs) pour le calcul du déterminant de A_{n+1} , on a $\det(A_{n+1}) = \begin{vmatrix} A_n & 0 \\ A_n & -A_n \end{vmatrix}$ donc $\det(A_{n+1}) = \det(A_n) \det(-A_n) = (-1)^{2^n} \det(A_n)^2 = \det(A_n)^2$. Par récurrence, on a donc $\det(A_0) = 1$, $\det(A_1) = -1$ et $\forall n \geq 2$, $\det(A_n) = 1 \neq 0$ donc A_n est inversible ce qui montre que son rang vaut 2^n .

c. Par une récurrence simple, on établit que toutes les matrices A_n sont réelles et symétriques donc, par le théorème spectral, A_n est diagonalisable. $\text{Sp}(A_0) = \{1\}$ et, comme $\chi_{A_1} = X^2 - X - 1$, $\text{Sp}(A_1) = \{\alpha, \beta\}$ avec

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or) et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ qui vérifient $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha\beta = -1$ (relations coefficients/racines).

Après calculs, on trouve $\chi_{A_2} = X^4 - X^3 - 4X^2 - X + 1 = (X+1)^2 \left(X - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \left(X - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ donc

$\text{Sp}(A_2) = \{-1, \alpha^2, \beta^2\}$. Comme $\alpha\beta = -1$, on a donc $\text{Sp}(A_2) = \{\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2\}$. La récurrence arrive :

Initialisation : on vient de voir que $\text{Sp}(A^n) = \{\alpha^i \beta^j \mid i+j=n\}$ pour $n=0, 1, 2$.

Hérédité : soit $n \geq 2$ tel que $\text{Sp}(A^n) = \{\alpha^i \beta^j \mid i+j=n\}$.

(C) Soit λ une valeur propre de A_{n+1} . On sait que $\lambda \neq 0$ d'après **b.** car A_n inversible. Il existe un vecteur colonne $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ non nul (écrit pas blocs $2^n + 2^n$) tel que $A_{n+1}V = \lambda V$, ce qui équivaut à $A_n X + A_n Y = \lambda X$ (1) et $A_n X = \lambda Y$ (2). En reportant (2) multiplié à gauche par A_n dans (1) multiplié par λ , on obtient $\lambda A_n X + A_n^2 X - \lambda^2 X = 0 = \left(A_n - \frac{\lambda}{\alpha} I_{2^n}\right) \left(A_n - \frac{\lambda}{\beta} I_{2^n}\right) X$ (car $\alpha\beta = -1$ et $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{-1} = -1$). Si on avait $X = 0$, on aurait aussi $Y = 0$ d'après (1) car $\lambda \neq 0$ et on aurait alors $V = 0$: NON ! Ainsi, $X \neq 0$ donc $\left(A_n - \frac{\lambda}{\alpha} I_{2^n}\right) \left(A_n - \frac{\lambda}{\beta} I_{2^n}\right)$ n'est pas inversible ce qui prouve que $A_n - \frac{\lambda}{\alpha} I_{2^n} \notin \text{GL}_{2^n}(\mathbb{R})$ ou $A_n - \frac{\lambda}{\beta} I_{2^n} \notin \text{GL}_{2^n}(\mathbb{R})$ (car $\text{GL}_{2^n}(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif). Par hypothèse de récurrence, on a donc $\frac{\lambda}{\alpha} \in \text{Sp}(A_n) = \{\alpha^i \beta^j \mid i+j=n\}$ ou $\frac{\lambda}{\beta} \in \text{Sp}(A_n) = \{\alpha^i \beta^j \mid i+j=n\}$. Dans les deux cas, que $\lambda = \alpha^{i+1} \beta^j$ ou $\lambda = \alpha^i \beta^{j+1}$ avec $i+j=n$, on a $(i+1)+j = n+1$ ou $i+(j+1) = n+1$ et on a bien $\lambda \in \{\alpha^{i'} \beta^{j'} \mid i'+j' = n+1\}$.

(D) Réciproquement, soit $\lambda \in \{\alpha^{i'} \beta^{j'} \mid i'+j' = n+1\}$. Considérons deux cas :

- Si $i' = 0, j' = n+1$ et $\lambda = \beta^{n+1}$. Comme $\beta^n \in \text{Sp}(A_n)$ par hypothèse de récurrence, soit un vecteur propre $X \in E_{\beta^n}(A_n)$ (donc $X \neq 0$), en posant $V = \begin{pmatrix} X \\ \frac{A_n X}{\beta^{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ \frac{X}{\beta} \end{pmatrix} \neq 0$, alors $A_{n+1}V = \begin{pmatrix} A_n X + \frac{A_n X}{\beta} \\ A_n X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\beta^n + \beta^{n-1})X \\ \beta^n X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^{n+1}X \\ \beta^n X \end{pmatrix} = \beta^{n+1}V$ car $\beta^2 = \beta + 1$ donc $\lambda = \beta^{n+1} \in \text{Sp}(A_{n+1})$ car V est un vecteur non nul tel que $A_{n+1}V = \lambda V$.
- Si $i' \in [1; n+1]$, on a $\lambda = \alpha^{i'} \beta^{j'}$. Comme $\alpha^{i'-1} \beta^{j'} \in \text{Sp}(A_n)$ par hypothèse de récurrence, soit un vecteur propre $X \in E_{\alpha^{i'-1} \beta^{j'}}(A_n)$ (donc $X \neq 0$), en posant $V = \begin{pmatrix} X \\ \frac{A_n X}{\alpha^{i'} \beta^{j'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ \frac{X}{\alpha} \end{pmatrix} \neq 0$, alors $A_{n+1}V = \begin{pmatrix} A_n X + \frac{A_n X}{\alpha} \\ A_n X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha^{i'-1} \beta^{j'} + \alpha^{i'-2} \beta^{j'})X \\ \alpha^{i'-1} \beta^{j'} X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{i'} \beta^{j'} X \\ \alpha^{i'-1} \beta^{j'} X \end{pmatrix} = \alpha^{i'} \beta^{j'} V$ car $\alpha^2 = \alpha + 1$ donc $\lambda = \alpha^{i'} \beta^{j'} \in \text{Sp}(A_{n+1})$ car V est un vecteur non nul tel que $A_{n+1}V = \lambda V$.

Dans les deux cas, $\lambda \in \text{Sp}(A_{n+1})$ et, par double inclusion, on a bien $\text{Sp}(A_{n+1}) = \{\alpha^{i'} \beta^{j'} \mid i'+j' = n+1\}$. Par principe de récurrence, on a établi que $\forall n \in \mathbb{N}, \text{Sp}(A_n) = \{\alpha^i \beta^j \mid i+j=n\}$.

10.11 a. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0$. Soit $\lambda \in \text{Sp}(M)$, il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = \lambda X$. On montre par une récurrence simple que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k X = \lambda^k X$. Pour $k = p$, on a donc $M^p X = 0 = \lambda^p X$ donc $\lambda^p = 0$ car $X \neq 0$ d'où $\lambda = 0$. Ainsi, la seule valeur propre de M est 0 et, comme χ_M est scindé dans $\mathbb{C}$ par le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, on a $\chi_M = X^n$.

Seul nous intéresse le fait que χ_M soit scindé dans $\mathbb{C}$, ce qui montre d'après le cours que M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure avec des 0 (seule valeur propre) sur la diagonale telles que $M = PTP^{-1}$. Alors $\det(I_n + M) = \det(I_n + PTP^{-1}) = \det(P(I_n + T)P^{-1}) = \det(I_n + T)$ car $I_n + T$ et $P(I_n + T)P^{-1}$ sont semblables. Comme $I_n + T$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, on a $\det(I_n + T) = 1 = \det(I_n + M)$.

On pouvait aussi dire que $-M$ est aussi nilpotente donc $\chi_{-M} = X^n$ et $\det(I_n + M) = \chi_{-M}(1) = 1^n = 1$.

b. Si U est inversible, on a $U + V = U(I_n + U^{-1}V)$ donc, par multiplicativité du déterminant, on obtient $\det(U + V) = \det(U)\det(I_n + U^{-1}V) = \det(U)\det(I_n + M)$ en posant $M = U^{-1}V$. Comme $UV = VU$, on a aussi $U^{-1}V = VU^{-1}$ en multipliant par U^{-1} à gauche et à droite donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = U^{-k}V^k$ par récurrence simple et, comme V est nilpotente, M est aussi nilpotente car $V^n = M^n = 0$ par le théorème de CAYLEY-HAMILTON puisque $\chi_V = \chi_M = X^n$. D'après a., $\det(I_n + M) = 1$ donc $\det(U + V) = \det(U)$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(U, V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que $UV = VU$ et V nilpotente. Traitons trois cas :

- Si U inversible : dans ce cas, d'après b., $\det(U + V) = \det(U)$.
- Si $U = 0$: dans ce cas, $\det(U + V) = \det(V) = 0 = \det(U)$ car V est nilpotente donc non inversible.
- Si U n'est pas inversible et $U \neq 0$: on a $\det(U) = 0$. Comme U et V commutent par hypothèse, $\text{Ker}(U)$ est stable par V . Proposons deux approches :
 - Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\text{Ker}(U)$, $\text{Ker}(U) \neq \{0\}$ car U n'est pas inversible, $\dim(\text{Ker}(U)) = p \geq 1$. On complète $\mathcal{B}_1$ en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ et, si on note u et v les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associés à U et V , $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & E \end{pmatrix}$ car $\text{Ker}(U)$ est stable par v . $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $(B, E) \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C})$ avec $p \geq 1$ et $n - p = \text{rang}(U) \geq 1$. Comme v est nilpotent, C et E sont nilpotentes car $V^n = 0 = \begin{pmatrix} C^n & * \\ 0 & E^n \end{pmatrix}$ implique $C^n = 0$ et $E^n = 0$. Ainsi, $\det(C) = 0$ et, comme $u + v = \begin{pmatrix} C & A + D \\ 0 & B + E \end{pmatrix}$, $\det(u + v) = \det(C)\det(B + E) = 0 = \det(u)$.
 - Comme v est nilpotent, $w = v_{\text{Ker}(u)}$ (l'endomorphisme induit par v dans $\text{Ker}(u)$) est aussi nilpotent donc non inversible et il existe un vecteur $x \in \text{Ker}(u)$ tel que $w(x) = v(x) = 0$. Ainsi, $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$ donc $(u + v)(x) = 0$ et, comme $x \neq 0$, $u + v$ n'est pas inversible donc $\det(u + v) = \det(U + V) = 0 = \det(U) + \det(V)$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $(U, V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ vérifie $UV = VU$ et V nilpotente, alors $\det(U + V) = \det(U)$.

10.12 a. Soit u un endomorphisme sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

CNS 1 : u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$, annulateur de u et scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

CNS 2 : u est diagonalisable si et seulement s'il existe χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et si pour toute valeur propre λ de u , la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(u)$ vaut l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme χ_u .

b. Dans la calcul de $\chi_A = \begin{vmatrix} X+2 & -4 & -1 \\ 1 & X-3 & -1 \\ 3 & -3 & X-2 \end{vmatrix}$, on effectue l'opération de GAUSS $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ pour avoir $\chi_A = \begin{vmatrix} X+1 & -X-1 & 0 \\ 1 & X-3 & -1 \\ 3 & -3 & X-2 \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & X-3 & -1 \\ 3 & -3 & X-2 \end{vmatrix}$ par linéarité du déterminant par rapport à la première ligne. Ensuite, avec $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ et en développant par rapport à la première colonne, $\chi_A = (X+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 3 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X+1) \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X+1)(X-2)^2$. Ainsi, $\text{Sp}(A) = \{-1, 2\}$.

-1 est valeur propre simple de A donc $E_{-1}(A)$ est une droite. Comme $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est clairement de rang 2 car ses deux dernières sont non colinéaires et ses deux premières forment une famille liée, par la formule du rang, $\dim(E_2(A)) = 3 - 2 = 1 \neq 2$ alors que 2 est la multiplicité algébrique de 2 en tant que valeur propre de A : ceci montre que A n'est pas diagonalisable.

c. La valeur de $A - 2I_3$ montre que $E_2(A) = \text{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = (1, 1, 0)$. Comme $A + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, on voit que $E_{-1}(A) = \text{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1, 0, 1)$ car la somme de la première et de la troisième colonne de $A + I_3$ est nulle. On cherche un vecteur v_3 tel que $Av_3 = 2v_3 + v_2$ (par exemple), c'est-à-dire $(A - 2I_3)v_3 = v_2$. Or il est clair que le vecteur e_3 est un antécédent de v_2 par A (la troisième colonne de $A - 2I_3$ vaut v_2). On choisit donc $v_3 = e_3 = (0, 0, 1)$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$. Comme $\det(P) = 1 \neq 0$, la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et, par construction, $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (réduction de JORDAN).

10.13 a. Si U et V sont semblables, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $U = QVQ^{-1}$. On montre par une récurrence

simple que $\forall k \in \mathbb{N}$, $U^k = QV^kQ^{-1}$ donc, pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(U) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k U^k$

donc $P(U) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k QV^kQ^{-1} = Q\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k V^k\right)Q^{-1} = QP(V)Q^{-1}$ donc $P(U)$ et $P(V)$ sont aussi semblables.

b. On a $M^1 = M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et on calcule $M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2A^2 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$. On conjecture et on démontre par une récurrence facile que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$.

c. Alors, pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, $P(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k M^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k & \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k A^k \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k \end{pmatrix}$

qui s'écrit plus simplement $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.

d. Si M est diagonalisable, il existe d'après le cours un polynôme scindé à racines simples P tel que $P(M) = 0$ donc $P(A) = 0$ d'après la relation de la question précédente (voir le bloc en haut à gauche par exemple).

Ainsi, le polynôme scindé à racines simples P annule A ce qui prouve que A est aussi diagonalisable.

e. Si A est inversible et diagonalisable, montrons que M n'est pas diagonalisable. Si elle l'était, il existerait un polynôme scindé à racines simples P tel que $P(M) = 0$. Avec les calculs précédents, on aurait donc $P(A) = AP'(A) = 0$ ce qui donne $P(A) = P'(A) = 0$ car A est inversible. Par d'D'ALEMBERT-GAUSS, il existe une valeur propre λ (éventuellement complexe) de A , et on aurait donc $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$ ce qui est absurde car P est scindé à racines simples. Ainsi, si A est diagonalisable et inversible, M n'est pas diagonalisable.

f. Avec le même polynôme P qu'en d., on a aussi $AP'(A) = 0$ donc XP' est annulateur de A . Si λ est une valeur propre de A , comme P et XP' annulent A , on sait d'après le cours que $P(\lambda) = 0 = \lambda P'(\lambda)$. Mais comme les racines de P sont simples par hypothèse, P et P' n'ont pas de racine commune d'où $\lambda = 0$ et 0 est la seule valeur propre de A . En effet, 0 est valeur propre de A car A n'est pas inversible. Comme A est diagonalisable et que $\text{Sp}(A) = \{0\}$, la matrice A est semblable à la matrice nulle donc $A = 0$.

Réciproquement, si $A = 0$, alors $M = 0$ donc M est diagonalisable. Par conséquent, la conclusion de cet exercice est que $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

10.14 a. Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un polynôme annulateur de A , alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k = 0$. Soit λ une valeur propre de A , alors il existe $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$. Par une récurrence simple, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$, ce qui montre que $P(A)X = 0X = 0 = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k X = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \lambda^k X = P(\lambda)X$. Comme $P(\lambda)X = 0$ et $X \neq 0$, on a

donc $P(\lambda) = 0$ donc λ est une racine de P : $\text{Sp}(A)$ est inclus dans l'ensemble des racines de P .

b. $A^0 U = U = UB^0$ et $A^2 U = A(AU) = A(UB) = (AU)B = (UB)B = UB^2$ car on a $AU = UB$ par hypothèse.

Par le même principe et par une récurrence simple, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k U = UB^k$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ qu'on écrit

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k, \text{ alors } P(A)U = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k \right) U = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k U = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k UB^k = U \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k B^k \right) = UP(B).$$

c. Si on prend $P = \chi_A$, d'après b., on a $\chi_A(A)U = U\chi_A(B)$ et, comme $\chi_A(A) = 0$ par CAYLEY-HAMILTON, on a $U\chi_A(B) = 0$. Or la matrice U est non nulle donc cela implique que $\chi_A(B)$ n'est pas inversible ; en effet, si elle l'était, on aurait $U\chi_A(B)(\chi_A(B))^{-1} = U = 0$ ce qui est absurde. Par le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ et on peut écrire $\chi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda(A)}$, ce qui montre que $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (B - \lambda I_n)^{m_\lambda(A)} = 0$.

Ceci implique qu'il existe $\lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que $B - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Or $\lambda I_n - B$ non inversible se traduit par $\det(\lambda I_n - B) = \chi_B(\lambda) = 0$ donc λ est à la fois une valeur propre de A et de B .

d. Soit $\lambda \in \text{Sp}(C) \cap \text{Sp}(D)$. On sait que $\text{Sp}(D^T) = \text{Sp}(D)$ car $\chi_D = \chi_{D^T}$ donc il existe deux vecteurs colonnes X et Y non nuls dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $CX = \lambda X$ et $D^T Y = \lambda Y$. Posons $M = XY^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $CM = CXY^T = (CX)Y^T = \lambda XY^T$ et $MD = XY^T D = X(Y^T D) = X(D^T Y)^T = X(\lambda Y)^T = \lambda XY^T$ donc $CM = MD$. Or, en notant $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $Y = (y_j)_{1 \leq j \leq n}$, il existe $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $j_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tels que $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$ par hypothèse. Ainsi, si $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a $m_{i,j} = x_i y_j$ donc $m_{i_0,j_0} = x_{i_0} y_{j_0} \neq 0$ et on a bien $M \neq 0$.